



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Tissemsilt

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Sciences et de la Technologie

Polycopié de

Parcours: Master structures

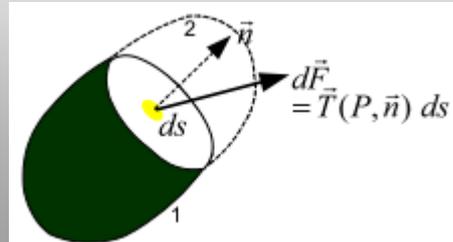
Matière : Elasticité

Filière : Génie Civil

Spécialité : Structures

Elasticité

Cours et Exercices



Préparé par :
Pr. BOUDERBA BACHIR

Avant-propos

Le présent polycopié est destiné aux étudiants de master en génie civil et aux élèves ingénieurs des écoles. Le principal objectif de ce travail est d'aider les étudiants à comprendre les notions de base de l'élasticité. Ceci permet de reconnaître sous le nom de mécanique des solides homogènes isotropes déformables à comportement élastique linéaire sous les hypothèses de petites perturbations auxquelles les solides étudiés sont soumis à des efforts faibles.

Ce polycopié est divisé en huit chapitres:

- Chapitre 1: Introduction sur la théorie d'élasticité ;
- Chapitre 2: Théorie de l'état de contraintes ;
- Chapitre 3: Théorie de l'état de déformation ;
- Chapitre 4: Relation entre les contraintes et les déformations et lois de comportement ;
- Chapitre 5: Equations générales de l'élasticité linéaire ;
- Chapitre 6: Résolution des problèmes d'élasticité plane ;
- Chapitre 7: Flexion des Poutres ;
- Chapitre 8: Etude des plaques minces.

Enfin j'espère que ce travail va élargir les connaissances de nos étudiants dans le domaine de calcul des structures du Génie Civil.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1: Introduction sur la théorie d'élasticité	
1.1. Introduction	04
1.2. Notion de tenseur	04
1.3. Changement de repère	08
1.4. Déterminant d'une matrice	09
1.5. Polynôme caractéristique	09
Exercice	10
Chapitre 2: Théorie de l'état de contraintes	
2.1. Introduction	12
2.2. Quelle est l'importance de la mécanique des solides déformables ?	13
2.3. Forces dans le milieu continu	14
2.4. Notion de vecteur contrainte	16
2.5. Tenseur des contraintes de Cauchy	18
2.6. Symétrie du tenseur des contraintes et Réciprocité des contraintes tangentielles	19
2.7. Equations différentielles d'équilibre	20
2.8. Contraintes et directions principales	21
2.9. Représentation graphique (Cercle de Mohr)	23
2.10. Etats des contraintes particuliers	24
2.11. Les équations de conditions de chargement sur les frontières (Conditions aux limites)	24
2.12. Conditions aux limites sur les parois d'un barrage (Exemple)	25
2.13. Critères de limite élastique	27
Exercices	28
Chapitre 3: Théorie de l'état de déformation	
3.1. Introduction	30
3.2. Les déformations locales	30
3.3. Etat des déformations en un point	31
3.4. Tenseur de déformation	32
3.5. Composantes du tenseur de déformations	32
3.6. Dilatation volumique	34
3.7. Déformations et directions principales	35
3.8. Etats des déformations particuliers	36
3.9. Représentation graphique de l'état de déformation en un point	37
3.10. Les équations de compatibilité	38
3.11. Mesure de l'état de déformation à la surface d'un corps	39
Exercice	40

Chapitre 4: Relation entre les contraintes et les déformations et lois de comportement	
4.1. Introduction	44
4.2. Lois de comportement	44
4.3. Influence de la Température	48
4.4. Energie de déformation	49
Exercice	51
Chapitre 5: Equations générales de l'élasticité linéaire	
5.1. Introduction	54
5.2. Equations de Lamé	54
5.3. Équations de Beltrami-Michell	55
5.4. Principe de Saint-Venant	57
Exercice	57
Chapitre 6: Résolution des problèmes d'élasticité plane	
6.1. Introduction	60
6.2. Problème de déformations planes	60
6.3. Problème de contraintes planes	61
6.4. Les équations fondamentales d'élasticité plane	61
6.5. Fonction de contrainte d'Airy	63
Exercice	65
Chapitre 7: Flexion des Poutres	
7.1. Introduction	69
7.2. Définition d'une poutre	69
7.3. Types de flexion	69
7.4. Théorie d'Euler-Bernoulli	70
7.5. Théorie de Timoshenko	70
Exercices	72
Chapitre 8: Etude des plaques minces	
8.1. Introduction	75
8.2. Hypothèses fondamentales	75
8.3. Définition d'une plaque	76
8.4. Cinématique d'une plaque mince	76
8.5. Déformation d'une plaque mince	77
8.6. Tenseur de contraintes et loi de comportement	79
8.7. Equations d'équilibre d'une plaque	80
8.8. Energie de déformation d'une plaque mince	81
Exercice	81
Exercices	84
Références Bibliographiques	

CHAPITRE 1
INTRODUCTION SUR LA THÉORIE
D'ÉLASTICITÉ

Chapitre 1

« Introduction sur la théorie d'élasticité »

1.1. Introduction

La théorie de l'élasticité est un premier pas essentiel pour comprendre les comportements mécaniques des matériaux solides, en particulier ceux liés à leur déformation sous l'influence des forces appliquées. Elle repose sur l'hypothèse que, dans certaines conditions, les matériaux sont élastiques, c'est-à-dire qu'ils retrouvent leur forme d'origine une fois que les forces externes cessent de s'appliquer. L'étude de la théorie de l'élasticité implique la compréhension des concepts clés tels que les contraintes, les déformations, les lois de Hooke, les équations de l'équilibre, et les équations de déformation.

Ce chapitre ne vise pas à fournir un cours exhaustif de mathématiques, et par conséquent, toutes les démonstrations ne sont pas détaillées en profondeur. Son objectif principal est de servir d'introduction au calcul tensoriel, en présentant les outils les plus puissants pour aborder les problèmes liés à la mécanique des solides déformables. Pour tirer pleinement parti de ce chapitre, il est nécessaire de maîtriser un certain nombre de concepts algébriques relatifs à la manipulation de champs scalaires, de champs de vecteurs, et même de champs de tenseurs d'ordre deux. Ces derniers seront assimilés, dans ce contexte, à des matrices grâce au choix d'un repère orthonormé. Les notions fondamentales d'algèbre tensorielle nécessaires pour la compréhension de ce cours sont regroupées dans ce chapitre.

1.2. Notion de tenseur

Un tenseur est un concept mathématique et physique qui généralise les notions de vecteurs et de matrices. Il est utilisé pour représenter de manière compacte et abstraite des quantités qui ont des composantes multiples, telles que les forces, les déformations, les champs électromagnétiques, les contraintes, etc.

En effet en mécanique des solides déformables, outre les grandeurs scalaires telles que la masse et les grandeurs vectorielles telles que les forces, on a besoin de caractériser des états de tension ou de déformation qui nécessitent l'introduction de tenseurs.

On utilise principalement des tenseurs d'ordre **2** pour représenter les états de contraintes et de déformations et des tenseurs d'ordre **4** pour représenter le comportement.

1.2.1. Tenseur d'ordre 0 (Scalaire)

Un scalaire est défini par un seul nombre indépendant de la base choisie, qui représente la valeur absolue de la grandeur physique qu'il représente. Exemples (la masse, la densité, la température, l'énergie, volume, pression.... etc.).

1.2.2. Tenseur d'ordre 1 (Vecteur)

Un vecteur est une grandeur physique caractérisée par leur direction, leur sens et leur intensité. Exemples (la vitesse ou l'accélération d'un point matériel, la force...etc.).

Dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, un vecteur \vec{v} est un ensemble de trois composantes défini comme suit :

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i\vec{e}_i \quad (1.1)$$

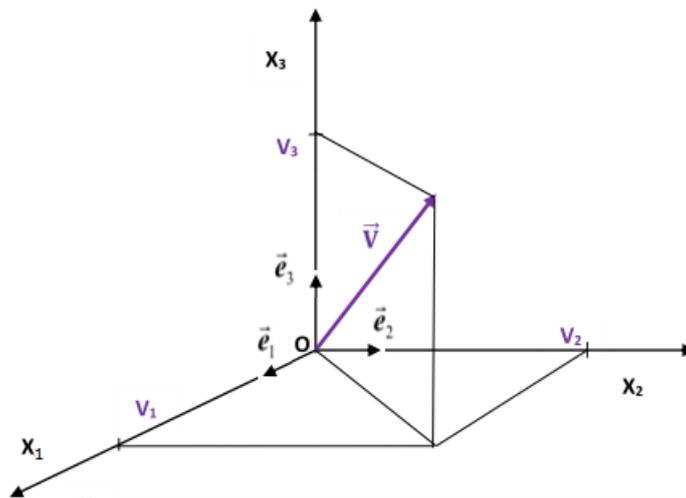


Fig.1.1- Coordonnées rectangulaires d'un vecteur

Pour alléger l'écriture, on utilise la convention de sommation d'Einstein, Cette convention stipule que lorsqu'un indice est répété dans une expression, il convient de faire varier cet indice de **1** à **3** et de faire la somme. On peut ainsi écrire tout simplement :

$$\vec{v} = v_i\vec{e}_i \quad (1.2)$$

En notation matricielle on écrira parfois :

$$\vec{v} = \{\vec{v}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \{v_1 \quad v_2 \quad v_3\}^T \quad (1.3)$$

On peut ainsi considérer que le produit scalaire de deux vecteurs est le résultat du produit ligne-colonne en écrivant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (1.4)$$

D'après la convention d'indice muet, on peut écrire aussi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_i v_i \quad (1.5)$$

Par contre les composantes du produit tensoriel de deux vecteurs s'obtiennent comme le résultat du produit colonne-ligne (à condition que les deux vecteurs soient exprimés dans la même base) :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \vec{u} \vec{v}^T = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Ou bien : Le produit tensoriel noté \otimes ou \wedge pour le produit vectoriel

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \quad (1.7)$$

1.2.3. Tenseur d'ordre 2

Un tenseur d'ordre **2**, défini sur l'espace vectoriel \mathbf{R}^3 , est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{X} de l'espace vectoriel \mathbf{R}^3 un vecteur \vec{Y} de \mathbf{R}^3 . Ce tenseur est représenté dans la base \vec{e}_i par un tableau d'éléments A_{kl} appelé tableau des composantes du tenseur. Il est constitué de **9** nombres ($k, l = 1, 2, 3$). Dans la base \vec{e}'_i , ce même tenseur est représenté par un tableau d'éléments reliés aux précédents par l'expression :

$$A'_{ij} = C_{ik} C_{jl} A_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

Où les termes C_{ik} et C_{jl} sont les éléments de la matrice de changement de base.

$$A'_{ij} = C_{i1} C_{j1} A_{11} + C_{i1} C_{j2} A_{12} + \dots + C_{i3} C_{j3} A_{33}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

Les composantes du premier tenseur de la base \vec{e}'_i sont généralement représentées sous forme d'une matrice carrée **3x3** exprimée comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

1.2.4. Propriétés des tenseurs

a. Tenseur identité (matrice unité)

La tenseur identité noté \mathbf{I} dans une base orthonormée est un tenseur particulier.

$$\mathbf{I} = [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

D'où : δ_{ij} dites les **symboles de Kronecker**.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow si : i = j \\ 0 \rightarrow si : i \neq j \end{cases} \quad (1.12)$$

b. Symétrie

Un tenseur \mathbf{A} est symétrique s'il est égal à sa transposée :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Leftrightarrow A_{ij} = A_{ji} \quad (1.13)$$

c. Antisymétrie

Un tenseur \mathbf{A} est antisymétrique s'il est égal à l'opposé de sa transposée :

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \Leftrightarrow A_{ij} = -A_{ji} \quad (1.14)$$

d. Isotropie

Les composantes d'un tenseur isotrope du second ordre dans une base orthonormée sont de la forme :

$$A_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (1.15)$$

e. Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur d'ordre **2** est la somme de ses termes diagonaux :

$$\text{tr} \mathbf{A} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii} \quad (1.16)$$

1.2.5. Opérations sur les matrices

Soit \mathbf{A} et \mathbf{B} deux matrices de composantes A_{ij} et B_{ij} et α est un scalaire.

1. Egalité :	$\mathbf{A} = \mathbf{B} : A_{ij} = B_{ij}$
2. Addition :	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} : C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
3. Multiplication matricielle :	$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = [\mathbf{A}][\mathbf{B}] : C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}$
4. Multiplication par un scalaire :	$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{A} : C_{ij} = \alpha A_{ij}$

5. Transposé :	$B = A^T : B_{ij} = A_{ji}$
6. Inversion matricielle :	A^{-1} inverse de $A : A \cdot A^{-1} = I$

1.2.6. Règles du calcul matriciel

Avant de manipuler plus avant les matrices, il convient de connaître les règles suivantes :

Commutativité de la somme :	$A + B = B + A$
Associativité de la somme :	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Associativité du produit :	$A(BC) = (AB)C$
Distributivité du produit par rapport à la somme :	$A(B + C) = AB + AC$
Compatibilité :	$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
Pour l'addition et la multiplication par des nombres réels λ, μ :	$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
Le produit matriciel n'est pas commutatif :	$AB \neq BA$
Pour les matrices carrées, c'est:	$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ $(A B)^T = B^T A^T \quad \det(AB) = \det(A) \det(B)$

1.3. Changement de repère

Une matrice de changement de base nommée aussi matrice de passage

$$C = [C_{ij}] \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{e}'_1 &= C_{11}\vec{e}_1 + C_{12}\vec{e}_2 + C_{13}\vec{e}_3, \\
 \vec{e}'_2 &= C_{21}\vec{e}_1 + C_{22}\vec{e}_2 + C_{23}\vec{e}_3, \\
 \vec{e}'_3 &= C_{31}\vec{e}_1 + C_{32}\vec{e}_2 + C_{33}\vec{e}_3
 \end{aligned}
 \quad
 \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{array} \right\} = [C] \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{array} \right\}
 \tag{1.18}$$

Ou

Les vecteurs de base orthonormée d'un système d'axes $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}) : \vec{e}_i = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Les nouveaux vecteurs de base : $\vec{e}'_i = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$

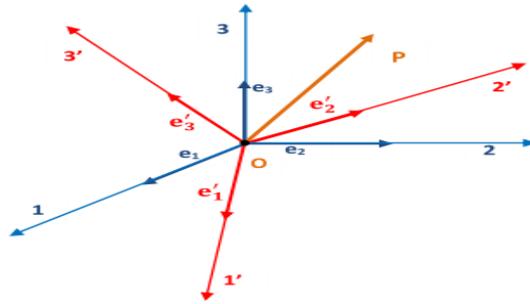


Fig.1.2- Changement de base

Dans le cas d'une rotation θ

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

1.4. Déterminant d'une matrice

Le déterminant peut être écrit en deux formes équivalentes :

$$\det[A] = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \quad (1.20)$$

Dans lequel l'indice de la première expression représente l'extension de la ligne, tandis que la seconde forme est l'extension de la colonne. En utilisant la propriété :

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

Le **symbole de permutation** est particulièrement utile pour évaluer le déterminant d'une matrice A .

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i j k \text{ apparaissent dans l'ordre } 12312 \dots \text{ (est une permutation paire de } 1,2,3) \\ -1 & \text{Si } i j k \text{ apparaissent dans l'ordre } 32132 \dots \text{ (est une permutation impaire de } 1,2,3) \\ 0 & \text{Si } i j k \text{ apparaissent dans un autre ordre (deux indices sont répétés)} \end{cases}$$

Dans le cas où les indices i, j et k prennent en rotation circulaire les valeurs: **1, 2 et 3**.

Une autre forme du déterminant d'une matrice peut être écrite comme :

$$\det[A] = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr} \quad (1.22)$$

1.5. Polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre sont obtenues par résolution de l'équation caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.23)$$

En substituant l'équation (1.22) dans l'équation (1.23), on obtient :

$$P(\lambda) = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} (A_{ip} - \lambda \delta_{ip}) (A_{jq} - \lambda \delta_{jq}) (A_{kr} - \lambda \delta_{kr}) = 0 \quad (1.24)$$

Soit, Après développement l'équation (1.24) devient :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (1.25)$$

Avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}A = A_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2} (A_{ii} A_{jj} - A_{ij} A_{ji}) = \frac{1}{2} [(\text{tr}A)^2 - \text{tr}A^2] \\ I_3 &= \det[A] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Où

I_1, I_2 et I_3 sont appelés les invariants fondamentaux du tenseur \mathbf{A} .

λ_1, λ_2 et λ_3 sont appelées les valeurs propres de \mathbf{A} .

Exercice :

On considère la transformation :

$$\begin{cases} x' = 10x - 4y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$$

Calculer les valeurs propres et les vecteurs correspondant ?

Solution:

Les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \end{cases} &= \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -4 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} &= 0; \quad (10 - \lambda)(2 - \lambda) - 8 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne deux racines : $\lambda_1=10,90$ et $\lambda_2=1,10$

Les vecteurs qui ne subissent pas de rotation s'obtiennent par résolution du système pour chacune des valeurs de λ .

Pour $\lambda_1=10,90$:
$$\begin{cases} -0,9x - 4y = 0 \\ -2x - 8,9y = 0 \end{cases}$$

Pour $\lambda_2=1,10$:
$$\begin{cases} 8,9x - 4y = 0 \\ -2x + 0,9y = 0 \end{cases}$$

Les droites définissent les directions propres (directions principales).

CHAPITRE 2

THÉORIE DE L'ÉTAT DE CONTRAINTES

Chapitre 2

«Théorie de l'état de contraintes»

2.1. Introduction

La théorie des contraintes en élasticité, est une branche de la mécanique des solides déformables lorsqu'ils sont soumis à des charges externes. Elle vise à déterminer les contraintes et les déformations qui se produisent dans un matériau sous l'influence de forces externes, telles que la tension, la compression, la torsion, etc.

La mécanique des solides déformables s'intéresse à l'étude du comportement des solides déformables, élastiques et isotropes en petites perturbations (petits déplacements et petites déformations), avec une loi de comportement linéaire.

La théorie de l'élasticité repose sur plusieurs hypothèses fondamentales:

1-Elasticité : L'hypothèse fondamentale de la théorie des contraintes en élasticité est que le matériau est élastique, ce qui signifie qu'il revient à sa forme d'origine lorsque les charges sont retirées.

2-Linéarité des déformations : Cette hypothèse suppose que les déformations du matériau sont linéaires par rapport à l'application des contraintes. En d'autres termes, la relation entre la contrainte et la déformation est linéaire, conformément à la loi de Hooke.

3-Isotropie : L'isotropie suppose que les propriétés mécaniques du matériau sont les mêmes dans toutes les directions. Cela signifie que les propriétés élastiques du matériau, telles que le module d'Young et le coefficient de Poisson, sont constants indépendamment de la direction dans laquelle les contraintes sont appliquées.

4-Hypothèse des petites déformations : L'hypothèse des petites déformations suppose que les déformations subies par le matériau sont suffisamment faibles pour que les variations de géométrie du matériau soient négligeables. Cela signifie que les déformations sont considérées comme infinitésimales, ce qui simplifie les équations de déformation.

5-Hypothèse des contraintes uniformes : Cette hypothèse suppose que les contraintes à l'intérieur du matériau sont uniformes. Cela signifie que les contraintes sont réparties de manière **homogène** à travers le matériau.

6-Hypothèse de continuité : L'hypothèse de continuité suppose que le matériau est **homogène** et **continu**, ce qui signifie qu'il n'y a pas de vides, de fissures ou de zones de discontinuité significatives à l'intérieur du matériau.

2.2. Quelle est l'importance de la mécanique des solides déformables ?

L'étude de la mécanique des solides déformables est essentielle pour plusieurs raisons importantes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. Voici quelques-unes des principales raisons pour lesquelles il est important d'étudier la mécanique des solides déformables :

a. Conception et ingénierie des structures : La mécanique des solides déformables est cruciale pour la conception et l'analyse des structures. Que ce soit dans la construction de bâtiments, de ponts ou d'autres infrastructures, la compréhension des déformations, des contraintes et des contraintes dans les matériaux est essentielle pour garantir la sécurité, la durabilité et l'efficacité des structures.

b. Prévention des défaillances : Comprendre la mécanique des solides déformables permet d'identifier les facteurs qui peuvent entraîner des défaillances dans les matériaux et les structures.

c. Optimisation de la performance des matériaux : En analysant la manière dont les matériaux se déforment et se comportent sous des charges spécifiques, il est possible d'optimiser leur performance. Cela peut inclure le choix des matériaux appropriés, la conception de structures légères et résistantes, et la recherche de matériaux aux propriétés spécifiques pour des applications particulières.

d. Simulation et modélisation : La mécanique des solides déformables est utilisée pour créer des modèles et des simulations numériques qui permettent de prédire le comportement des matériaux et des structures dans des conditions variées.

En résumé, l'étude de la mécanique des solides déformables est fondamentale pour la conception, la construction, l'innovation technologique, la sécurité et la durabilité dans de nombreux domaines.

2.3. Forces dans le milieu continu

Soit un domaine solide D , de volume V et délimité par la surface S (voir figure 2.1).

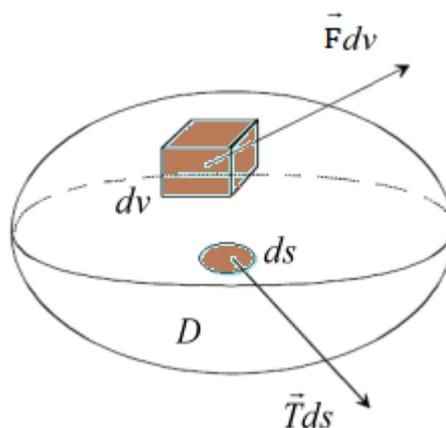


Fig.2.1- Forces agissant sur un domaine solide

Les forces agissant sur ce domaine sont de deux types :

2.3.1. Les forces extérieures ou volumiques (ou massiques) :

Les forces volumiques s'appliquent à toutes les particules du domaine D et agissent à distance (forces de pesanteur, d'inertie ou d'un champ électromagnétique).

$\vec{F}dV$ est la résultante de ces forces pour le volume élémentaire dV centré au point P .

2.3.2. Les forces surfaciques de contact :

Les forces surfaciques s'exercent uniquement sur la frontière S de D , ce sont des actions de contact (pression sur un solide immergé, efforts aérodynamiques sur un élément de voilure, ...etc.).

Tds est la résultante sur l'élément de frontière ds .

Remarque :

- Les forces intérieures s'exerçant entre les particules, du fait qu'elles sont de même module et de sens opposés, peuvent être négligées.
- D désigne, soit un solide dans son ensemble, soit une partie d'un tel solide isolé par la pensée en son sein.
- Nous constaterons que seuls ces deux types de forces existent en fonction de leur mode d'application, tandis que les forces ponctuelles ou de lignes, appliquées à chaque point le long d'une courbe, ne sont obtenues que par modélisation ou schématisation.

2.4. Notion de vecteur contrainte

On considère un domaine matériel D que l'on découpe par la pensée en deux sous-domaines $D1$ et $D2$ suivant une surface fictive S (figure II.2). Si on isole la partie $D1$, celle-ci est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qui lui sont appliqués et de l'action de surface répartie exercée par $D2$.

On considère maintenant autour d'un point P , un élément de surface ds infiniment petit et situé dans le plan de coupe. L'action de surface exercée par $D2$ sur $D1$ est caractérisée par un tenseur d'action interne de résultante $\vec{T}(P, \vec{n}) \cdot ds$ sur cet élément de surface ds .

Au point P , cette quantité dépend aussi de l'inclinaison de la surface coupée et donc, de la normale unitaire \vec{n} à cette surface. D'où la notation suivante :

$$\vec{T}(P, \vec{n}) = d\vec{F} / dS \quad (2.1)$$

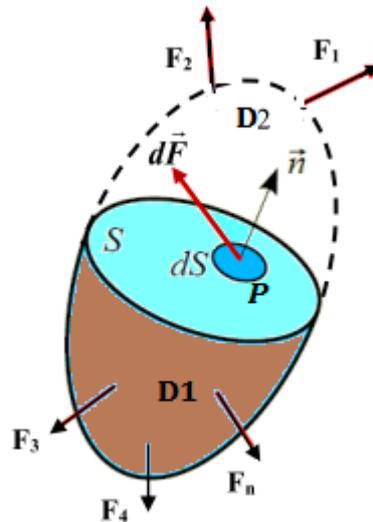


Fig.2.2- Coupure sur une facette

$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n})$ Se nomme vecteur contrainte en \mathbf{P} relativement à la direction de la facette \vec{n} . Par convention, la normale choisie est la normale sortante par rapport au solide auquel s'applique la contrainte.

Remarque : \vec{n} de composantes (n_x, n_y, n_z) étant unitaire:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2.2)$$

D'après le principe de l'action et de la réaction, la partie $\mathbf{D2}$ sera soumise de la part de sur $\mathbf{D1}$ à un vecteur contrainte opposé :

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) = -\vec{T}(\mathbf{P}, -\vec{n}) \quad (2.3)$$

La projection de $\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n})$ sur \vec{n} est la contrainte normale à la surface $d\mathbf{S}$ on la note généralement σ_n , qui représente une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) \quad (2.4)$$

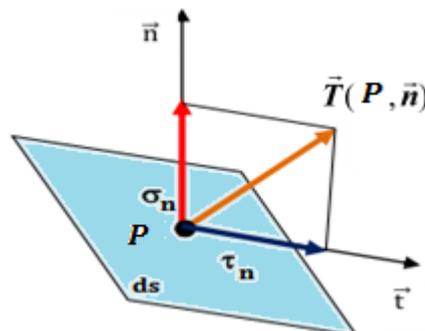


Fig.2.3- Composantes du vecteur contrainte

La projection de $\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n})$ sur le plan contenant $d\mathbf{S}$ est la contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ (contrainte de cisaillement).

$$\tau_n = \vec{i} \cdot \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) \quad (2.5)$$

Donc le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant \vec{n} et sa projection sur la facette:

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{i} \quad (2.6)$$

Remarque : Selon (théorème de Pythagore):

$$\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2 \quad (2.7)$$

Pour une facette donnée, on distingue différents cas :

1. La facette est en traction ($\sigma > 0$) : Le vecteur contrainte «tire » sur la facette puisqu'il est dirigé selon la normale à la facette ;
2. La facette est en compression ($\sigma < 0$) : Le vecteur contrainte «pousse » sur la facette ;
3. La facette est soumise à de la traction pure si ($\tau = 0$ et $\sigma > 0$) ou de la compression pure si ($\tau = 0$ et $\sigma < 0$) ;
4. La facette est soumise à du cisaillement pur ($\sigma = 0$ et $\tau \neq 0$);
5. La facette est libre ($\sigma = 0$ et $\tau = 0$).

2.5. Tenseur des contraintes de Cauchy

Considérons une particule tétraédrique (Voir figure 2.4).

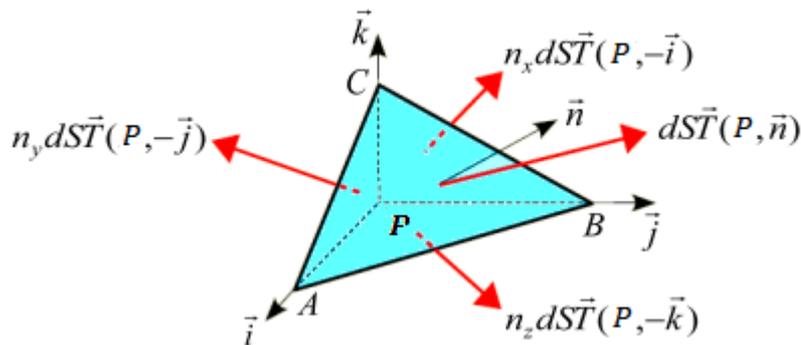


Fig.2.4- Tétraèdre infiniment petit

Considérons le bilan des forces agissant sur la particule (Tétraèdre : Voir figure 2.4), nous constatons que sur chaque facette du tétraèdre s'exercent les forces suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Sur PBC : } & \vec{T}(\mathbf{P}, -\vec{i})n_x dS & dS_{PBC} &= n_x dS \\
 \text{Sur PAC : } & \vec{T}(\mathbf{P}, -\vec{j})n_y dS & \text{ Avec } & dS_{PAC} = n_y dS \text{ et } \vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \\
 \text{Sur PAB : } & \vec{T}(\mathbf{P}, -\vec{k})n_z dS & & dS_{PAB} = n_z dS
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Par la relation vectorielle et selon l'équilibre du tétraèdre sous l'action des forces appliquées sur ses faces :

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n})dS + \vec{T}(\mathbf{P}, -\vec{i})n_x dS + \vec{T}(\mathbf{P}, -\vec{j})n_y dS + \vec{T}(\mathbf{P}, -\vec{k})n_z dS = \vec{0} \quad (2.9)$$

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) = \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{i})n_x + \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{j})n_y + \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{k})n_z$$

Sous forme matricielle :

$$\{\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n})\} = [\sigma(\mathbf{P})]\{n\}$$

Ou: (2.10)

$$\{\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n})\} = \left[\begin{array}{ccc} \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{i}) & \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{j}) & \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{k}) \end{array} \right] \{n\}$$

Où $[\sigma(\mathbf{P})]$ est le tenseur des contraintes de Cauchy en point \mathbf{P} .

Les composantes du tenseur des contraintes selon la figure 2.5 sont :

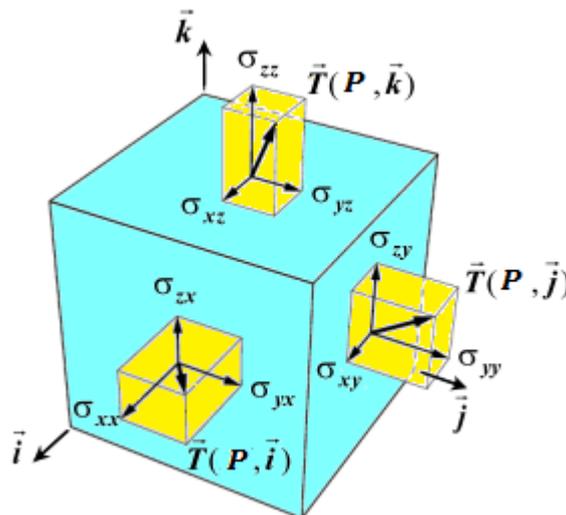


Fig.2.5- Composantes du tenseur de contrainte

$$[\sigma(\mathbf{P})]_{(M/\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Sous forme développée l'équation (II.14) peut être réécrite comme suit :

$$\{\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n})\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\ \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\ \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Soit :

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z)\vec{i} + (\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z)\vec{j} + (\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z)\vec{k} \quad (2.13)$$

Au point \mathbf{P} , la contrainte normale σ_n , à la facette élémentaire de normale \vec{n} est :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}) = \{\mathbf{n}\}^T [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{P})] \{\mathbf{n}\} \quad (2.14)$$

Sur la facette \vec{i} par exemple, le vecteur contrainte est :

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k} \quad (2.15)$$

La contrainte normale et le vecteur cisaillement sur cette facette sont :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \vec{i} \cdot \vec{T}(\mathbf{P}, \vec{i}) = \sigma_{xx} \\ \text{et} \quad \vec{t}_i &= \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k} \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.6. Symétrie du tenseur des contraintes et Réciprocité des contraintes tangentielles

Considérons un parallélépipède élémentaire infiniment petit (figure 2.6).

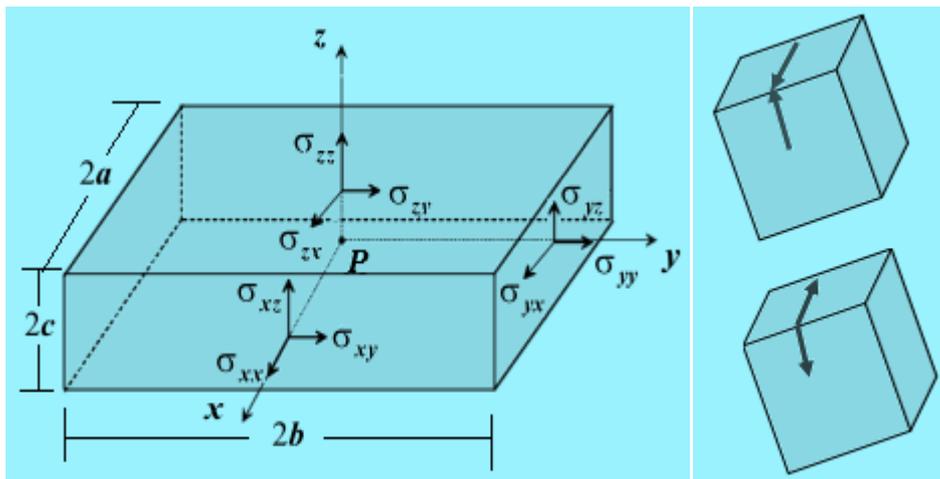


Fig.2.6- Symétrie et Réciprocité des contraintes tangentielles

En équilibre en rotation, quand les dimensions de la particule sont très petites et tendent vers zéro on aura :

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} &\Rightarrow \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (2.17) \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \end{aligned}$$

Les contraintes tangentielles sont égales en module. Le tenseur des contraintes en un point est donc **symétrique** de 6 composantes indépendantes.

$$[\sigma(\mathbf{P})] = [\sigma(\mathbf{P})]^T \quad (2.18)$$

2.7. Equations différentielles d'équilibre

Soit un petit élément parallélépipède s'appuie sur les axes du repère (x, y, z) . Ce parallélépipède a pour côté (dx, dy, dz) . Soit \mathbf{F} la force par unité de volume de composantes F_x, F_y et F_z qui s'applique sur cet élément.

Le tenseur σ de l'équation (2.11) s'écrit aussi :

$$[\sigma(\mathbf{P})]_{(M/\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

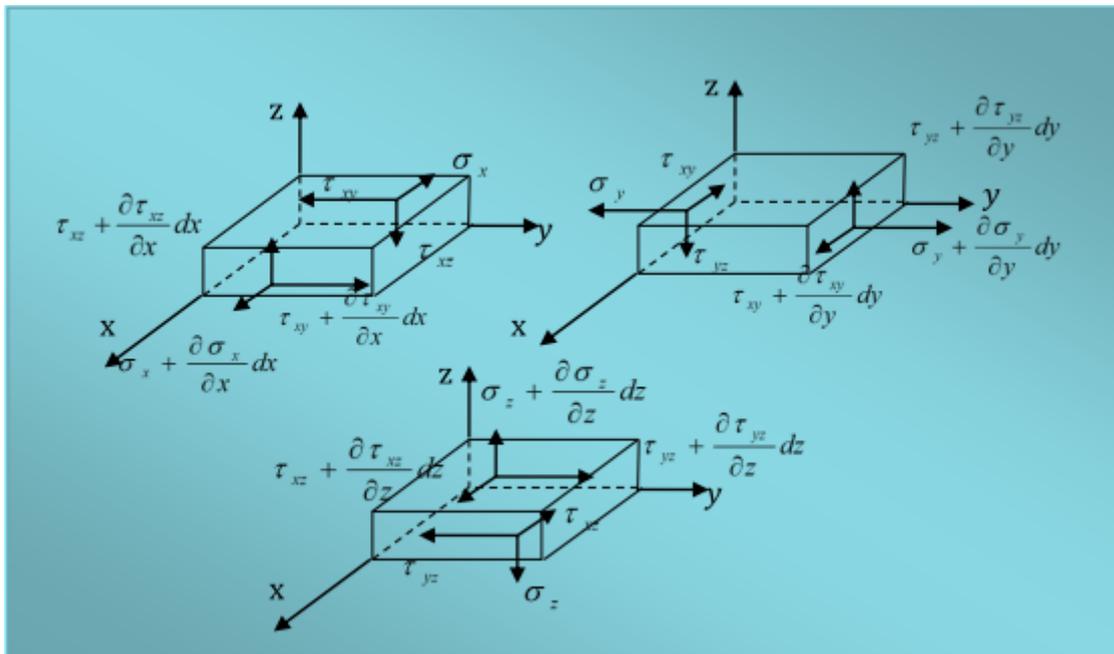


Fig.2.7- Equilibre d'un petit élément parallélépipède

Pour faciliter l'écriture des équations, nous projetons l'équation d'équilibre statique sur une direction donnée.

Le système d'équation d'équilibre est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \mathbf{F}_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \mathbf{F}_y &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \mathbf{F}_i = 0 \quad (2.20) \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \mathbf{F}_z &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations sont appelées équations d'équilibre et doivent être satisfaites en tout point du corps.

2.8. Contraintes et directions principales

L'état de contrainte dans un domaine matériel est un état tensoriel. Dans une base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$, le tenseur des contraintes est de la forme (Tenseur de CAUCHY):

$$[\sigma(P)] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3) \quad (2.21)$$

Il existe un système d'axes particulier qui représente les "directions propres" de la matrice. Ce repère est appelé le **repère principal** des contraintes $(\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III})$. Dans cette base la matrice représentant l'état de contrainte prend une forme diagonale :

$$[\sigma(P)] = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} (\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III}) \quad (2.22)$$

Avec: $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$

La détermination des contraintes principales passe par la diagonalisation de la matrice des contraintes. On doit ainsi rechercher les solutions de l'équation :

$$\det(\sigma(P) - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (2.23)$$

Quelque soit le système de référence $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ choisit, on doit trouver les mêmes valeurs de contraintes principales. En conséquence les quantités I_1 , I_2 et I_3 ne doivent pas dépendre du système d'axes. Ce sont les **invariants** du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2) = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ik}^2) \quad (2.24) \\ I_3 &= \det(\sigma_{ij}) \end{aligned}$$

- Tenseur déviateur des contraintes

Il est toujours possible de mettre le tenseur des contraintes sous la forme d'une somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur de trace nulle :

$$[\sigma(P)] = \sigma_m I + S \text{ avec } \begin{cases} \text{tr}(S) = 0 \\ \sigma_m = \frac{I_1}{3} \end{cases} \quad (2.25)$$

$\sigma_m I$ est le tenseur hydrostatique.

S est Le tenseur déviateur des contraintes:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

2.9. Représentation graphique (Cercle de Mohr)

Le cercle de Mohr est un outil graphique utilisé en mécanique des milieux continus et en mécanique des solides déformables. Le cercle de Mohr est particulièrement utile pour analyser les contraintes et les déformations dans un matériau ou une structure soumis à des charges externes, qu'il s'agisse de forces ou de moments. Il permet de visualiser les contraintes principales, les contraintes de cisaillement, les angles de contrainte, et d'autres propriétés importantes du matériau ou de la structure.

A chaque facette \vec{n} , nous pouvons donc associer un point dans le repère (σ_n, τ_n) orthonormé. Lorsque l'angle θ varie, ce point décrit le cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r (figure 2.8).

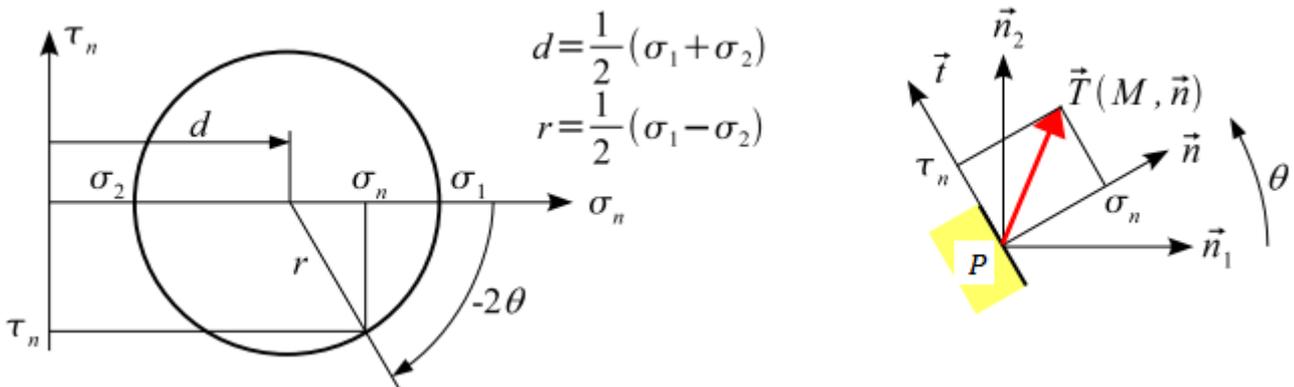


Fig.2.8- Représentation graphique par le cercle de Mohr

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(P, \vec{n}) = \{n\}^T [\sigma(P)] \{n\} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(P, \vec{n}) = \{t\}^T [\sigma(P)] \{n\} = -\sigma_1 \cos \theta \sin \theta + \sigma_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases} \quad (2.27)$$

Soit

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases} \quad \text{avec } d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad \text{et} \quad r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2.28)$$

D'après la figure (2.9) ci-dessus, géométriquement, les contraintes principales (pour un état plan de contraintes) sont simples à déterminer :

$$\begin{aligned}
 OC &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\
 R &= \sqrt{(\sigma_{xx} - OC)^2 + \sigma_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\
 \sigma_1 &= OC + R \\
 \sigma_2 &= OC - R \\
 \tan 2\theta_p &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - OC} = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}
 \end{aligned}
 \tag{2.29}$$

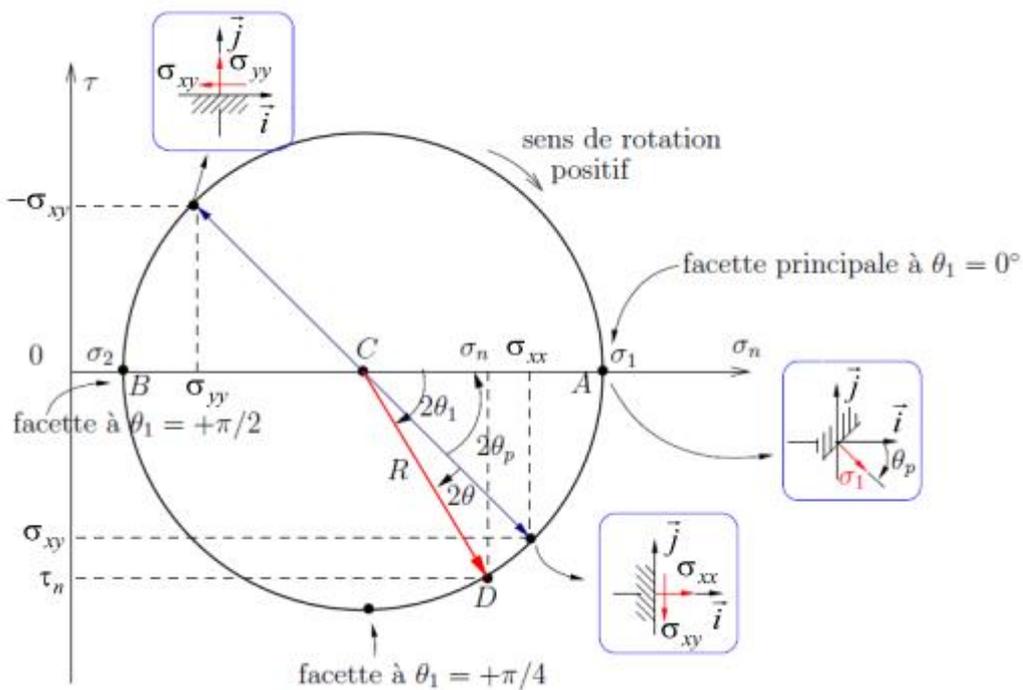


Fig.2.9- Cercle de Mohr pour un état plan de contraintes

Pour : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, Le contrainte de cisaillement maximum est donne par la formule suivante :

$$\tau_{\max} = \max|\bar{\tau}_n| = \frac{1}{2}|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| \tag{2.30}$$

On appelle l'intersection des trois cercles le tri-cercle de Mohr (figure 2.10).

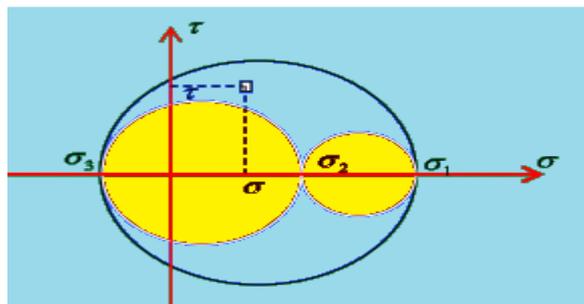
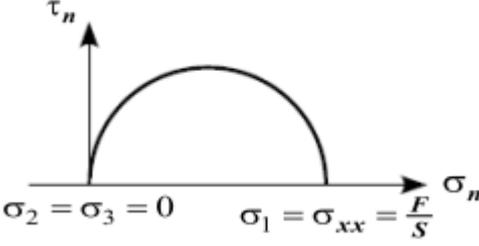
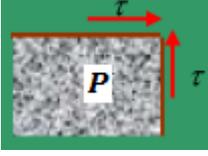
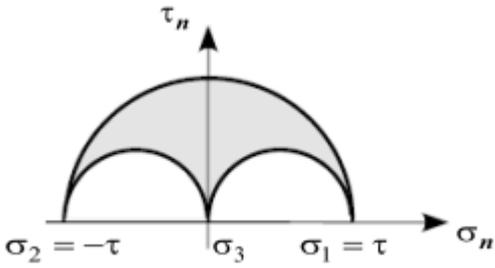
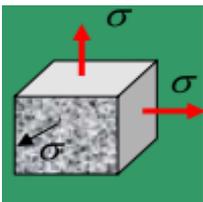
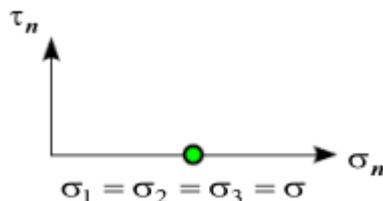
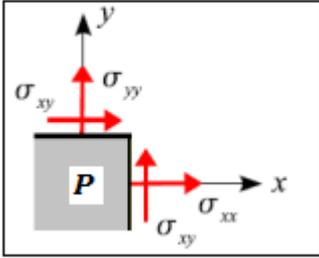
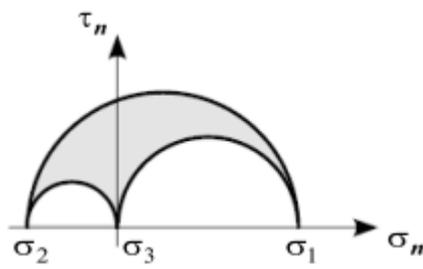


Fig.2.10- Tri-cercle de Mohr

2.10. Etats des contraintes particuliers

Etats des contraintes	Le tenseur des contraintes	Représentation graphique
<p>1. État de contrainte uni-axial (traction ou compression)</p> <ul style="list-style-type: none"> - Si $\sigma_{xx} > 0$, état de traction simple - Si $\sigma_{xx} < 0$, état de compression simple 	 $[\sigma(P)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	 <p>Fig.2.11- Etat de traction uni-axial</p>
<p>2. État de cisaillement pur</p>	 $[\sigma(P)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	 <p>Fig.2.12- Etat de cisaillement pur</p>
<p>3. État de tension ou compression hydrostatique</p>	 $[\sigma(P)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$	 <p>Fig.2.13- Etat de contrainte isotrope</p>
<p>4. Etat de contraintes planes</p>	 $[\sigma(P)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	 <p>Fig.2.14- Etat plan de contraintes</p>
<p>5. Contraintes combinées : Dans de nombreuses situations, les matériaux et les structures sont soumis à des combinaisons de contraintes, ce qui peut rendre l'analyse plus complexe. Par exemple, une pièce peut subir à la fois des contraintes de traction et de flexion.</p>		

Les états de contraintes particuliers font référence à des conditions spécifiques dans lesquelles les matériaux ou les structures sont soumis à des contraintes particulières. Ces contraintes peuvent être dues à des charges, des températures, des pressions ou d'autres facteurs environnementaux.

2.11. Les équations de conditions de chargement sur les frontières (Conditions aux limites)

La connaissance des conditions aux limites de l'état des contraintes et des déplacements est essentielle en mécanique des structures et en ingénierie. Les conditions aux limites font référence aux contraintes et aux déformations imposées ou autorisées à la périphérie d'une structure ou d'un composant. Elles jouent un rôle crucial dans la modélisation et l'analyse des comportements des matériaux et des structures.

Les conditions aux limites se décomposent généralement en deux catégories principales :

1. Conditions aux limites de contrainte :

- **Charges appliquées :** Les contraintes sont liées aux charges appliquées à la structure. Vous devez spécifier comment ces charges sont distribuées sur la surface ou la frontière de la structure.

Conditions de contact : Lorsque deux parties de la structure entrent en contact ou en appui, vous devez définir les conditions de contact appropriées pour tenir compte des forces de contact.

2. Conditions aux limites de déplacement (ou conditions de déformation) :

- **Fixation :** Il s'agit de la fixation ou de l'immobilisation d'une partie de la structure. Par exemple, lorsque vous fixez un poteau au sol, vous imposez une condition de déplacement nul à la base du poteau.

- **Déplacements imposés :** Dans certaines situations, les déplacements à la frontière d'une structure sont spécifiés. Par exemple, lors de la conception d'une poutre, vous pouvez imposer un déplacement vertical précis à l'une de ses extrémités.

- **Symétrie :** Dans certains cas, vous pouvez utiliser la symétrie pour simplifier les conditions aux limites. Par exemple, si une structure est symétrique par rapport à un plan, vous pouvez supposer que les déformations et les contraintes sont également symétriques.

2.12. Conditions aux limites sur les parois d'un barrage (Exemple) :

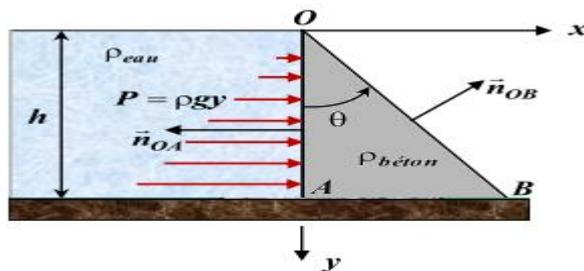


Fig.2.15- Conditions aux limites sur les parois d'un barrage

L'état des contraintes et donc des efforts internes au sein d'un barrage est déterminé en particulier par la pression exercée par le fluide sur ses parois (Figure 2.15).

Le vecteur de contrainte sur la paroi verticale ($x=0$) en contact avec le fluide est la suivante :

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}_{OA}) = [\sigma(\mathbf{P})]\{\vec{n}_{OA}\} = P\vec{i} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = -P \\ \sigma_{yx} = 0 \\ \sigma_{zx} = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Sur la paroi libre et inclinée d'un angle (θ) par rapport à y , nous avons :

$$\vec{T}(\mathbf{P}, \vec{n}_{OB}) = [\sigma(\mathbf{P})]\{\vec{n}_{OB}\} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z \\ \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z \\ \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

Les valeurs des contraintes ainsi trouvées sont relatives uniquement à la frontière considérée. Il faut émettre d'autres hypothèses et revenir à l'équation d'équilibre pour identifier l'état des contraintes dans tout le barrage.

2.13. Critères de limite élastique

A)- Critère de Tresca

En un point, la valeur absolue de la contrainte de cisaillement atteint une valeur critique.

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| \quad (2.33)$$

Notons $\sigma_e/2$ la valeur maximale de la contrainte σ_{eq} :

$$\sigma_{eq, \max} = \frac{\sigma_e}{2} \quad (2.34)$$

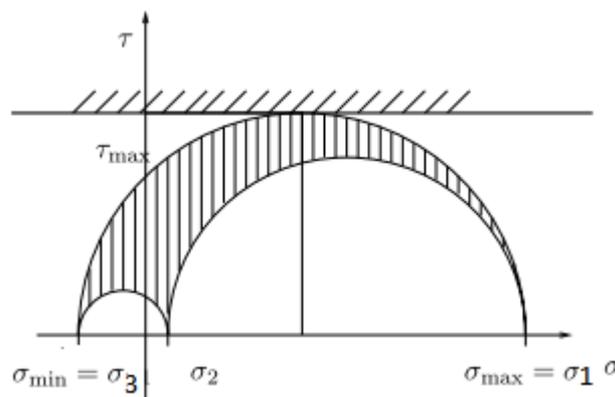


Fig.2.16- La contrainte dans le plan de Mohr

Ainsi,

Le critère de Tresca s'écrit :

$$\max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| < \sigma_e \quad (2.35)$$

Autrement dit, la contrainte équivalente de Tresca est égale à :

$$\sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| \quad (2.36)$$

Pour un problème plan (σ_1, σ_2) avec $\sigma_3 = 0$.

$$\sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (2.37)$$

B)- Critère de Von Mises (Critère énergétique)

Le critère de Von Mises s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} < \sigma_e \quad (2.38)$$

Autrement dit, la contrainte équivalente de Von Mises est égale à :

$$\sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.39)$$

ou encore

$$\sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \quad (2.40)$$

Pour un état de contraintes planes quelconque (correspondant à $\sigma_3 = 0$) on a

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \quad (2.41)$$

et que pour un état de contraintes spatiales quelconque

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} \quad (2.42)$$

- Comparaison des critères de Tresca et de Von Mises

Pour toute cette section, on supposera donc que σ_e est strictement positif.

On donne le lemme suivant : Pour tout $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (2.43)$$

Remarquons qu'en majorant naïvement, chacun des carrés par le maximum, on aurait

$$\sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i - \sigma_j| \quad (2.44)$$

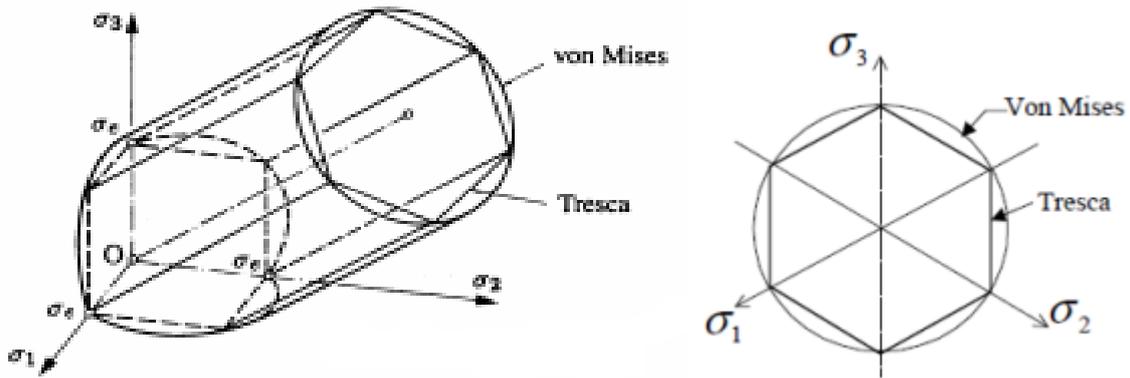


Fig.2.17- Critères de Von Mises et Tresca dans le plan des contraintes

Le critère de *Tresca* est plus *sévère* que celui de *Von Mises*, l'*écart maximal* entre les deux critères est $1 - \sqrt{3}/2$ soit un écart de l'ordre de **13%**.

Cela est équivalent à : pour tout $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_e \Rightarrow \sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_e \quad (2.45)$$

Exercice N°1:

Un état de contrainte est défini dans l'espace par les valeurs suivantes :

$$\sigma_x = -100 \text{ Mpa} ; \sigma_y = 150 \text{ Mpa} ; \sigma_z = 50 \text{ Mpa} ; \tau_{xy} = \tau_{yx} = 65 \text{ Mpa} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} = 80 \text{ Mpa} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} = 25 \text{ Mpa}.$$

1°)- Déterminer les contraintes principales en un point du corps après avoir écrit le tenseur des contraintes.

Solution :

Tenseur des contraintes :

$$[T] = \begin{pmatrix} -100 & 65 & 80 \\ 65 & 150 & 25 \\ 80 & 25 & 50 \end{pmatrix} \text{ (Mpa)}$$

L'équation du troisième degré, correspondant à cet état de contrainte, s'écrit :

$$\sigma_3 - 100\sigma_2 - 23750\sigma + 1598750 = 0.$$

La solution de l'équation cubique ou la recherche des valeurs propres du tenseur de contrainte donne les trois contraintes principales, soit pour des grandeurs arrondies à **0,1** près :

$$\sigma_1 = 182,2 \text{ Mpa}.$$

$$\sigma_2 = 61,2 \text{ Mpa}.$$

$$\sigma_3 = -143,4 \text{ Mpa}.$$

Exercice N°2 :

Considérons les trois états plans de contrainte ci-dessous (**figure 1**). Les axes sont principaux. Les contraintes sont en MPa.

1°)- Ecrire les matrices relatives à ces trois états de contrainte.

2°)- D'après le critère de VON MISES, quel est l'état de contrainte le plus dangereux ?

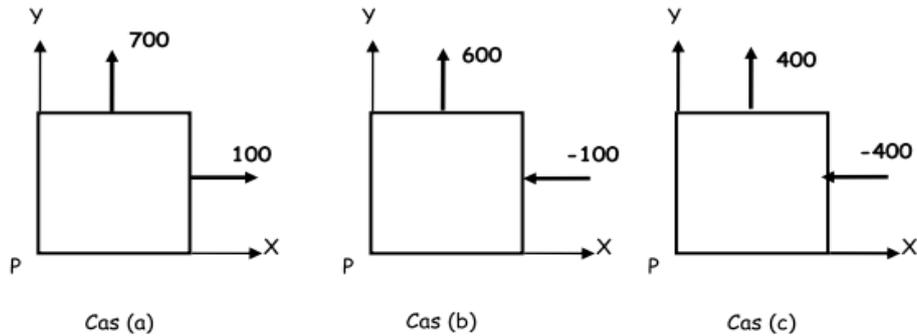


Figure 1

Solution :

$$[\sigma]_{XYZ}^{P(a)} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa ; [\sigma]_{XYZ}^{P(b)} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa ; [\sigma]_{XYZ}^{P(c)} = \begin{bmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

La contrainte $\sigma_{\text{équi}}^{VM}$ en 2D compte tenu que dans les 3cas $\sigma_z=0$ s'écrit : $\sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$

$$\sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{100^2 + 700^2 - 100 \cdot 700} ; \sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{100^2 + 600^2 + 100 \cdot 600} ; \sigma_{\text{équi}}^{VM} = \sqrt{400^2 + 400^2 + 400 \cdot 400}$$

$$\sigma_{\text{équi}}^{VM(a)} = 655,74 MPa \quad \sigma_{\text{équi}}^{VM(b)} = 655,74 MPa \quad \sigma_{\text{équi}}^{VM(c)} = 692,82 MPa$$

L'état de contrainte le plus dangereux, au sens de VON MISES, est donc le cas (c) .

CHAPITRE 3

THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATION

Chapitre 3

«Théorie de l'état de déformation»

3.1. Introduction

La théorie de l'état de déformation est un concept utilisé principalement en mécanique des solides déformables pour décrire le comportement d'un solide ou bien d'un matériau soumis à des charges externes, ce qui entraîne une déformation. Cette théorie vise à comprendre et à prédire le comportement des solides déformables en analysant l'état de déformation au sein de la matière.

La théorie de l'état de déformation s'intéresse aux changements de forme et de taille d'un solide sous l'influence de forces extérieures. Elle explore les relations entre les contraintes (forces appliquées par unité de surface) et les déformations (changements de forme et de taille) subies par le solide.

3.2. Les déformations locales

L'état local de déformation fait référence aux changements de forme et de taille qui se produisent à un niveau microscopique ou infinitésimal à l'intérieur d'un matériau. Il est souvent étudié dans le contexte de la mécanique des matériaux et de la déformation des solides. Les déformations provoquant des variations de longueur et des distorsions angulaires caractérisent les changements de forme.

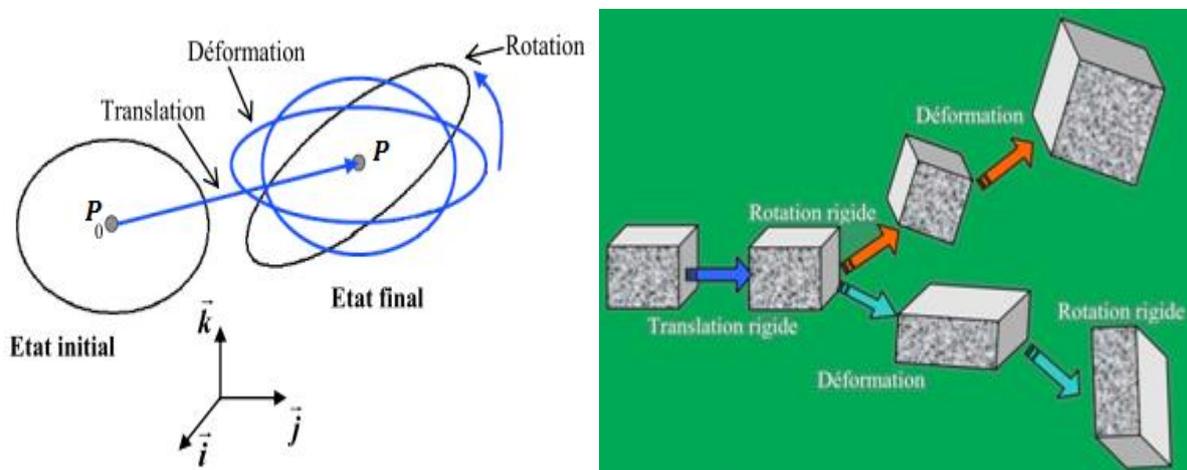


Fig.3.1- Transition d'un petit élément de matière de l'état initial à l'état final

La transformation géométrique qui décrit le passage d'un petit élément de matière de l'état initial à l'état final se décompose en translation, rotation et déformation, comme illustré dans la figure 3.1.

3.2.1. Cas d'une barre soumise à un effort de traction

Soit une barre de longueur l_0 (en matériau homogène) soumise à un effort de traction \vec{F} (voir la figure 3.2).

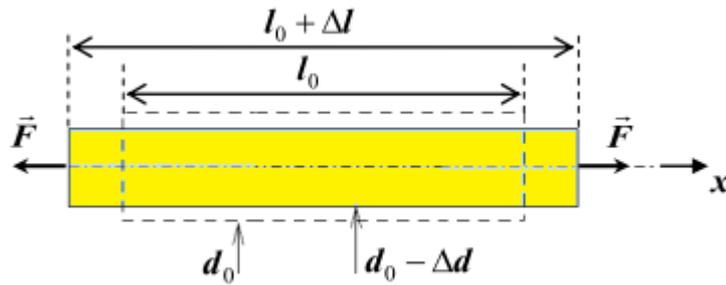


Fig.3.2- Barre soumise à un effort de traction

La déformation relative ou extension :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (3.1)$$

La variation relative de diamètre correspond à la déformation transverse :

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{d_0 - d}{d_0} \quad (3.2)$$

Le comportement du matériau est élastique linéaire, cela est exprimé par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{Tant que : } \frac{F}{S} \leq \sigma_e \quad (3.3)$$

Avec : S est l'aire de la section droite, σ_e est la contrainte de la limite d'élasticité et E est le module d'Young.

3.3. Etat des déformations en un point

Si l'on associe au solide au repos 3 points M , N et P qui deviennent M' , N' et P' dans la configuration déformée, on remarque qu'une déformation s'accompagne de variations de longueur et de variations d'angle, soit :

$$\|\vec{MN}\| \neq \|\vec{M'N'}\| \quad \text{et} \quad \widehat{PMN} \neq \widehat{P'M'N'} \quad (3.4)$$

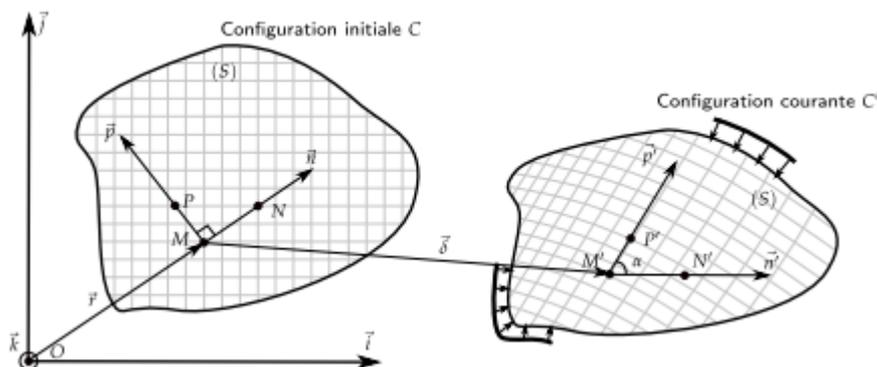


Fig.3.3- Transformation d'un point et d'un vecteur

La position du point M est décrite par :

$$\vec{OM} = \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

N est un point infiniment proche de M , donc :

$$\vec{ON} = \vec{OM} + \vec{MN} = \vec{r} + d\vec{r} = \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Le vecteur déplacement $\vec{\delta}$ est une fonction continue et dérivable dans l'espace $3D(x, y, z)$, soit :

$$\vec{\delta}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

On peut alors écrire le vecteur déplacement du point N comme :

$$\vec{NN'} = \begin{bmatrix} u(x + dx, y + dy, z + dz) \\ v(x + dx, y + dy, z + dz) \\ w(x + dx, y + dy, z + dz) \end{bmatrix} = \vec{\delta} + d\vec{\delta} = \begin{bmatrix} u + du \\ v + dv \\ w + dw \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.4. Tenseur de déformation

Dans une base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$, le tenseur des déformations est de la forme:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} (\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3) \quad (3.9)$$

Ou

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ de l'équation (3.9) s'écrit aussi :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

3.5. Composantes du tenseur de déformations

Les composantes du tenseur de déformations dépendent du matériau spécifique et des conditions aux limites. En général, le tenseur de déformations a six composantes indépendantes pour un

matériau isotrope en trois dimensions. Ces composantes sont souvent notées $\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{zz}; \gamma_{xy}; \gamma_{xz}; \gamma_{yz}$. Les trois premières composantes ($\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy}; \varepsilon_{zz}$) représentent les déformations normales le long des axes x , y et z , tandis que les trois dernières ($\gamma_{xy}; \gamma_{xz}; \gamma_{yz}$) représentent les déformations de cisaillement le long des plans xy , yz et xz .

3.5.1. Extensions

Le changement de distance entre deux points matériels dans un milieu continu est appelé déformation et comprend généralement à la fois le déplacement et le changement forme.

Les extensions sera définie comme suit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

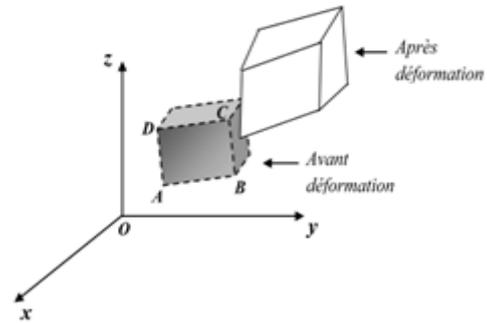


Fig.3.4- Cube infinitésimal avant et après déformation

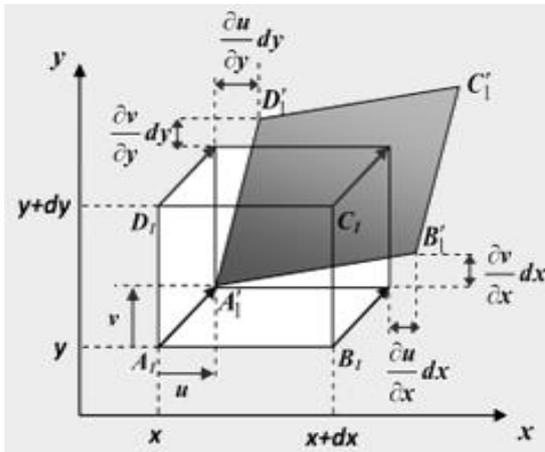


Fig.3.5- Projection sur le plan x-y

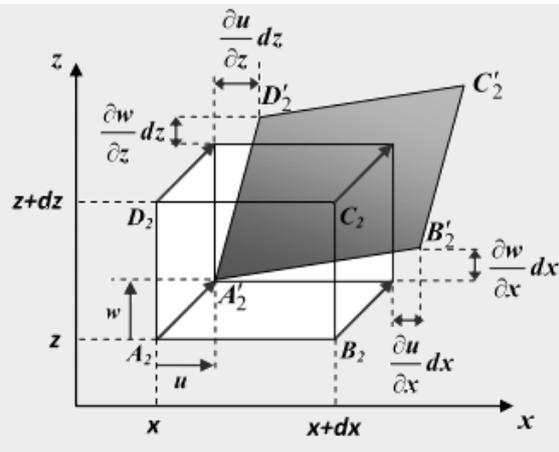


Fig.3.6- Projection sur le plan x-z

Dans le cas des petites déformations les composantes des vecteurs déplacements et leurs dérivées partielles sont des quantités infiniment petites, on peut alors négliger les termes du second ordre par rapport à ceux du premier. Les extensions finales suivant les trois directions du repère d'axe $(O/x, y, z)$:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.12)$$

3.5.2. Distorsions

Les déformations angulaires sont appelées déformations de cisaillement:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varepsilon_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (3.13)$$

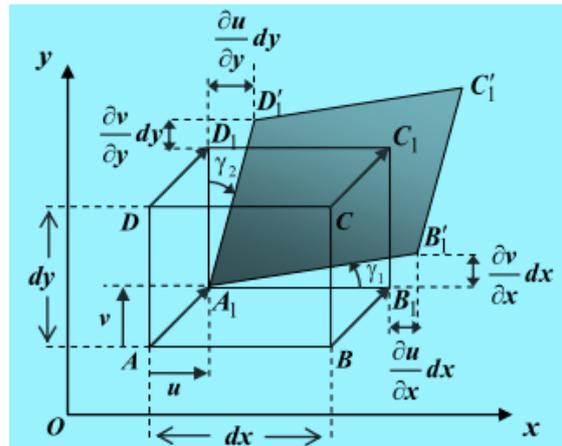


Fig.3.7- Déformation angulaire d'un élément

Le tenseur de déformation est symétrique d'ordre 2 peut exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$[\varepsilon(\mathbf{P})]_{\{P/\bar{x},\bar{y},\bar{z}\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \text{Sym} & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.5.3. Rotations

Les composantes du tenseur de rotation peuvent être assemblées sous la forme suivante :

$$[\omega(\mathbf{P})]_{\{P/\bar{x},\bar{y},\bar{z}\}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

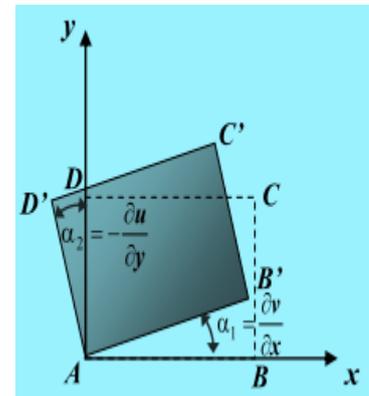


Fig.3.8- Élément plan en rotation autour de l'axe z

3.6. Dilatation volumique

La variation relative de volume ou bien la dilatation volumique au cours des petites déformations est un invariant peut être déterminé comme suit:

$$\varepsilon_v = \frac{dV_f - dV_i}{dV_i} = \frac{(1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) dx dy dz - dx dy dz}{dx dy dz} \quad (3.16)$$

Avec: dV_i : Volume initiale, dV_f : Volume final.

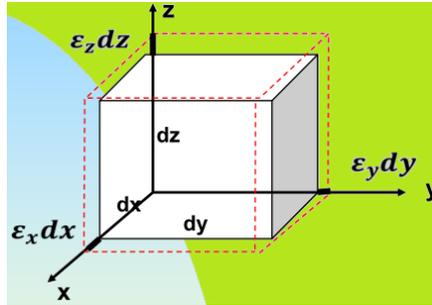


Fig.3.9- Changement de volume et de forme

En négligeant les produits des déformations

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = I_1 = tr[\varepsilon] \quad (3.17)$$

3.7. Déformations et directions principales

Il existe un système d'axes particulier qui représente les "directions propres" de la matrice. Ce repère est appelé le **repère principal** des déformations $(\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III})$.

Dans cette base la matrice représentant l'état de déformation prend une forme diagonale :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} (\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III}) \quad (3.18)$$

Avec: $\varepsilon_I \geq \varepsilon_{II} \geq \varepsilon_{III}$

La détermination des déformations principales passe par la diagonalisation de la matrice des déformations. On doit ainsi rechercher les solutions de l'équation :

$$\det(\varepsilon - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \quad (3.19)$$

Quelque soit le système de référence $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ choisit, on doit trouver les mêmes valeurs de déformations principales. En conséquence les quantités I_1 , I_2 et I_3 ne doivent pas dépendre du système d'axes. Ce sont les **invariants** du tenseur des déformations :

$$I_1 = tr[\varepsilon] = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_2 = (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{13}^2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ik}^2) \quad (3.20)$$

$$I_3 = \det(\varepsilon_{ij})$$

- **Tenseur déviateur des déformations** : Il est toujours possible de mettre le tenseur des déformations sous la forme d'une somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur déviateur de trace nulle :

$$\varepsilon = \varepsilon_m I + s^* \text{ avec } \begin{cases} \text{tr}(s^*) = 0 \\ \varepsilon_m = \frac{I_1}{3} \end{cases} \quad (3.21)$$

$\varepsilon_m I$ est le **tenseur hydrostatique**.

s^* est Le **tenseur déviateur des déformations**:

$$s^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

3.8. Etats des déformations particuliers

3.8.1. Etat de déformations simples

a)- Extension géométrique

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

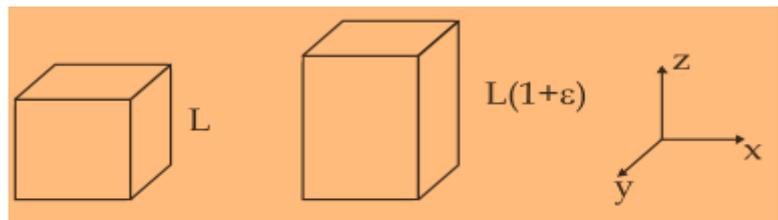


Fig.3.10- Extension géométrique

b)- Expansion

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

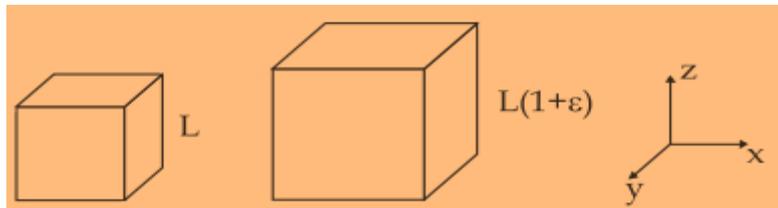


Fig.3.11- Expansion

c)- Cisaillement simple

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{\theta}{2} \quad (3.25)$$

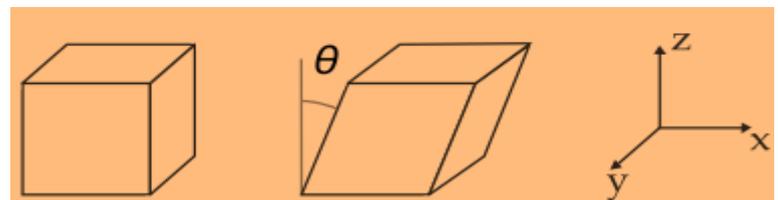


Fig.3.12- Cisaillement simple

d)- Cisaillement pur

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

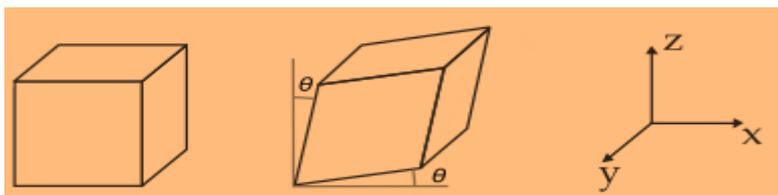


Fig.3.13- Cisaillement pur

3.8.2. Etat de déformations planes

L'état de déformations planes est, parmi les formulations **2D** de la mécanique du solide, la seule formulation qui ne repose sur aucune approximation. Cet état existe par exemple dans un objet contraint dans la direction **z** entre deux parois rigides (aucun déplacement dans la direction **z**).

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Le tenseur des déformations donné par la formule suivante :

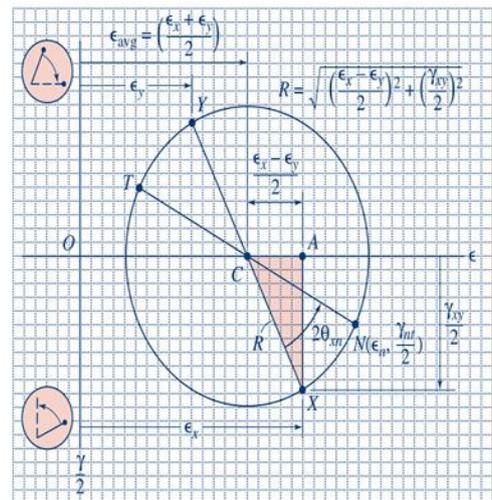
$$[\varepsilon(P)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.9. Représentation graphique de l'état de déformation en un point

Cercle de Mohr – déformations

Transformation des déformations

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \cos 2\theta + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \sin 2\theta \\ \varepsilon_t &= \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) - \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \cos 2\theta - \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \sin 2\theta \\ \frac{\gamma_{nt}}{2} &= -\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) \sin 2\theta + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \cos 2\theta \\ \varepsilon_n + \varepsilon_t &= \varepsilon_x + \varepsilon_y \end{aligned}$$



Cercle de Mohr - déformations principales

Déformations principales (normales)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \varepsilon_{avg.} + R \\ \varepsilon_2 &= \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \varepsilon_{avg.} - R \\ \tan 2\theta_{xp1} &= \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \end{aligned}$$

Déformations principales (cisaillement)

$$\begin{aligned} \gamma_{max} &= -\gamma_{min} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{S1} &= \varepsilon_{S2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

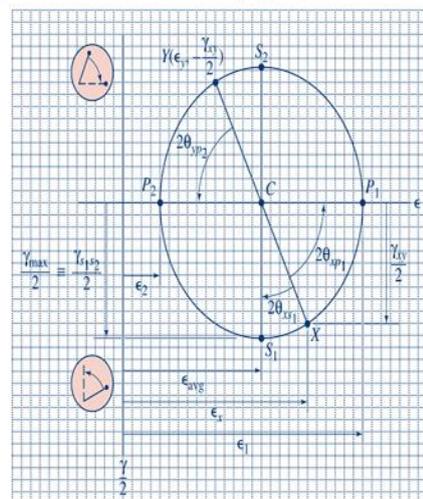


Fig.3.14- Cercle de Mohr pour un état de déformation en un point

3.10. Les équations de compatibilité

Les équations de compatibilité sont un ensemble d'équations mathématiques qui expriment les conditions sous lesquelles une déformation ou un mouvement est compatible avec un matériau ou une structure donnée. Ces équations sont couramment utilisées en génie civil et en mécanique des structures pour analyser le comportement des structures déformables.

En général, les déformations sont obtenues par la dérivation des déplacements. Pour comprendre cela, considérons un matériau sous l'action de forces externes. Les déplacements des points à l'intérieur du matériau, sous l'influence de ces forces, peuvent être mesurés. La déformation est alors définie comme le changement relatif de longueur d'une ligne dans le matériau, qui peut être calculé en dérivant les déplacements par rapport à la position.

Mathématiquement, si $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est la fonction de déplacement en fonction de la position \mathbf{x} , la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être exprimée en termes de la dérivée de \mathbf{u} par rapport à \mathbf{x} : ($\boldsymbol{\varepsilon} = d\mathbf{u}/d\mathbf{x}$).

Cette expression représente la déformation axiale pour une dimension. Dans le cas de déformations bidimensionnelles ou tridimensionnelles, des dérivées partielles sont utilisées pour décrire les déformations dans différentes directions.

Exprimées en fonction des composantes du tenseur de déformations ces conditions nous donnent un système de six équations :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = 0} \quad (3.29)$$

Les équations de compatibilité sont données comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Soit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) &= 0
 \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.11. Mesure de l'état de déformation à la surface d'un corps

Pour mesurer l'état de déformation au point P , on utilise des "jauges de déformation". Ce sont des résistances ($R=120\Omega$) très minces que l'on colle sur la structure au point P .

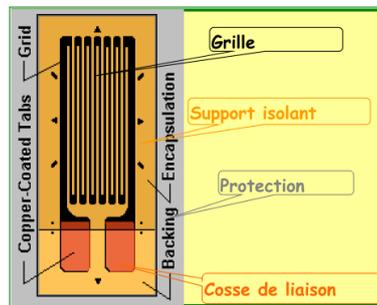


Fig.3.15- Jauge de déformation (extensomètre)

On utilise pour mesurer les dilatations linéaires unitaires des dispositifs appelés "rosettes", constituées de trois jauges collées sur le même support et espacées angulairement de 45° ou 120° .



Fig.3.16- Types des Rosettes

A la surface d'un corps la matrice des déformations s'écrit :

$$[\varepsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La déformation ε_{zz} n'est pas indépendante. Elle vaut :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (3.33)$$

On effectue une troisième mesure de dilatation linéaire unitaire dans le plan xy suivant un axe h .

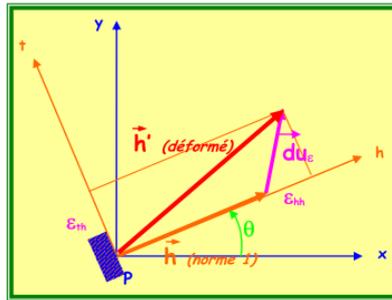


Fig.3.17- Dilatation linéaire unitaire dans le plan xy suivant un axe h

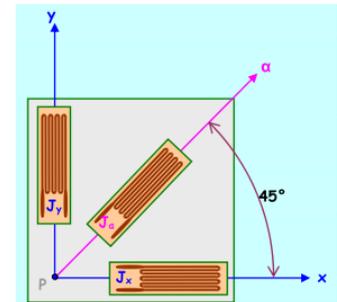
La dilatation linéaire unitaire ϵ_{hh} suivant l'axe h se calcule par :

$$\epsilon_{hh} = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \epsilon_{xy} \sin 2\theta \quad (3.34)$$

Exercice :

On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'applique aucune force extérieure. Les résultats enregistrés sur chaque jauge d'une rosette à 45° collée dans le plan tangent en P sont respectivement : jauge J_1 : $950 \mu d$; jauge J_α : $-175 \mu d$; jauge J_2 : $-475 \mu d$.

- 1°)- Quels sont les éléments principaux de la déformation ?
- 2°)- Dans quelle direction α' enregistrerait-on une dilatation linéaire nulle ?
- 3°)- Dans quel système d'axes enregistrerait-on une distorsion extremum ?



Solution:

Le point P se situant à la surface d'un corps où ne s'applique aucune force extérieure, la forme de la matrice des déformations est la suivante :

$$[\epsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Les jauges J_x et J_y mesurent respectivement les dilatations linéaires unitaires ϵ_{xx} et ϵ_{yy} .

La demi-distorsion angulaire ϵ_{xy} est déterminée indirectement par la troisième jauge J_α .

La dilatation linéaire est calculée par les lois de comportement et nécessite la connaissance du coefficient de Poisson.

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} 950 & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & -475 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$$

Pour calculer ε_{xy} , utilisons la relation suivante (en faisant coïncider h avec α).

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{xy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{aa} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 90 + \varepsilon_{xy} \sin 90 \quad \varepsilon_{aa} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{aa} - \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \quad \varepsilon_{xy} = -175 - \frac{950 - 475}{2} \quad \varepsilon_{xy} = -412,5 \cdot 10^{-6}$$

$$[\varepsilon]_{xyz}^p = \begin{bmatrix} 950 & -412,5 & 0 \\ -412,5 & -475 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \mu d$$

Éléments principaux de la déformation :

La direction z perpendiculaire au plan où est collée la rosette est principale.

Nous recherchons donc les directions propres, et les valeurs propres dans le plan de la rosette xy .

Les 2 autres valeurs propres sont données par :

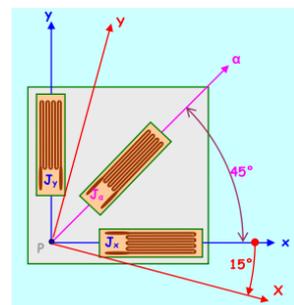
$$\varepsilon_x^y = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} \quad \varepsilon_x^y = \frac{950 - 475}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(950 + 475)^2 + 4 \times 412,5^2}$$

$$\varepsilon_x = 1061 \mu d \quad \varepsilon_y = -586 \mu d$$

La direction propre X est calculée par :

$$\tan \varphi = \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = \frac{1061 - 950}{-412,5} \approx 0,269$$

d'où $\hat{\varphi} = -15^\circ = (\vec{x}, \vec{X})$



$$[\varepsilon]_{XYZ}^p = \begin{bmatrix} 1061 & 0 & 0 \\ 0 & -586 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \mu d$$

Cherchons la direction α' pour laquelle on enregistrerait une dilatation linéaire nulle :

$$\varepsilon_{hh} = \frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{2} + \frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2} \cos 2\psi = 0 ;$$

$$\cos 2\psi = -\frac{\varepsilon_X + \varepsilon_Y}{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}$$

$$\cos 2\psi = -\frac{1061 - 586}{1061 + 586} \approx -0,288$$

$$\psi \approx \pm 53^\circ 4$$

Cherchons le système d'axes pour lequel on enregistrerait une distorsion extremum :

$$(\gamma_{th})_{\max i} = (2\varepsilon_{th})_{\max i}$$

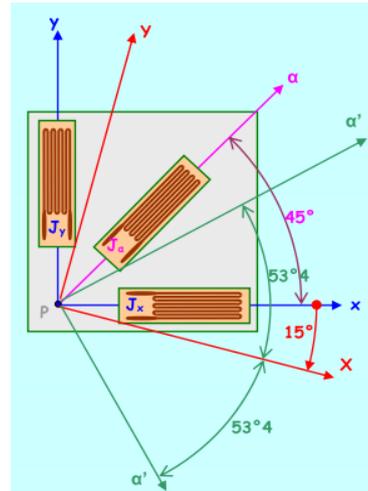
$$\varepsilon_{th} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{xy} \cos 2\theta$$

Dans les axes principaux, la relation devient :

$$\varepsilon_{th} = -\frac{\varepsilon_X - \varepsilon_Y}{2} \sin 2\psi$$

ε_{th} est maximum pour $\sin 2\psi$ maxi

$$\sin 2\psi = \pm 1 \quad \psi = \pm 45^\circ$$



CHAPITRE 4

**RELATION ENTRE LES CONTRAINTES ET
LES DÉFORMATIONS ET LOIS DE
COMPORTEMENT**

Chapitre 4

«Relation entre les contraintes et les déformations et lois de comportement»

4.1. Introduction

La relation entre les contraintes et les déformations, ainsi que les lois de comportement associées, est fondamentale en mécanique des solides déformables. Ces concepts sont utilisés pour comprendre le comportement des solides et des matériaux sous l'influence des forces externes. Les lois de comportement fournissent des outils mathématiques pour modéliser ces relations.

4.2. Lois de comportement

Les lois de comportement décrivent la manière dont les solides et les matériaux réagissent aux contraintes appliquées et comment ils se déforment en conséquence. Il existe différentes lois de comportement pour différents types de matériaux.

4.2.1. Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke classique s'applique aux matériaux élastiques et linéaires avec des petites perturbations. Elle énonce que la déformation est directement proportionnelle à la contrainte appliquée. Le cas le plus simple qui illustre la déformation élastique est celui des ressorts ou la force appliquée sur le ressort est proportionnelle à l'allongement obtenu.

On considère le cas d'un essai de traction classique consiste à soumettre une éprouvette de forme cylindrique à une charge axiale de traction.

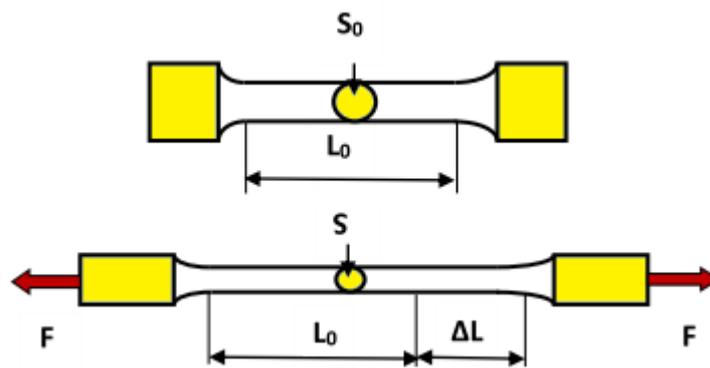


Fig.4.1- Essai de traction

Mathématiquement, cela se représente par l'équation:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (4.1)$$

Où E est le module de Young, une propriété du matériau.

La contrainte σ_{xx} augmente de façon continue et linéaire avec la déformation ε_{xx} .

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (4.2)$$

Les déformations (ϵ_{yy} et ϵ_{zz}) sont proportionnelles à ϵ_{xx} et définit par la relation suivante :

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu\epsilon_{xx} \quad (4.3)$$

Où ν est le coefficient de Poisson.

La loi de Hooke généralisée est une extension de la loi de Hooke classique pour prendre en compte des situations plus complexes. Elle peut inclure des formes tensorielles pour traiter des déformations dans différentes directions, ce qui est particulièrement important pour les matériaux anisotropes. Elle peut également intégrer des termes non linéaires pour modéliser des comportements élastiques non linéaires, par exemple, lorsque des déformations importantes sont impliquées. La loi de Hooke généralisée, qui exprime le tenseur des petites déformations ϵ_{ij} en fonction du tenseur des contraintes σ_{ij} d'un matériau isotrope linéaire élastique s'écrit :

$$[\epsilon(M)] = \frac{1+\nu}{E} [\sigma(M)] - \frac{\nu s}{E} [I] \quad \text{Avec : } s = \text{tr}[\sigma(M)] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (4.4)$$

Ou bien sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Avec :

G est appelé le module de glissement ou de cisaillement (Module de Coulomb) donnée par :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.6)$$

4.2.2. Matériau élastique homogène orthotrope

Un matériau élastique homogène orthotrope est un type de matériau qui a des propriétés élastiques différentes selon trois directions orthogonales mutuellement perpendiculaires. Cela signifie que le matériau présente une anisotropie élastique, avec des modules élastiques distincts dans chaque direction. La nature orthotrope du matériau implique que les propriétés élastiques varient dans les trois directions principales.

Le tenseur des modules d'élasticité pour un matériau élastique homogène orthotrope peut être représenté comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Ou :

E_1 , E_2 , et E_3 sont les modules d'élasticité dans les directions principales, ν_{ij} sont les coefficients de Poisson et G_{ij} sont les modules de cisaillement.

4.2.3. Matériau élastique homogène isotrope transverse

Un matériau homogène isotrope transverse est tel que la matrice de comportement est invariante par toute rotation autour d'un axe privilégié. Si vous faites référence à un matériau élastique homogène isotrope avec une direction spécifique considérée comme transverse, cela implique que le matériau est isotrope dans toutes les directions sauf dans la direction transverse.

Le tenseur des modules d'élasticité pour un matériau élastique homogène isotrope transverse peut être représenté comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{12})}{E_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

4.2.4. La loi de comportement d'élasticité plane

La loi de comportement d'élasticité plane, aussi appelée loi de Hooke plane, est une relation fondamentale utilisée en mécanique des matériaux pour décrire le comportement élastique des matériaux dans le plan. Elle est généralement appliquée aux matériaux isotropes, c'est-à-dire des matériaux dont les propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions.

La loi de Hooke plane relie les contraintes et les déformations dans un matériau élastique sous l'hypothèse de petites déformations. Elle peut être exprimée mathématiquement comme suit :

a)- Contraintes planes

Les tenseurs de déformations et des contraintes correspondent à cet état sont :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

En utilisant les lois de comportement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{-\nu}{E} [\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] = -\frac{\nu}{1-\nu} [\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (4.10)$$

b)- Déformations planes

Les tenseurs de déformations et des contraintes correspondent à cet état sont :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

En utilisant les lois de comportement :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}] \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\
 \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}] \\
 \sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \\
 \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.3. Influence de la Température

Sous l'effet de la température, les éléments d'un corps se dilatent. Supposons un petit élément découpé dans un corps soumis à des changements de température. Si la variation de température est continue à travers le volume du corps, la température du petit élément peut être considérée comme uniforme.

Si on désigne par « ΔT » le changement de température et par « α » le coefficient de dilatation thermique linéaire du solide, les composantes de la déformation produite par le changement de température seront:

$$\varepsilon_x^T = \varepsilon_y^T = \varepsilon_z^T = \alpha \Delta T \quad \text{et} \quad \gamma_{xy}^T = \gamma_{xz}^T = \gamma_{yz}^T = 0 \tag{4.13}$$

Ces équations de déformations ont été trouvées par Duhamel et Newman.

Ainsi, si un corps quelconque est soumis en même temps aux charges extérieures et au changement de température, on peut superposer les effets et écrire que:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha \Delta T \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

En inversant les équations (4.14) on trouve les contraintes en fonction des déformations dans le cas des charges extérieures et de la température. Soit:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda \cdot \varepsilon_V + 2G \cdot \varepsilon_{xx} - (3\lambda + 2G)\alpha \cdot \Delta T \\ \sigma_{yy} &= \lambda \cdot \varepsilon_V + 2G \cdot \varepsilon_{yy} - (3\lambda + 2G)\alpha \cdot \Delta T \\ \sigma_{zz} &= \lambda \cdot \varepsilon_V + 2G \cdot \varepsilon_{zz} - (3\lambda + 2G)\alpha \cdot \Delta T \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \quad ; \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad ; \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}\end{aligned} \quad (4.15)$$

Avec :

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left[(1 - 2\nu) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \quad (4.16)$$

4.4. Energie de déformation

L'énergie de déformation élastique, également appelée énergie élastique, se réfère à l'énergie stockée dans un matériau lorsqu'il subit une déformation élastique réversible. Lorsqu'un matériau subit une déformation élastique, il emmagasine de l'énergie sous forme de contrainte. Cette énergie potentielle élastique est libérée lorsque la contrainte est supprimée, et le matériau revient à sa forme d'origine. L'énergie de déformation élastique peut être exprimée mathématiquement à l'aide de la loi de Hooke, qui décrit la relation linéaire entre la contrainte (force appliquée par unité de surface) et la déformation (changement de forme) dans la phase élastique.

La formule mathématique associée à l'énergie de déformation élastique (W_d) peut être exprimée comme suit :

Energie de déformation = Travail des forces extérieures (W_{ext}) + Travail des forces intérieures (W_{int}).

$$W_d = W_{ext} = -W_{int} \quad (4.17)$$

4.4.1. Principe de conservation d'énergie

Hypothèses :

1. Effets thermiques négligés (déformation isotherme) ;
2. Dissipation interne négligée (amortissement) ;
3. Action extérieure appliquée lentement (effets d'inertie négligés).

Travail des actions extérieures appliquées au système = Energie de déformation élastique (stockée).

$$W_{ext} = E_d \quad (4.18)$$

Exemple : cas d'une sollicitation de traction

Le travail de traction donné comme suit :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} F \cdot x \quad (4.19)$$

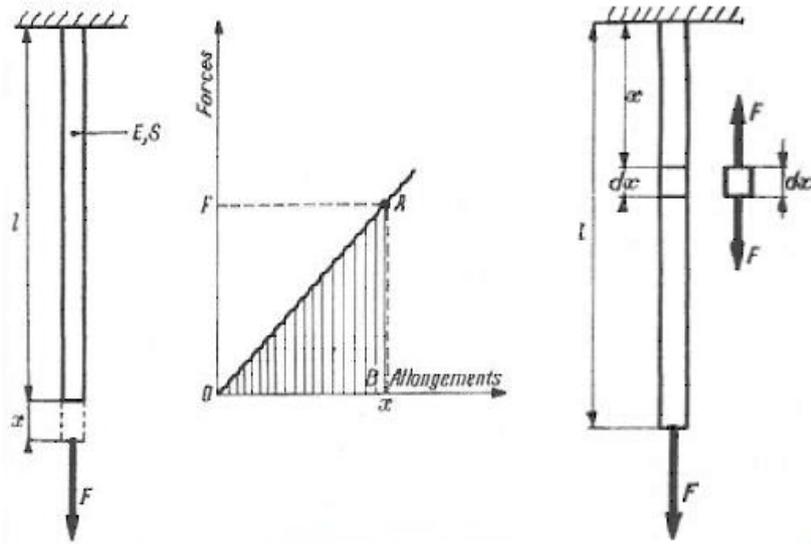


Fig.4.2- cas d'une sollicitation de traction

Soit $\Delta(dx)$ allongement du tronçon dx .

Selon la loi de Hooke on a :

$$\Delta(dx) = \frac{F \cdot dx}{E \cdot S} \quad (4.20)$$

L'énergie de déformation élémentaire donnée par :

$$dW_d = \frac{1}{2} F \cdot \Delta(dx) = \frac{1}{2} \frac{F^2}{E \cdot S} dx \Rightarrow W_d = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2}{E \cdot S} dx \quad (4.21)$$

D'une manière générale :

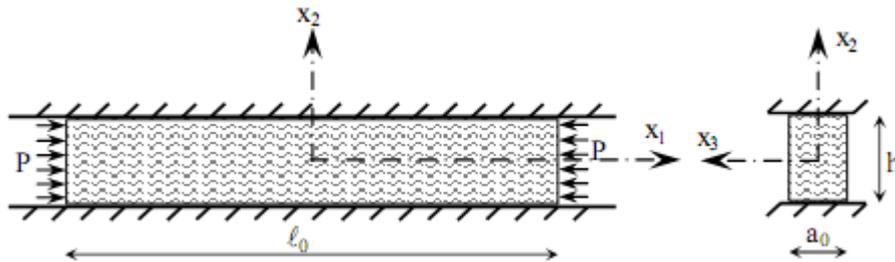
$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F}{S} \frac{F}{E \cdot S} S \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} S \cdot dx = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (4.22)$$



$$W_d = \underbrace{\frac{1}{2E} \int \frac{N^2}{S} dx}_{\text{effort normal}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \int \frac{T_y^2}{S} dx}_{\text{effort tranchant}} + \underbrace{\frac{1}{2E} \int \frac{M_z^2}{I_z} dx}_{\text{moment fléchissant}} + \underbrace{\frac{1}{2\mu} \int \frac{M_x^2}{I_o} dx}_{\text{moment de torsion}}$$

Exercice

Une plaque de hauteur h et de faible épaisseur $a_0 = 10 \text{ cm}$ devant une longueur $\ell_0 = 243 \text{ cm}$, est confinée entre deux solides infiniment rigides et soumise à une pression uniforme P tel que montré sur la figure ci-dessous.



- 1)- Quelles sont les composantes nulles des tenseurs des contraintes et des déformations ?
- 2)- Si on suppose que le matériau de la plaque est élastique et isotrope avec un module d'élasticité E et un coefficient de Poisson ν , déterminer en fonction de P , E et ν les composantes non nulles des deux tenseurs ?
- 3)- Déterminer, en fonction de E , ν et des coordonnées (x_1, x_2, x_3) , les expressions des composantes u_1, u_2 et u_3 du champ des déplacements ?
- 4)- Si $E = 150 \text{ Mpa}$ et $\nu = 0.36$, calculer la pression P nécessaire pour réduire la longueur de la plaque à $\ell = 200 \text{ cm}$?
- 5)- Que devient alors la nouvelle épaisseur a de la plaque ?

Solution :

1) Les composantes nulles :

Les composantes de cisaillement et de glissement

$\epsilon_{22} = 0$ empêché par les deux solides

$\sigma_{33} = 0$ la plaque est libre de se dilater sur son épaisseur

2) Les composantes non nulles :

La pression est uniforme $\sigma_{11} = -P$; c'est une compression

σ_{22} fonction de σ_{11} et ν

On a $\epsilon_{ij} = [(1+\nu)/E] \cdot \sigma_{ij} - (\nu/E) \cdot \text{trace}(\sigma) \cdot I$

$\epsilon_{11} = \sigma_{11}/E - (\nu/E) \sigma_{22}$

$\epsilon_{22} = \sigma_{22}/E - (\nu/E) \sigma_{11} = 0$ donne $\sigma_{22} = \nu \sigma_{11} = -\nu P$

$\epsilon_{33} = \sigma_{33}/E - \nu/E (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\nu \sigma_{11} (1 + \nu)/E = \nu (1 + \nu) P/E$ et $\epsilon_{11} = - (P/E) \cdot (1 - \nu^2)$

3) Déplacements:

$u_1 = \int \epsilon_{11} dx_1 = - (P/E) (1 - \nu^2) x_1$ ne dépend pas des autres directions puisque pas de glissement.

$$u_2 = \int \varepsilon_{22} dx_2 = 0$$

$$u_3 = \int \varepsilon_{33} dx_3 = (P/E) \nu (1 + \nu) x_3$$

4) Pression :

$$\text{La déformation : } \varepsilon_{11} = \Delta l / l_0 = (200 - 243) / 243 = -0.177 = -17.7 \%$$

$$\text{D'où : } P = E \varepsilon_{11} / (1 - \nu^2) = 30.49 \cong 30.5 \text{ MPa}$$

5) Epaisseur finale :

$$\varepsilon_{33} = \nu (1 + \nu) P / E = 0.099 = 9.9 \% \text{ d'où } a = a_0 (1 + \varepsilon_{33}) \cong 11 \text{ cm.}$$

CHAPITRE 5

EQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Chapitre 5

«Equations générales de l'élasticité linéaire»

5.1. Introduction

Les équations générales de l'élasticité linéaire peuvent être exprimées en termes de contraintes et de déformations. Les équations de Lamé, les équations de Beltrami-Michell et le principe de Saint-Venant sont des concepts distincts liés au domaine de l'élasticité, chacun avec ses propres formulations et applications spécifiques.

Chacun de ces concepts peut être formulé mathématiquement en fonction des propriétés spécifiques du matériau et des conditions aux limites du problème particulier. Les équations de l'élasticité linéaire sont généralement des équations différentielles partielles qui peuvent être résolues pour obtenir les champs de déplacement, de contrainte et de déformation dans le matériau.

5.2. Equations de Lamé

L'équation de Lamé est une équation qui est utilisée pour décrire le comportement élastique isotrope tridimensionnel d'un matériau. Elle est souvent utilisée dans le contexte de la théorie linéaire de l'élasticité. Pour un matériau isotrope, les propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions.

L'équation de Lamé (La loi de Hooke inverse), qui exprime la relation entre les contraintes σ_{ij} et les déformations ε_{ij} d'un matériau isotrope linéaire élastique s'écrit :

$$[\sigma(\mathbf{M})] = \lambda \text{tr}[\varepsilon(\mathbf{M})][\mathbf{I}] + 2\mu[\varepsilon(\mathbf{M})] \quad (5.1)$$

Ou bien sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{G} + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mathbf{G} + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mathbf{G} + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Ces constantes sont liées au module d'Young et le coefficient de Poisson par les relations :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \mathbf{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.3)$$

Avec : μ (ou bien \mathbf{G}) est appelé le module de cisaillement.

Le but de la solution de Lamé (résolution en déplacements) est d'exprimer les équations différentielles d'équilibre en fonction des déplacements u , v et w .

Pour cela: en utilisant les équations de Lamé (5.2) en les remplaçant dans les équations d'équilibre (2.20, voir chapitre 2) et après des opérations mathématiques intermédiaires, on obtient les équations finales de Lamé:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u + F_x &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v + F_y &= 0 \quad (5.4) \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w + F_z &= 0 \end{aligned}$$

Avec:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \text{Laplacien : } \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Sous l'effet de la température,

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\alpha E}{(1-2\nu)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} + F_x &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v - \frac{\alpha E}{(1-2\nu)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial y} + F_y &= 0 \quad (5.6) \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w - \frac{\alpha E}{(1-2\nu)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned}$$

5.3. Équations de Beltrami-Michell

Les équations de Beltrami-Michell sont une formulation alternative des équations de l'élasticité linéaire. Elles sont basées sur le potentiel de déformation élastique et sont utilisées pour décrire les champs de déplacement élastique. Ces équations expriment les relations entre les déformations et les déplacements élastiques.

Le but de la solution de Beltrami Michel (résolution en contraintes) est d'exprimer les 15 équations de l'élasticité en contrainte uniquement.

Pour commencer on dérive les équations (5.4) respectivement par rapport à x , y et z et on suppose que **les forces de volume sont constantes ($F_i = \text{constante}$)**.

$$\begin{aligned}
 (\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + G \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) &= 0 \\
 (\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + G \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) &= 0 \quad (5.7) \\
 (\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} + G \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 w) &= 0
 \end{aligned}$$

En additionnant les équations (5.7) membre à membre on aura:

Lorsque **les forces de volume sont constantes**, le **Laplacien** de la déformation volumique est **nul**.

$$\begin{aligned}
 (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} \right) + G \cdot \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \quad (5.8) \\
 (\lambda + 2G) \cdot \nabla^2 \varepsilon_v = 0 \quad ; \quad \nabla^2 \varepsilon_v = 0
 \end{aligned}$$

Il faut donc transformer les déformations des équations (5.7) en contraintes. Pour cela on utilise les équations de lamé (5.2). En appliquant le Laplacien à ces équations on aura:

$$\begin{cases} \nabla^2(\sigma_{xx}) = \lambda \cdot \nabla^2(\varepsilon_v) + 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{xx}) \\ \nabla^2(\sigma_{yy}) = \lambda \cdot \nabla^2(\varepsilon_v) + 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{yy}) \\ \nabla^2(\sigma_{zz}) = \lambda \cdot \nabla^2(\varepsilon_v) + 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{zz}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2(\sigma_{xx}) = 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{xx}) \\ \nabla^2(\sigma_{yy}) = 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{yy}) \\ \nabla^2(\sigma_{zz}) = 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{zz}) \end{cases} \quad (5.9)$$

Or d'après la loi de Hooke générale, on a:

$$\theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = (3\lambda + 2G) \cdot \varepsilon_v \Rightarrow \varepsilon_v = \frac{\theta}{(3\lambda + 2G)} \quad (5.10)$$

On dérive l'équation (5.10) deux fois par rapport à x, y et z, on aura :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (5.11) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} &= \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

Il faut maintenant remplacer (5.9) et (5.11) dans (5.7). On aura les équations de Beltrami-michel:

$$\begin{aligned}
 (1 + \nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{xx}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad (1 + \nu) \cdot \nabla^2(\tau_{xy}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = 0 \\
 (1 + \nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{yy}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad (1 + \nu) \cdot \nabla^2(\tau_{xz}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} = 0 \quad (5.12) \\
 (1 + \nu) \cdot \nabla^2(\sigma_{zz}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad ; \quad (1 + \nu) \cdot \nabla^2(\tau_{yz}) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0
 \end{aligned}$$

5.4. Principe de Saint-Venant

Le principe de Saint-Venant est un principe de l'élasticité linéaire qui stipule que les effets de la répartition initiale des contraintes sur une petite région d'un matériau s'estompent à mesure que l'on s'éloigne de cette région. En d'autres termes, à une distance suffisamment grande de la zone d'application de la charge, le comportement élastique d'un matériau est essentiellement déterminé par les conditions aux limites plutôt que par les détails locaux.

Les équations de compatibilité de Saint-Venant sont un ensemble d'équations qui décrivent la compatibilité des déformations dans un matériau élastique. Ces équations portent le nom du mathématicien et ingénieur français Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, qui a formulé ces relations.

Dans la théorie mathématique de l'élasticité, la condition de compatibilité de Saint-Venant définit la relation entre la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et un champ de déplacement \boldsymbol{u} par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) ; \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (5.13)$$

Pour les champs tensoriels d'ordre 2, reprenons les équations de compatibilité de Saint-Venant écrites sous forme indicielle :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0 ; \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_{kk} = \text{trace}[\boldsymbol{\varepsilon}]$$

Avec :

L'indice muet k est répété et indique donc une sommation.

Les deux indices non répétés i et j varient chacun de **1** à **3**.

Exercice:

Les trois expressions des composantes de déplacement \boldsymbol{U} , \boldsymbol{V} et \boldsymbol{W} en un point \boldsymbol{P} d'un solide élastique sont données par :

$$\begin{cases} U = \frac{5}{4} k x - \frac{1}{3} k y \\ V = \frac{1}{4} k x - \frac{\sqrt{7}}{4} k y \\ W = 0 \end{cases} \quad \text{Avec } k \text{ est une constante non nulle.}$$

On considère que le solide à un comportement linéaire isotrope défini par le module de Young $E = 210000 \text{ MPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.25$.

- 1)- Déterminer le tenseur de déformation $[\boldsymbol{\varepsilon}]$?
 2)- Déterminer le tenseur de contrainte $[\boldsymbol{\sigma}]$?

Solution:

Le champ de déplacement:

$$\begin{cases} U = \frac{5}{4}kx - \frac{1}{3}ky \\ V = \frac{1}{4}kx - \frac{\sqrt{7}}{4}ky \\ W = 0 \end{cases} \quad \text{Avec } k \text{ est une constante non nulle.}$$

- 1)- Le tenseur de déformation $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ peut exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{P})]_{\{P|\bar{x},\bar{y},\bar{z}\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \text{Sym} & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Donc

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}k & -\frac{1}{12}k & 0 \\ -\frac{1}{12}k & -\frac{\sqrt{7}}{4}k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2)- Le tenseur de contrainte $[\boldsymbol{\sigma}]$, La formule de l'équation de contraintes est donnée par :

$$[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})] = \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M})][\mathbf{I}] + 2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M})]$$

Où les coefficients de Lamé du matériau sont :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = 21000k \cdot \begin{pmatrix} (15 + \sqrt{7}) & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & (5 - 3\sqrt{7}) & 0 \\ 0 & 0 & (5 - \sqrt{7}) \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 6:
RÉSOLUTION DES PROBLÈMES
D'ÉLASTICITÉ PLANE

Chapitre 6

« Résolution des problèmes d'élasticité plane »

6.1. Introduction

La résolution des problèmes d'élasticité plane est un domaine de la mécanique des structures et des solides déformables qui étudie le comportement des matériaux élastiques bidimensionnels soumis à des charges. Ces problèmes sont souvent résolus en utilisant les équations de l'élasticité plane, qui sont dérivées à partir des lois de Hooke.

6.2. Problème de déformations planes

Si on considère un cas pour lequel le déplacement w est nul et les déplacements u, v sont indépendants de z . Il s'ensuit que pour la déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) ; \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (6.1)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (6.2)$$

$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ indépendant de z ce qui définit un état de déformation plane.

Selon la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (6.3)$$

Le matériau n'est pas libre de se déformer selon z , la contrainte est donnée par :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (6.4)$$

Les tenseurs de déformation et contraintes se réduisent donc à :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

On remarque que l'état de déformation est biaxial (déformation plane), alors que l'état de contrainte est triaxial (c'est à dire qui comporte trois contraintes principales non nulles).

En remplaçant σ_{zz} par sa valeur $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ on peut néanmoins écrire une loi de Hooke **2D** dans la forme:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E'} [\sigma_{xx} - \nu' \sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E'} [\sigma_{yy} - \nu' \sigma_{xx}] \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \end{cases} \quad (6.6)$$

Avec l'utilisation des modules effectifs:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (6.7)$$

6.3. Problème de contraintes planes

On peut définir un état de contrainte plane par les conditions suivantes:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (6.8)$$

Ou : $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ indépendant de z .

Selon la loi de Hooke :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} \end{cases} \quad (6.9)$$

Impliquant la troisième coordonnée z , on a:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) ; \varepsilon_{yz} = 0; \varepsilon_{xz} = 0 \quad (6.10)$$

Le matériau n'est pas libre de se déformer selon z , la contrainte est donnée par :

Les tenseurs de contrainte et déformation se réduisent donc à:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

C'est un état de contrainte biaxial (avec deux contraintes principales non nulles), alors que l'état de déformation est triaxial.

6.4. Les équations fondamentales d'élasticité plane

On regroupe les équations fondamentales d'élasticité plane (Problème de déformations planes et Problème de déformations planes) comme suit :

a)- Equations de l'étude statique

a.1- Equations d'équilibre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

a.2- Conditions aux limites

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_{xx}.l + \sigma_{xy}.m \\ \bar{Y} = \sigma_{xy}.l + \sigma_{yy}.m \end{cases} \quad (6.13)$$

Avec :

$$\vec{n} \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

b)- Equations de l'étude géométrique

b.1-Equations de Cauchy (Extensions et Distorsions)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varepsilon_{xy} \quad (6.15)$$

b.2- Equations de compatibilité de Saint-Venant

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.16)$$

c)- Equations de l'étude physique

c.1-Equations de Hooke

- Déformation plane (voir l'équation (6.6)).
- Contrainte plane (voir l'équation (6.9)).

c.2-Equations de Lamé

- Déformation plane :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2G)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2G)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= G.\gamma_{xy} \\ \varepsilon_v &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \end{aligned} \quad (6.17)$$

- Contrainte plane :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2G \cdot \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_v \\
 \sigma_{yy} &= 2G \cdot \varepsilon_{yy} + \lambda \varepsilon_v \\
 \sigma_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy} \\
 \varepsilon_v &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

6.5. Fonction de contrainte d’Airy

Il existe plusieurs méthodes de résolution des problèmes d'élasticité plane, chacune adaptée à des types spécifiques de problèmes ou à des configurations particulières. Pour des géométries simples et des conditions aux limites bien définies, il est parfois possible de résoudre analytiquement les équations de l'élasticité plane. Cela peut impliquer l'utilisation de fonctions de Airy.

Pour les deux conditions de déformation et de contrainte plane on peut écrire la même loi de Hooke **2D** (Eq (6.6)), formellement analogue à la loi **3D**, à condition d'utiliser des modules effectifs:

Pour des déformations planes :

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \tag{6.19}$$

Pour des contraintes planes :

$$E' = E \quad \nu' = \nu \tag{6.20}$$

Dans les deux cas, l'équilibre élastique en l'absence de forces de volume ($\text{div } \sigma = 0$) s'écrit:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0
 \end{cases}
 \tag{6.21}$$

Ces équations sont automatiquement satisfaites si l'on trouve une fonction scalaire $\Phi(x, y)$, dite fonction de contrainte d'Airy (Airy, 1862), telle que:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} ; \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} ; \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{6.22}$$

Pour les problèmes plans, les conditions de compatibilité peuvent être écrites en termes de contrainte (Maxwell 1868) dans la forme suivante:

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \tag{6.23}$$

En termes de fonction de contrainte d'Airy la solution d'un problème plan revient donc à trouver une fonction **bi-harmonique** qui satisfait aux **conditions aux limites** du problème :

$$\Delta \Delta \Phi(x, y) = 0 \tag{6.24}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (6.25)$$

Les équations de **conditions aux limites** de frontière données par l'équation (6.13).

On remarque que si les conditions aux limites sont écrites en termes de contraintes, les deux états plans admettent la même solution en termes de champ de contraintes. Les champs de déformation et de déplacement sont aussi identiques à un facteur près donné par la différence de module effectif. Toute fonction bi-harmonique permet donc de satisfaire, les équations d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité. La solution d'un problème d'élasticité est unique sous l'hypothèse des petites perturbations. Donc la fonction Φ qui permet de satisfaire les conditions aux limites donne la solution unique du problème.

Nous allons à présent considérer un cas plus général et admettre qu'il **existe des forces de volume** \vec{F} dérivant d'un potentiel V sous la forme :

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad} V = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Les équations d'équilibre en translation s'écrivent dans ce cas sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{xx} + V)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} + V)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Ces équations sont satisfaites pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy Φ :

$$\sigma_{xx} + V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} + V = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (6.28)$$

La fonction potentielle des contraintes doit être **bi-harmonique**.

En état de déformations planes:

$$\Delta \Delta \Phi = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta V \quad (6.29)$$

En état de contraintes planes

$$\Delta \Delta \Phi = (1-\nu) \Delta V \quad (6.30)$$

Exercice :

Considérons une poutre console ayant une section droite rectangulaire étroite (dont nous prendrons la largeur pour unité) qui est fléchiée par une force P appliquée à son extrémité libre (figure 6.1). On néglige le poids propre.

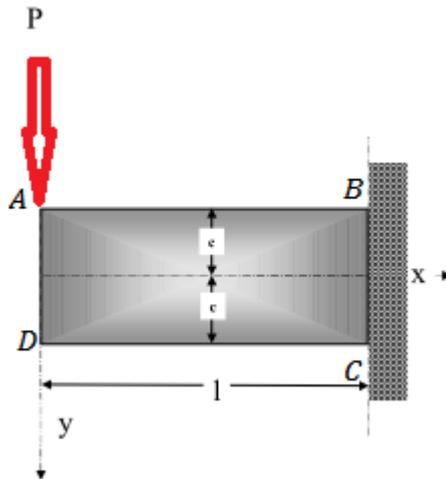


Fig.6.1- Poutre console chargée par une force P .

Démontrer que la fonction de l'expression :

$$\Phi(x; y) = -\frac{3P}{4c^2}xy^2 + \frac{P}{4c^3}xy^3$$

est une fonction d'Airy ?

Solution:

Pour que $\Phi(x; y)$ soit une fonction d'Airy, il faut trois conditions :

1-La fonction doit être **bi-harmonique**

$$\Delta\Delta\Phi(x; y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(x, y)}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4\Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi(x, y)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi(x, y)}{\partial y^4} = 0$$

$$\frac{\partial^4\Phi(x, y)}{\partial x^4} = 0 ; 2\frac{\partial^4\Phi(x, y)}{\partial x^2\partial y^2} = 0 ; \frac{\partial^4\Phi(x, y)}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow \Delta\Delta\Phi(x; y) = 0$$

La fonction est bi-harmonique.

1- La fonction donne une distribution de contraintes

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\frac{3P}{2c^2}x + \frac{3P}{2c^3}xy ; \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 ; \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\left(-\frac{3P}{2c^2}y + \frac{3P}{4c^3}y^2\right)$$

3- La distribution de contraintes satisfait aux **conditions aux limites**

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_{xx}.l + \sigma_{xy}.m = \left(-\frac{3P}{2c^2}x + \frac{3P}{2c^3}xy \right).l + \left(\frac{3P}{2c^2}y - \frac{3P}{4c^3}y^2 \right).m \\ \bar{Y} = \sigma_{xy}.l + \sigma_{yy}.m = \left(\frac{3P}{2c^2}y - \frac{3P}{4c^3}y^2 \right).l \end{cases}$$

Conditions aux limites de chargement :

Face AB : $\vec{n}(0, -1)$ et $y=0$ donc $\begin{cases} \bar{X} = 0 \\ \bar{Y} = 0 \end{cases}$ « la face non chargée ».

Face CD : $\vec{n}(0,1)$ et $y=2c$ donc $\begin{cases} \bar{X} = 0 \\ \bar{Y} = 0 \end{cases}$ « la face non chargée ».

Face AB : $\vec{n}(-1,0)$ et $x=0$ donc $\begin{cases} \bar{X} = 0 \\ \bar{Y} = -\frac{3P}{2c^2}y + \frac{3P}{4c^3}y^2 \end{cases}$ « la face est chargée uniquement suivant y par

la force distribuée P ».

$$\int_0^{2c} \bar{Y}.dy = \int_0^{2c} \left(-\frac{3P}{2c^2}y + \frac{3P}{4c^3}y^2 \right).dy = -\frac{3P}{2c^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2c} + \frac{3P}{4c^3} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{2c} = -3P + 2P = -P$$

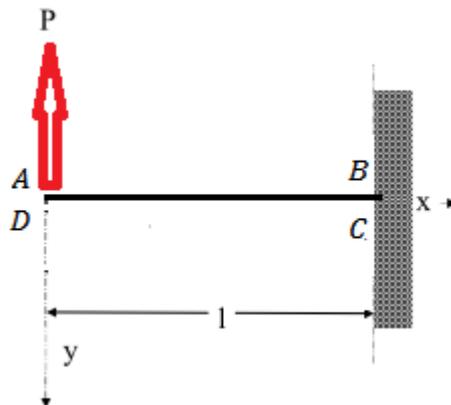


Fig.6.1- Schéma statique équivalent.

Conditions aux limites de déplacement :

Face BC (Encastrement) : $\vec{n}(1,0)$, $x=l$ et $0 \leq y \leq 2c$

$$\text{donc } \begin{cases} \bar{X} = -\frac{3P}{2c^2}l + \frac{3P}{2c^3}l.y \\ \bar{Y} = \frac{3P}{2c^2}y - \frac{3P}{4c^3}y^2 \end{cases}$$

On calcule les réactions suivant « x » et suivant « y » et le moment au niveau de l'encastrement

$$\int_0^{2c} \bar{X}.dy = \int_0^{2c} \left(-\frac{3P}{2c^2}l + \frac{3P}{2c^3}ly \right).dy = -\frac{3Pl}{2c^2}y \Big|_0^{2c} + \frac{3Pl}{2c^3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2c} = 0$$

La réaction suivant « x » est nulle ($R_x=0$).

$$\int_0^{2c} \bar{Y} \cdot dy = \int_0^{2c} \left(\frac{3P}{2c^2} y - \frac{3P}{4c^3} y^2 \right) \cdot dy = \frac{3P}{2c^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2c} - \frac{3P}{4c^3} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{2c} = P$$

La réaction suivant « y » est (**R_y=P**).

$$\int_0^{2c} \bar{X} \cdot y \cdot dy = \int_0^{2c} \left(-\frac{3P}{2c^2} l + \frac{3P}{2c^3} ly \right) \cdot y \cdot dy = -\frac{3Pl}{2c^2} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2c} + \frac{3Pl}{2c^3} \frac{y^3}{3} \Big|_0^{2c} = Pl$$

Le moment au niveau de l'encastrement est (**M=Pl**).

$\Phi(x; y)$ est une fonction d'Airy.

CHAPITRE 7:
FLEXION DES POUTRES

Chapitre 7

« Flexion des Poutres »

7.1. Introduction

La flexion des poutres en élasticité est un concept important en génie civil et en mécanique des structures. Lorsqu'une poutre est soumise à une charge, elle se déforme en se pliant. La théorie de l'élasticité est souvent utilisée pour analyser ce comportement.

L'analyse de la flexion des poutres en élasticité permet de calculer les déformations, les contraintes et les moments le long de la poutre en fonction des charges appliquées et des propriétés du matériau. Cette analyse est cruciale dans la conception et l'ingénierie des structures pour s'assurer que les poutres sont dimensionnées de manière appropriée et peuvent supporter les charges prévues sans défaillance.

7.2. Définition d'une poutre

Une poutre est un solide engendré par une aire plane ou une section droite dont le centre de gravité G décrit une courbe plane qu'on appelle la fibre moyenne ou la ligne moyenne. La longueur de la poutre est très grande par rapport à son diamètre ($L \gg D$). Ils existent plusieurs différentes formes de sections de la poutre (rectangulaire, carrée, circulaire,....etc.).

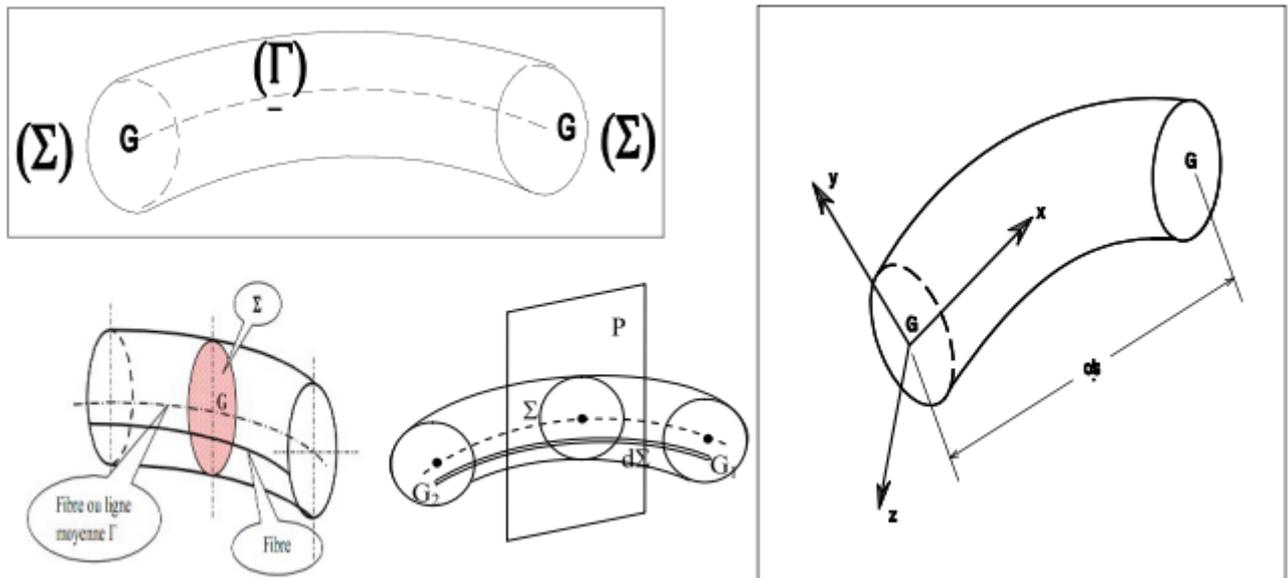


Fig.7.1- Schématisation d'une poutre

7.3. Types de flexion

La **flexion pure** est un état de charge tel que, dans toute section droite d'une pièce, il n'existe qu'un moment fléchissant M_f . Ce moment fléchissant doit être constant.

La **flexion simple** est un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce il n'existe qu'un moment fléchissant M_f et un effort tranchant V associé.

La **flexion composée**, Il s'agit d'une combinaison de flexion simple et de cisaillement. La poutre est soumise à la fois à un moment de flexion et à une force tranchante.

7.4. Théorie d'Euler-Bernoulli

Hypothèses :

Cette théorie suppose que les déformations transversales sont négligeables par rapport aux déformations longitudinales. Elle est basée sur les hypothèses que les sections planes restent planes après la déformation, et que les lignes neutres initiales restent droites et parallèles à l'axe longitudinal de la poutre.

La théorie d'Euler-Bernoulli est souvent utilisée pour des poutres longues et minces où les déformations transversales sont négligeables.

L'équation fondamentale de la flexion pour la théorie d'Euler-Bernoulli est donnée par :

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x) \quad (7.1)$$

où :

$w(x)$ est le déplacement vertical de la poutre en fonction de la position x ,

E est le module d'élasticité du matériau,

I est le moment quadratique de la section transversale,

$M(x)$ est le moment fléchissant le long de la poutre en fonction de la position x .

Tenseur de Contrainte :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -E \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \sigma_{yy} &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Tenseur de Déformation :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\frac{d^2 w}{dx^2} \\ \varepsilon_{yy} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

7.5. Théorie de Timoshenko

Hypothèses :

La théorie de Timoshenko prend en compte les déformations transversales dans la modélisation des poutres. Elle suppose que la section transversale reste plane après déformation, mais permet des rotations de la ligne neutre. Elle est particulièrement utile pour les poutres courtes ou les poutres soumises à des charges latérales importantes.

Par rapport à la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timoshenko inclut les effets de cisaillement et permet de prendre en compte les déformations de torsion et les déformations dues à la flexion. L'équation de déplacement vertical pour la théorie de Timoshenko est donnée par :

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + GJ \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x) \quad (7.4)$$

où :

$w(x)$ est le déplacement vertical de la poutre en fonction de la position x ,

E est le module d'élasticité du matériau,

I est le moment quadratique de la section transversale,

G est le module de cisaillement du matériau,

J est le moment polaire de la section transversale,

$M(x)$ est le moment fléchissant le long de la poutre en fonction de la position x .

Tenseur de Contrainte :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -E \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \sigma_{yy} &= -\frac{G}{2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \tau_{xy} &= -G \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Tenseur de Déformation :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -\frac{d^2 w}{dx^2} \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Avec:

σ_{xx} et ε_{xx} représentent les composantes axiales du tenseur de contrainte et de déformation, respectivement.

σ_{yy} et ε_{yy} représentent les composantes transversales.

τ_{xy} et γ_{xy} représentent les composantes de cisaillement.

E est le module d'élasticité, et G est le module de cisaillement.

Exercice N°1:

Considérons une poutre encastree à une extrémité et simplement supportée à l'autre extrémité, soumise à une charge concentrée à son milieu.

Calculer les contraintes normales et les déformations normales au niveau de la section médiane de la poutre ?

Solution :

Le déplacement vertical au milieu de la poutre

$$v = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

Les contraintes normales σ_{xx} et les déformations normales ϵ_{xx} peuvent être calculées à partir de la flexion selon la théorie d'Euler Bernoulli :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{M y}{I} \\ \epsilon_{xx} &= -\frac{y}{R} \end{aligned}$$

Le moment fléchissant M au milieu de la poutre peut être calculé à partir de la charge concentrée :

$$M = \frac{P l}{4}$$

Le rayon de courbure R est lié au moment fléchissant par :

$$R = \frac{EI}{M}.$$

Exercice N°2:

La poutre de la figure 7.2 possède une section rectangulaire, de hauteur $2h$ et de largeur b . Elle est chargée en flexion pure (cisaillements négligés), et on suppose qu'une section droite de normale x_1 reste droite. Le comportement du matériau qui la constitue est élastique (E, ν).

Quelle est la distribution de contrainte et de déformation en élasticité ?

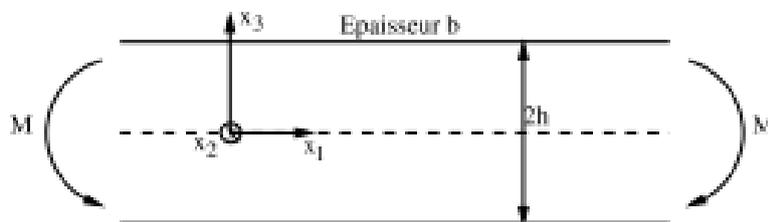


Fig.7.2- Géométrie et chargement de la poutre

Solution :

En flexion pure, l'état de contrainte est uni-axial ; le déplacement u_1 , donc ϵ_{xx} et σ_{xx} sont proportionnels à x_3 (origine des axes sur la ligne neutre).

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad [\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu\sigma}{E} \end{pmatrix}$$

L'écriture de l'équilibre des moments (Figure 7.3)

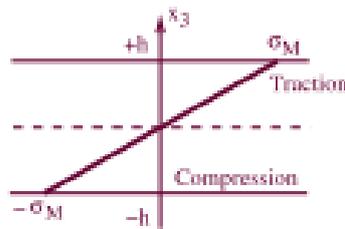


Fig.7.3- Profil de contrainte σ_{xx} dans une poutre en flexion simple en élasticité

$$M = \int_{-h}^{+h} x_3 \cdot \sigma_{xx} \cdot b \cdot dx_3$$

En suppose que $\sigma_{xx} = kx_3$:

$$\sigma_{xx} = \sigma = M \frac{x_3}{I} ; \text{ avec } I = \frac{2bh^3}{3}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m = \frac{3M}{2bh^2} ; \text{ avec } \sigma(x_3) = \left(\frac{x_3}{h} \right) \sigma_m$$

CHAPITRE 8:

ETUDE DES PLAQUES MINCES

Chapitre 8

« Etude des plaques minces »

8.1. Introduction

La théorie des plaques s'inspirant de la théorie des poutres. Ces théories font partie du domaine de la mécanique des structures qui est la mécanique des solides de dimensions finies où au minimum une des dimensions est faible devant les autres. La Figure 8.1 de Drapier (2016) illustre les géométries le plus courantes dans ce domaine : en 1D, les poutres et en 2D, les plaques et les coques.

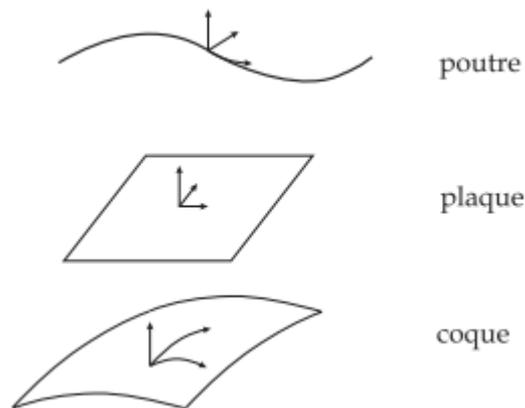


Fig.8.1- Géométries courantes en mécanique des structures.

Les plaques peuvent être classées en trois groupes : les plaques minces à petites déformations, les plaques minces à grandes déformations et les plaques épaisses.

8.2. Hypothèses fondamentales

1. Les hypothèses de simplification concernent les conditions de réversibilité et de linéarité (nous restreignons au cadre de la résistance des matériaux) ;
2. Petites déformations et petits déplacements ;
3. Comportement élastique (les déformations sont réversibles, c'est-à-dire que le matériau reprend sa forme initiale après un cycle chargement-déchargement) ;
4. Comportement linéaire (les déformations sont proportionnelles aux contraintes) ;
5. Matériaux homogènes isotropes (le matériau est de même nature dans toute sa masse et les propriétés du matériau sont identiques dans toutes les directions).

Nous considérons également les deux principes suivants :

a)- Le principe de **Saint-Venant** : Le comportement en un point quelconque du matériau est indépendant de la façon dont sont appliquées les forces (si ce point est suffisamment loin du point d'application) et peut ainsi être modélisé par un torseur des forces internes en ce point ;

b)- Le principe de **superposition** : l'ordre d'applications des efforts extérieurs sur le solide n'a pas d'importance, c'est-à-dire que quelque soit l'ordre d'applications des efforts nous obtenons le même état final. Ce principe permet de décomposer une sollicitation complexe en une somme de sollicitations élémentaires (traction, compression, cisaillement, torsion, flexion).

8.3. Définition d'une plaque

Une plaque est définie comme étant un solide délimité par deux plans parallèles appelés faces et dont l'épaisseur h est petite par rapport aux deux autres dimensions.

Pour étudier le comportement de la plaque, nous définissons son plan moyen auquel nous associons un repère orthonormé (O, x, y, z) tangent à ce plan. Le plan moyen est ainsi situé dans le plan (O, x, y) à équidistance entre les deux faces. L'origine du repère étant située sur le plan moyen avec z la direction de l'épaisseur, la face inférieure est ainsi positionnée en $(z = -h/2)$ et la face supérieure en $(z = +h/2)$. Dans la théorie des plaques, le plan moyen représente l'équivalent de la courbe moyenne dans la théorie des poutres.

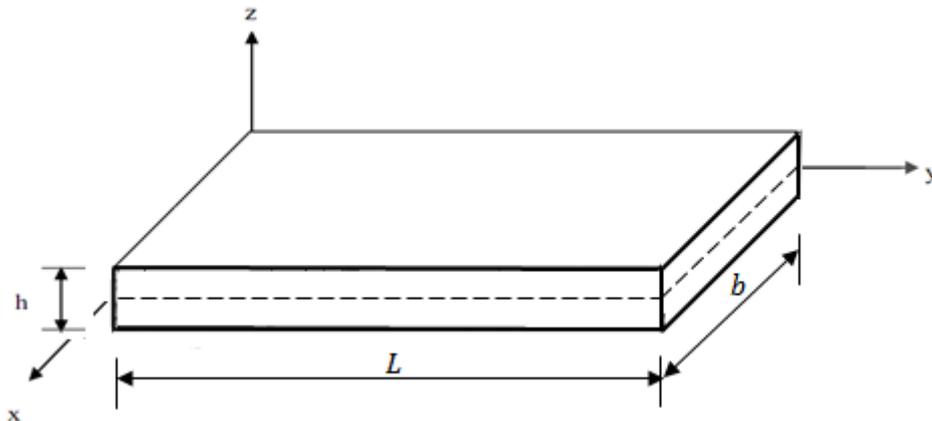


Fig.8.2- Géométrie d'une plaque

8.4. Cinématique d'une plaque mince

Le modèle le plus simple est le plus général appelé modèle de Love-Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur (La théorie des plaques minces énoncée par Love en 1888 sur les hypothèses de Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces de Euler-Bernoulli).

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h) .

8.4.1. Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff

La théorie classique des plaques minces (théorie classique des plaques « CPT ») se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon les quelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure 8.3), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

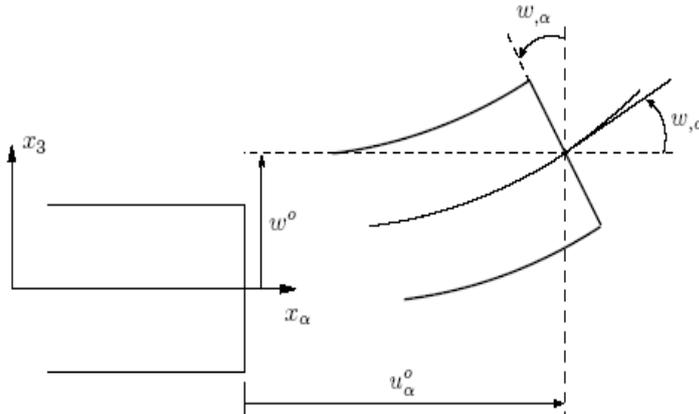


Fig.8.3- Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad , \alpha = 1, 2 \quad (8.1)$$

Avec :

u_α^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

Nous avons ainsi les relations suivantes pour les coordonnées du déplacement \vec{u} de la plaque mince:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \theta_y(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \theta_x(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (8.2)$$

Ou :

$$\theta_y = \frac{\partial u_0}{\partial z}, \quad \theta_x = -\frac{\partial v_0}{\partial z}. \quad (8.3)$$

8.5. Déformation d'une plaque mince

Nous pouvons considérer le tenseur de déformation de Green Lagrange linéarisé pour modéliser cette déformation en fonction du déplacement.

Ce tenseur est symétrique et ses composantes écrites avec la notation de Voigt sont définies par :

$$\epsilon^g = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^g \\ \epsilon_{yy}^g \\ \epsilon_{zz}^g \\ \epsilon_{yz}^g \\ \epsilon_{xz}^g \\ \epsilon_{xy}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Le tenseur des déformations s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx}^g = \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \\ \epsilon_{yy}^g = \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} \\ \epsilon_{zz}^g = \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial z} \\ \epsilon_{yz}^g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0(x,y)}{\partial z} - \theta_x(x,y) + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{xz}^g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial z} + \theta_y(x,y) + \frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xy}^g = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \right) \right] \end{array} \right. \quad (8.5)$$

Le tenseur des déformations en notation de Voigt s'écrit alors :

$$\epsilon^g = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^g \\ \epsilon_{yy}^g \\ \epsilon_{zz}^g \\ \epsilon_{yz}^g \\ \epsilon_{xz}^g \\ \epsilon_{xy}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} + z \left(-\frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial y} \right) \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} - \theta_x(x,y) \right) = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} + \theta_y(x,y) \right) = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x,y)}{\partial x} \right) + z \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x,y)}{\partial x} \right) \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Nous pouvons décomposer le tenseur global des déformations de l'équation (8.6) pour faire apparaître :

- Le tenseur des déformations membranaires :

$$\epsilon_m = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} \right) \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

- Le tenseur des déformations de flexion :

$$\epsilon_b = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \right) \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

- Le tenseur des déformations de cisaillement :

$$\epsilon_c = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \theta_y(x, y) \\ \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} - \theta_x(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Le tenseur de déformation pour la plaque mince modélisant à la fois les déformations membranaires (translation dans le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y})) et de flexion (rotation autour des axes \mathbf{x} et \mathbf{y}) est défini de la façon suivante :

$$\epsilon^g = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^g \\ \epsilon_{yy}^g \\ \epsilon_{xy}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} = \epsilon_m + z \epsilon_b \quad (8.10)$$

Ou bien:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx}^g = \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ \epsilon_{yy}^g = \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} \\ \epsilon_{xy}^g = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_0(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (8.11)$$

8.6. Tenseur de contraintes et loi de comportement

Le tenseur de contraintes s'exprime ainsi pour la plaque mince comme suit:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y) & \sigma_{xy}(x, y) & \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{yx}(x, y) & \sigma_{yy}(x, y) & \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{zx} = 0 & \sigma_{zy} = 0 & \sigma_{zz} = 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}(x, y) \\ \epsilon_{yy}(x, y) \\ \epsilon_{xy}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

Selon la formulation de la loi de Hooke en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{v} , la relation entre le tenseur de contraintes σ et le tenseur de déformation ϵ s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

En considérant le tenseur de déformation de Green-Lagrange linéarisé établi dans l'équation (8.10), nous obtenons comme loi de comportement pour la plaque mince :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + z \kappa_{xx} + \nu \epsilon_{yy} + \nu z \kappa_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_{xx} + \nu z \kappa_{xx} + \epsilon_{yy} + z \kappa_{yy}) \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_{xy} + z \kappa_{xy}) \end{cases} \quad (8.14)$$

Nous avons ainsi la relation suivante entre les tenseurs ϵ et le tenseur de contraintes σ (en considérant la loi de Hooke pour la place mince) s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

8.7. Equations d'équilibre d'une plaque

Considérons un élément $dx dy$ de la plaque uniformément chargée de la figure 8.4.

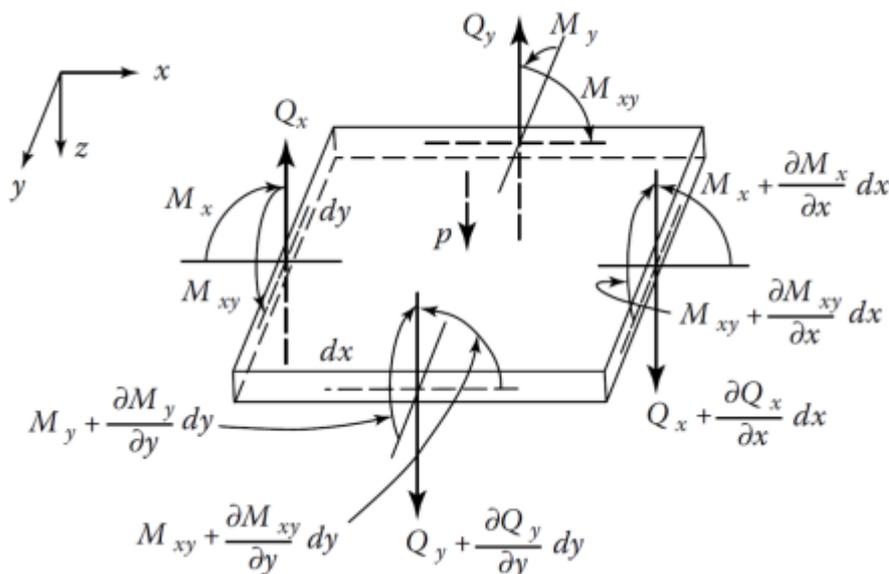


Fig.8.4- Un élément de la plaque uniformément chargée

Les contraintes distribuées sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion, des moments de torsion et des forces verticales de cisaillement. Les résultantes (moments et forces) par unité de longueur peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz ; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (8.16)$$

L'équation **différentielle de l'équilibre** des plaques minces s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (8.17)$$

L'équation **différentielle qui gouverne** la flexion des plaques peut être obtenue comme suit :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (8.18)$$

Ou :

w est la flèche.

Le paramètre D étant la rigidité flexionnelle de la plaque.

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8.19)$$

Cette équation présentée par Lagrange en 1811, peut s'écrire sous la forme compacte suivante:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (8.20)$$

L'équation de Lagrange est l'équation différentielle gouvernante de la flexion des plaques minces.

8.8. Energie de déformation d'une plaque mince

L'énergie de déformation est définie par la somme de l'énergie de déformation membranaire et de l'énergie de déformation de flexion. L'énergie de déformation de la plaque mince est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} \int_{A_t} \left(\epsilon_m^T \frac{E h}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \epsilon_m + \epsilon_b^T \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \epsilon_b \right) dx dy. \quad (8.21)$$

Exercice:

On considère une plaque semi infinie dans la direction $\mathbf{2}$ et appuyée en $\mathbf{x}_1=0$ et en $\mathbf{x}_1=L$. la plaque est soumise à une pression $(-P\vec{e}_3)$ comme indiqué sur la figure ci-dessous (figure 8.5). On considère que les tenseurs des tensions et des moments sont de la forme suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} ax_1^2 + bx_1 + c & 0 \\ 0 & \nu(ax_1^2 + bx_1 + c) \end{pmatrix}$$

Avec :

a, b, c et ν sont des constantes.

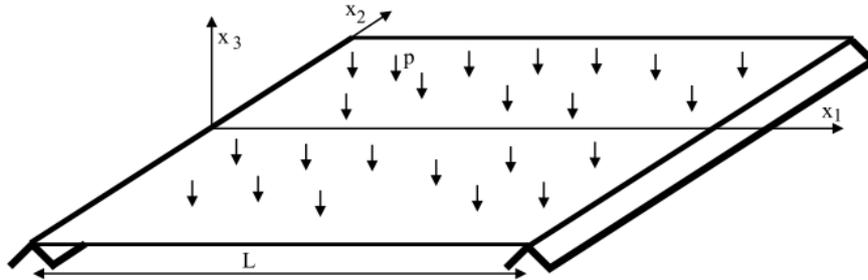


Fig.8.5- Plaque semi infinie en flexion

1. Quelle hypothèse le caractère semi infini de la plaque suggère-t-il de faire ?
2. Calculer les constante a, b et c de manière à vérifier l'équilibre de la plaque ?
3. En déduire les réactions dans les appuis ?

Solution :

1. Le modèle étant semi infini dans la direction x_2 , la solution loin des bords situés à l'infini est indépendante de x_2 :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = 0$$

2. Les forces surfaciques sont ici de la forme $(-P\vec{e}_3)$, L'équation d'équilibre donnée par :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$$

L'équation devient :

$$2a + p = 0 \Rightarrow a = \frac{-p}{2}$$

Sur les bords : $x_1 = 0$ (normale $\vec{n} = -\vec{e}_r$) et $x_1 = L$ (normale $\vec{n} = \vec{e}_r$). La condition en effort est de type moment Z nul. L'équation sur les deux bords donne :

$$\vec{n} \cdot M \cdot \vec{n} + Z \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{cases} -M_{xx}(x_1 = 0) + 0 = 0 \\ -M_{xx}(x_1 = L) + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ aL^2 + bL = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = \frac{pL}{2} \end{cases}$$

La solution est donc :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; M = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2}x_1(x_1 - L) & 0 \\ 0 & -\nu\frac{p}{2}x_1(x_1 - L) \end{pmatrix}$$

3. La réaction dans les appuis est calculée en $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{div}}.M.\vec{n} + Y = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}(x_1 = 0) + Y(0) = 0 \\ -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}(x_1 = L) + Y(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = \frac{pL}{2} \\ Y(L) = \frac{pL}{2} \end{cases}$$

EXERCICES

Exercice N°01:

1°)- Utiliser la convention de sommation pour écrire les expressions qui suivent :

1. $b_{j1} x_1 + b_{j2} x_2 + b_{j3} x_3 = 6$

2. $b_{11} d_{11} + b_{12} d_{12} + b_{13} d_{13} + b_{14} d_{14} = C$

Préciser la valeur de n dans chaque cas ainsi que les indices muets et libres ?

2°)- Soit $\{e_1, e_2\}$ une base d'un espace vectoriel E_2 et soient deux vecteurs de E_2 :

$$X = 2 e_1 + 4 e_2 ; Y = 5 e_1 + 3 e_2$$

On note $e_i \otimes e_j$ les vecteurs de base d'un espace $E_4 = E_2 \otimes E_2$.

Déterminer l'expression du produit tensoriel $X \otimes Y$?

3°)- Soit A le tenseur d'ordre 2 donné par :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer :

1) A_{ii} ; 2) $A_{ij} A_{ij}$; 3) $\delta_{k\ell} A_{\ell k}$ (δ est le symbole de Kronecker).

Solution :

1°)-

1. L'indice j est un indice libre ; notons k l'indice muet, il vient :

$$b_{jk} x_k = 6 ; n = 3$$

2. Les premiers indices, notés l des quantités b et d sont libres ; notons j l'indice de sommation, il vient :

$$b_{lj} d_{lj} = C ; n = 4$$

2°)- La propriété de distributivité du produit tensoriel par rapport à l'addition vectorielle nous donne :

$$X \otimes Y = (2 e_1 + 4 e_2) \otimes (5 e_1 + 3 e_2) = 2 e_1 \otimes 5 e_1 + 2 e_1 \otimes 3 e_2 + 4 e_2 \otimes 5 e_1 + 4 e_2 \otimes 3 e_2$$

L'associativité du produit tensoriel par rapport à la multiplication par un scalaire nous donne :

$$X \otimes Y = 10 e_1 \otimes e_1 + 6 e_1 \otimes e_2 + 20 e_2 \otimes e_1 + 12 e_2 \otimes e_2$$

3°)-

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \text{Trace} (A) = 5$$

$$A_{ij} A_{ij} = \text{Trace} (A \cdot A^T) = 28$$

$$\delta_{k\ell} A_{\ell k} = A_{kk} = \text{Trace} (A) = 5$$

Exercice N°02:

1°)- On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 10 & 12 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} , $(A+B)$, $C = (A \times B)$ et C^{-1} ?

2°)- Soient A , B et C trois matrices de composantes A_{ij} , B_{ij} et C_{ij} respectivement et α est un scalaire.

$$\begin{array}{lll} A = B : A_{ij} = B_{ij} & C = A + B : C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} & C = \alpha A : C_{ij} = \alpha A_{ij} \\ A + B = B + A & \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) & AB \neq BA \\ A(BC) = (AB)C & A + (B + C) = (A + B) + C & A(B + C) = AB + AC \\ C = AB = [A][B] : C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} & A^{-1} \text{ inverse de } A : AA^{-1} = I & \det(AB) = \det(A) \det(B) \end{array}$$

Copiez les bonnes réponses ?

Solution:

1°)- A^{-1} , $(A+B)$, $C = (A \times B)$ et C^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}; C = A \times B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 13 \\ 0 & -5 & 16 \\ 39 & 28 & 5 \end{pmatrix}; C^{-1} = \begin{pmatrix} 473 & -354 & -97 \\ -624 & 467 & 128 \\ -195 & 146 & 40 \end{pmatrix}$$

2°)- Toutes les réponses sont correctes.

Exercice N°03:

Soient (u_n) et (v_n) les suites réelles définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2v_n + u_n \\ v_{n+1} = v_n + u_n \end{cases}$$

1°)- Exprimer u_n et v_n en fonction de u_0 , v_0 et n , sachant que :

$$D = H^{-1}KH \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution:

1°)- u_n et v_n en fonction de u_0 , v_0 :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2v_n + u_n \\ v_{n+1} = v_n + u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \Leftrightarrow X_{n+1} = K \cdot X_n$$

La suite X_n est donc une suite géométrique : $X_n = K^n \cdot X_0$

$$K^n = HD^nH^{-1} \quad \text{avec } D = H^{-1}KH = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix}$$

donc :

$$K^n = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sqrt{2})^n}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^n}{2} & \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n}{2} - \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n}{2} \\ \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n}{4} - \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n}{4} & \frac{(1+\sqrt{2})^n}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^n}{2} \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = K^n \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}$$

Exercice N°04:

Soient A, B deux matrices d'ordre (**3x3**) :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°)- Vérifier si (**$AB \neq BA$**) ?

2°)- Déterminer les invariants, les valeurs propres de la matrice (**$C=AB$**) et le vecteur propre associé V_1 ?

Solution:

1°)- Vérification si (**$AB \neq BA$**) :

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 8 & -8 & 4 \end{pmatrix} ; \quad BA = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 \\ -8 & 8 & -8 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc on peut dire que (**$AB \neq BA$**).

2°)- la matrice (**$C=AB$**) :

$$C = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 8 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Les invariants et les valeurs propres de la matrice **C** :

$$\det(C - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

$$I_1 = \text{tr}(C) = 20$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_3 = \det(C) = 0$$

L'équation générale devient : $-\lambda^3 + 20\lambda^2 = 0$

Valeurs propres sont $\lambda_1=20$ et $\lambda_2=0$.

Le vecteur propre associé V_1 pour $\lambda_1=20$ donné comme suit :

$$(C - \lambda_1 I) \cdot V_1 = 0 \quad \text{avec} \quad V_1 = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \text{ et } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

On trouve :

$$V_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice N°05:

Dans un repère orthonormé $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ le tenseur des contraintes est représenté par la matrice suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 10 & S & 0 \\ 15 & 0 & 30 \end{bmatrix}; \quad (\text{Mpa})$$

On demande de:

- 1°)- Déterminer la valeur de (S) pour qu'il y ait un plan selon lequel le vecteur des contraintes soit nul et les composantes du vecteur unitaire (\vec{n}) normal à ce plan?
- 2°)- Déterminer les contraintes principales ?
- 3°)- Déterminer les directions principales normalisées ?

Solution:

1°)- La valeur de (S) pour qu'il y ait un plan selon lequel le vecteur des contraintes soit nul et les composantes du vecteur unitaire (\vec{n}) normal à ce plan :

$$\vec{T}(P, \vec{n}) = [\sigma(P)]\{\vec{n}\} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

Le système devient:

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 10 & S & 0 \\ 15 & 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 20l + 10m + 15n = 0 \\ 10l + Sm = 0 \\ 15l + 30n = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système est: $S = 8$

Le tenseur des contraintes devient :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 10 & 8 & 0 \\ 15 & 0 & 30 \end{bmatrix}; \quad (Mpa)$$

2°)- Les contraintes principales :

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 58 \\ I_2 &= (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2) = 675 \\ I_3 &= \det(\sigma) = 0 \end{aligned}$$

L'équation générale devient : $-\lambda^3 + 58\lambda^2 - 675\lambda = 0$

Les contraintes principales sont:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 41,88 MPa \\ \sigma_2 = 16,12 MPa \\ \sigma_3 = 0 MPa \end{cases}$$

3°)- Les directions principales normalisées :

$$(\sigma - \lambda I) \cdot V = 0 \quad \text{avec } V = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \text{ et } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$V_1 = \pm \begin{pmatrix} 0,610 \\ 0,180 \\ 0,770 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \pm \begin{pmatrix} +0,521 \\ +0,641 \\ -0,563 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \pm \begin{pmatrix} +0,596 \\ -0,745 \\ -0,298 \end{pmatrix}$$

Exercice N°06:

On considère à un état de contraintes uniforme dont les composantes cartésiennes sont :

$$\sigma = \alpha \begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} MPa ;$$

Pour $\alpha = 1/2$:

1°)- Déterminer les contraintes principales ?

2°)- Calculer la contrainte moyenne normale et la contrainte tangentielle maximale ?

3°)- Vérifier les invariants des contraintes I_1 , I_2 et I_3 ?

Solution :

Pour $\alpha=1/2$:

$$\sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} MPa ;$$

1°)- Les contraintes principales :

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

$$I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -5$$

$$I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2) = -5$$

$$I_3 = \det(\sigma) = 0$$

L'équation générale devient : $-\lambda^3 - 58\lambda^2 + 5\lambda = 0$

Les contraintes principales sont:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0,85 MPa \\ \sigma_2 = 0 MPa \\ \sigma_3 = -5,85 MPa \end{cases}$$

2°)- La contrainte moyenne normale et la contrainte tangentielle maximale :

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -1,67 MPa$$

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm 3,35 MPa$$

3°)- Vérification des invariants des contraintes I_1 , I_2 et I_3 :

$$I_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = -5 MPa$$

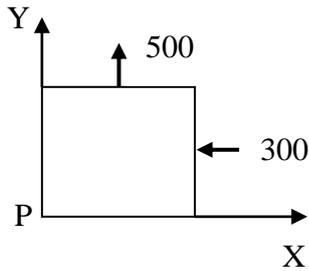
$$I_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,85 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5,85 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,85 & 0 \\ 0 & -5,85 \end{vmatrix} = -5$$

$$I_3 = \det(\sigma) = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3) = 0$$

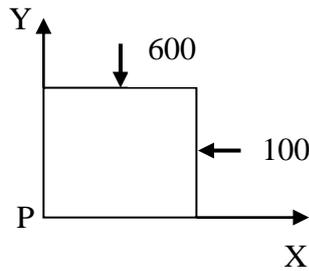
Les invariants des contraintes sont vérifiées.

Exercice N°07 :

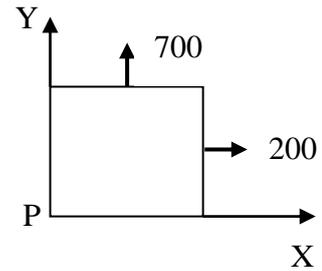
Considérons les trois états plans de contrainte ci-dessous. Les axes sont principaux. Les contraintes sont en (MPa).



Cas (a)



Cas (b)



Cas (c)

1°)- Ecrire les matrices relatives à ces trois états de contrainte ?

2°)- D'après le critère de VON MISES, quel est l'état de contrainte le plus dangereux ?

Solution :

1°)- Les matrices relatives à ces trois états de contrainte :

$$\sigma_{(a)} = \begin{pmatrix} -300 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} MPa ; \sigma_{(b)} = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} MPa ; \sigma_{(c)} = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} MPa$$

2°)- D'après le critère de VON MISES :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y}$$

$$\text{Cas (a)} : \sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(-300)^2 + (500)^2 - (-300)(500)} = 700 MPa$$

$$\text{Cas (b)} : \sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(-100)^2 + (-600)^2 - (-100)(-600)} = 556,78 MPa$$

$$\text{Cas (c)} : \sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{(200)^2 + (700)^2 - (200)(700)} = 624,50 MPa$$

L'état de contrainte le plus dangereux selon le critère de **VON MISES** est donc le **Cas (a)**.

Exercice N°08:

Pour un état de contrainte donnée, les contraintes principales sont limitées à **140 MN/m²** en traction et à **45 MN/m²** en compression. La valeur limite de la contrainte élastique est **240 MN/m²**.

1°)- En appliquant les deux critères de **TRESCA** et de **VON MISES**:

a) - Calculer le coefficient de sécurité.

b) - Calculer l'écart maximum entre les deux critères.

Solution :

Les contraintes maximales :

Le critère de **VON MISES** s'écrit :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 167 \text{ MN/m}^2$$

Le critère de **TRESCA** s'écrit :

Pour un problème plan (σ_1, σ_2) avec $\sigma_3 = 0$.

$$\sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) = 185 \text{ MN/m}^2$$

a)-Le coefficient de sécurité

$$\alpha = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}}$$

$$\alpha_T = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}^T} = 1,30; \quad \alpha_{VM} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}^{VM}} = 1,44$$

b) - L'écart maximum entre les deux critères de : $0,097 \approx 10\%$

Exercice N°09:

On considère à un état de contraintes uniforme dont les composantes cartésiennes sont :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \left(\frac{N}{\text{mm}^2} \right)$$

On demande de:

- 1°)- Déterminer les contraintes principales ?
- 2°)- Déterminer la direction principale normalisée X_1 ?
- 3°)- D'après les deux critères de VON MISES et de TRESCA, calculer la contrainte équivalente ?

Solution :

1°)- Les contraintes principales ?

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

$$I_1 = 12$$

$$I_2 = 0$$

$$I_3 = 0$$

L'équation générale devient : $-\lambda^3 + 12\lambda^2 = 0$

Les contraintes principales sont:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 12 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \text{ MPa} \end{cases}$$

2°)- La direction principale normalisée X_1 :

$$(\sigma - \lambda_1 I) \cdot V_1 = 0 \quad \text{avec } V_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \text{ et } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$V_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3°)- D'après les deux critères de VON MISES et de TRESCA, la contrainte équivalente :

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eq}^T = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) = 12 \text{ MN/m}^2$$

Exercice N°10:

L'état des contraintes en un point (M) d'un milieu continu est donné dans la base orthonormée ($oe_1e_2e_3$) par le tenseur :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0,7\alpha & 3,6\alpha & 0 \\ 3,6\alpha & 2,8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \text{ Mpa}, \quad \text{Avec : } \alpha \text{ est constante réelle, paramètre de charge.}$$

1°)- Quel est l'état des contraintes en point (M) pour ($\alpha = 0$) ?

2°) Pour ($\alpha = 1$), calculer les composantes normales et tangentielles des vecteurs contraintes agissant en (M) sur les deux facettes de normales :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ et } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

3°)-Déterminer en fonction de (α), les contraintes principales et les directions principales correspondantes ? Que peut-on conclure lorsque (α) varie ?

4°)- Déterminer les valeurs de (α) pour que l'état des contraintes au point (M) soit :

a)- cylindrique ; b)- hydrostatique superposé à un cisaillement pur ?

5°)- Déterminer le cisaillement maximum pour des valeurs de (α) positives ?

Solution :

1°)- L'état des contraintes en point (M) pour ($\alpha = 0$) :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \text{ Mpa} ; \sigma_{zz} = 7,6 \text{ MPa} > 0$$

Le cas ($\alpha = 0$) correspond à un état de **traction pure** dans la direction de l'axe **Z**.

2°) Pour ($\alpha = 1$), Les composantes normales et tangentielles des vecteurs contraintes agissant en (M) sur les deux facettes de normales :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} MPa$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\sigma(M)]\{\vec{n}\} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 3,6 & 0 \\ 3,6 & 2,8 & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

*La facette de normale : $\vec{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,406 \\ 4,518 \\ 0 \end{Bmatrix} MPa$$

La composante normale

$$\sigma_n = \{\vec{n}^T\} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) \Leftrightarrow \sigma_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right) \cdot \begin{Bmatrix} 2,406 \\ 4,518 \\ 0 \end{Bmatrix} = 4,343 MPa$$

La composante tangentielle

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \{\vec{n}\} + \vec{\tau}_n \Rightarrow \vec{\tau}_n = \vec{T}(M, \vec{n}) - \sigma_n \{\vec{n}\}.$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,406 \\ 4,518 \\ 0 \end{Bmatrix} - 4,343 \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,355 \\ +2,346 \\ 0 \end{Bmatrix} MPa$$

Le module de cisaillement est :

$$\bar{\tau}_n = \|\vec{\tau}_n\| = \sqrt{\tau_{nx}^2 + \tau_{ny}^2 + \tau_{nz}^2} = 2,71 MPa$$

*La facette de normale : $\vec{n}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,965 \\ 3,689 \\ 4,388 \end{Bmatrix} MPa$$

La composante normale

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \begin{Bmatrix} 1,965 \\ 3,689 \\ 4,388 \end{Bmatrix} = 5,429 \text{ MPa}$$

La composante tangentielle

$$\begin{Bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,965 \\ 3,689 \\ 4,388 \end{Bmatrix} - 5,429 \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,874 \\ +1,473 \\ +1,253 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

Le module de cisaillement est :

$$\bar{\tau}_n = 2,69 \text{ MPa}$$

3°)- Les contraintes principales et les directions principales correspondantes en fonction de (α):

L'équation générale devient :

$$\det(\sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow (7,6 - \lambda)(5,5\alpha - \lambda)(2\alpha + \lambda) = 0$$

Les contraintes principales sont:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5,5\alpha \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -2\alpha \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 7,6 \text{ MPa} \end{cases}$$

Les directions principales sont:

$$(\sigma - \lambda I) \cdot V = 0 \quad \text{avec} \quad V = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \text{ et } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$V_1 = \pm \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \pm \begin{pmatrix} +0,6 \\ -0,8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion: Les directions \vec{X}_1 , \vec{X}_2 et \vec{X}_3 sont indépendantes de α et Lorsque α varie, Les directions principales des contraintes restent parallèles à elles mêmes.

4°)- Les valeurs de (α) pour que l'état des contraintes au point (M) soit :

a)- cylindrique : Un état cylindrique de contrainte est un état tel que deux contraintes principales soient égales. Dans la base $(\vec{X}_1, \vec{X}_2 \text{ et } \vec{X}_3)$ nous pouvons avoir trois possibilités :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow 5,5\alpha = -2\alpha \Rightarrow \alpha_0 = 0,36 \\ \sigma_1 = \sigma_3 \Leftrightarrow 5,5\alpha = 7,6 \Rightarrow \alpha_1 = 1,38 \\ \sigma_2 = \sigma_3 = -2\alpha = 7,6 \Rightarrow \alpha_2 = -3,8 \end{cases}$$

b)- Un état cisaillement simple superposé à une contrainte hydrostatique est représenté, dans le repère principal des contraintes, par l'une des trois matrices :

$$\begin{bmatrix} -\alpha + P & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\alpha + P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + P \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha + P & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + P \end{bmatrix} \text{ avec } P \text{ contrainte hydrostatique}$$

Pour $P = 7,6$:

$$\begin{cases} -\alpha + P = 5,5\alpha \\ \alpha + P = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha = 5,5\alpha - P \\ \alpha = 2\alpha - P \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = 4,34$$

Pour $P = -2\alpha$:

$$\begin{cases} -\alpha + P = 5,5\alpha \\ \alpha + P = 7,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha = 5,5\alpha - P \\ \alpha = 7,6 - P \end{cases} \Rightarrow \alpha_4 = -0,80$$

Pour $P = 5,5\alpha$:

$$\begin{cases} -\alpha + P = -2\alpha \\ \alpha + P = 7,6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha = -2\alpha - P \\ \alpha = 7,6 - P \end{cases} \Rightarrow \alpha_5 = 0,58$$

5°)- Le cisaillement maximum pour des valeurs de (α) positives :

On suppose que ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)

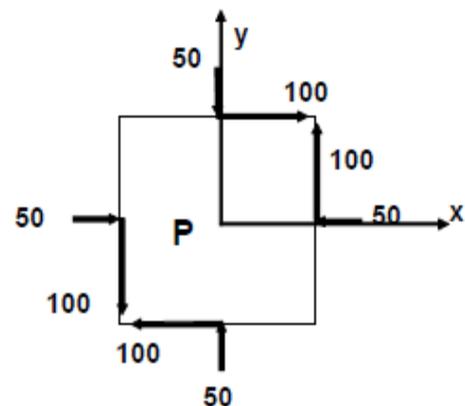
Le cisaillement maximum devient : $\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \alpha_1 \text{ donc : } \sigma_1 = 7,6; \sigma_3 = -2\alpha \Rightarrow \tau_{\max} = 3,8 + \alpha \\ \alpha_1 < \alpha < \infty \text{ donc : } \sigma_1 = 5,5\alpha; \sigma_3 = -2\alpha \Rightarrow \tau_{\max} = 3,75\alpha \end{cases}$$

Exercice N°11:

Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-contre. Les contraintes sont en **MPa**.

- 1°)- Ecrire la matrice des contraintes en P dans le repère xyz ?
- 2°)- Déterminer les éléments principaux des contraintes. Représenter les éléments principaux des contraintes dans le plan xy ?
- 3°)- Déterminer les valeurs maximum et minimum des contraintes de cisaillement et tracer le tri-cercle de Mohr?



Solution :

1°)-La matrice des contraintes en P dans le repère **xyz** :

$$\sigma(P) = \begin{bmatrix} -50 & 100 & 0 \\ 100 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

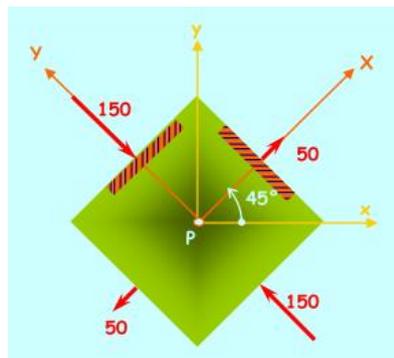
Etat des contraintes planes avec ($\sigma_{zz} = 0$).

2°)-Les éléments principaux des contraintes :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 50 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -150 \text{ MPa} \end{cases} \text{ et } \sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

Représentation des éléments principaux des contraintes dans le plan **xy** :

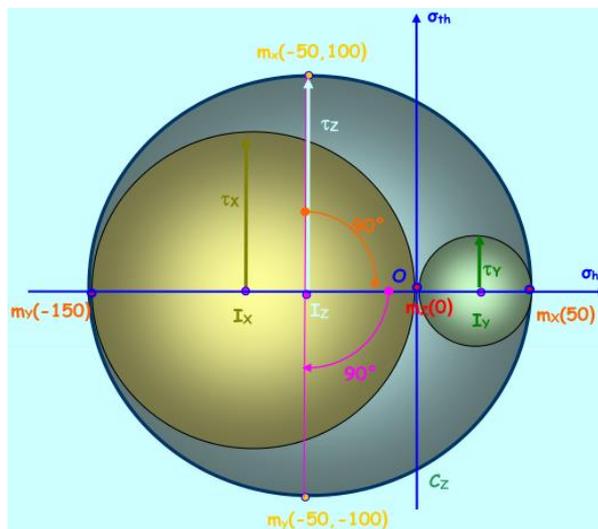
$$\text{tg}(\theta_p) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}} \Rightarrow \theta_p = 45^\circ$$



3°)-Les valeurs maximum et minimum des contraintes de cisailment :

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \Rightarrow \tau_{\max/\min} = \pm 100$$

Représentation graphique (le tri-cercle de Mohr) :



Exercice N°12:

Dans un repère orthonormé $(\mathbf{oe}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$ soit le tenseur de contraintes suivant :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

1°)- Décomposez le tenseur déviateur et sphérique ?

2°)- Trouvez le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma'}}$ dans la base orthonormé $(\mathbf{oe}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3)$ dont la matrice de transformation est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

Solution:

1°)- Le tenseur déviateur et sphérique ?

$$\overline{\overline{\sigma(P)}} = \overline{\overline{\sigma_m I}} + \overline{\overline{\sigma_D}} \text{ avec } \begin{cases} \text{tr}(\overline{\overline{\sigma_D}}) = 0 \\ \overline{\overline{\sigma_m}} = \frac{I_1}{3} = 8 \end{cases}$$

Le tenseur sphérique ($\overline{\overline{\sigma_m I}}$).

$$\overline{\overline{\sigma_s}} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

Le tenseur déviateur des contraintes ($\overline{\overline{\sigma_D}}$):

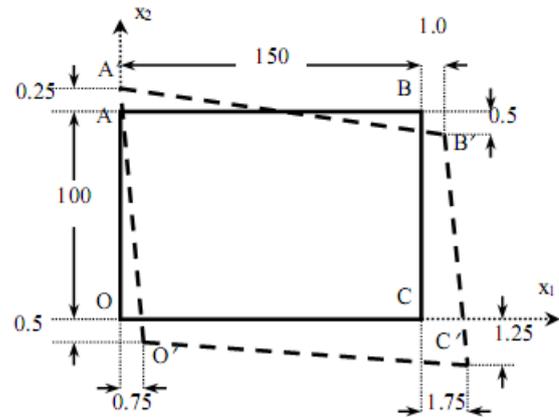
$$\overline{\overline{\sigma_D}} = \begin{pmatrix} 12-8 & 4 & 0 \\ 4 & 9-8 & -2 \\ 0 & -2 & 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

2°)- Le tenseur de contraintes $\overline{\overline{\sigma'}}$: $\overline{\overline{\sigma'}} = [C] \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot [C]^T$

$$\overline{\overline{\sigma'}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3\sqrt{2}+4}{2} & \frac{3\sqrt{2}-4}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}+4}{2} & 2\sqrt{2}+10 & -2 \\ \frac{3\sqrt{2}-4}{2} & -2 & -2\sqrt{2}+10 \end{bmatrix}$$

Exercice N°13:

Une plaque mince rectangulaire OABC de section initiale (150x100) mm² est déformée en O'A'B'C' tel que montré sur la figure ci-contre.



En supposant un champ des déplacements uniformes :

1°)-Déterminer les déformations dans le système d'axes (x₁, x₂) ?

2°)-Calculer les déformations principales et leurs orientations ?

Solution:

1°)-Les déformations dans le système d'axes (x₁, x₂) :

Les déformations longitudinales

$$\varepsilon_{x_1x_1} = \varepsilon_{AB} = \frac{U_B - U_A}{AB} = \frac{1 - 0}{150} = 6,67 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{x_2x_2} = \varepsilon_{CB} = \frac{V_B - V_C}{CB} = \frac{-0,5 - (-1,25)}{100} = 7,5 \cdot 10^{-3}$$

Les déformations angulaires

$$\gamma_{x_1x_2} = \frac{U_O - U_A}{OA} + \frac{V_O - V_C}{OC} = \frac{0,75 - 0}{100} + \frac{-0,5 - (-1,25)}{150} = 12,5 \cdot 10^{-3}$$

On prend $\gamma_{x_1x_2} = -12,5 \cdot 10^{-3}$ car l'angle CBA à augmente plus de 90°.

2°)-Les déformations principales et leurs orientations :

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{x_1x_1} + \varepsilon_{x_2x_2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{x_1x_1} - \varepsilon_{x_2x_2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{x_1x_2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 13,349 \cdot 10^{-3} \\ \varepsilon_2 = 0,821 \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta_p) = \frac{\gamma_{x_1x_2}}{\varepsilon_{x_1x_1} - \varepsilon_{x_2x_2}} \Rightarrow \theta_p = 43^\circ,10$$

Exercice N°14:

On donne une matrice de déformation dans les axes principaux :

$$[\varepsilon]_{xyz} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Le matériau a comme caractéristiques: **E= 200 GPa** et **ν=0.3**.

1°)- Calculer la matrice des contraintes correspondante ?

a)-En contraintes planes.

b)-En déformations planes.

Solution :

La matrice des contraintes correspondante :

Selon l'équation de Lamé:

$$[\sigma(\mathbf{M})] = \lambda \text{tr}[\varepsilon(\mathbf{M})][\mathbf{I}] + 2\mu[\varepsilon(\mathbf{M})]$$

Où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Ces constantes sont liées au module d'Young et le coefficient de Poisson par les relations :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

a)-En contraintes planes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800 + \varepsilon_{zz}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

De la résolution du système on trouve : ($\sigma_{xx} = 207 \text{ MPa}$; $\sigma_{yy} = 22 \text{ MPa}$ et $\varepsilon_{zz} = -343 \times 10^{-6}$)

$$[\sigma(P)] = \begin{bmatrix} 207 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} ; [\varepsilon(P)] = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -343 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

b)-En déformations planes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{200 \cdot 10^3}{1,3} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} + \frac{0,3 \times 200 \cdot 10^3}{1,3 \times 0,4} (800) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

De la résolution du système on trouve : ($\sigma_{xx} = 246 \text{ MPa}$; $\sigma_{yy} = 62 \text{ MPa}$ et $\sigma_{zz} = 92 \text{ MPa}$)

$$[\sigma(P)] = \begin{bmatrix} 246 & 0 & 0 \\ 0 & 62 & 0 \\ 0 & 0 & 92 \end{bmatrix} \text{ MPa} ; [\varepsilon(P)] = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Exercice N°15:

Une éprouvette cylindrique de ($\Phi=14mm$) et de longueur ($L=80mm$) est soumise à un effort de traction de ($8000 N$). L'allongement qui en résulte est de ($\Delta L=0.020$).

1°)- Déterminer les contraintes, les déformations infinitésimales et celles vraies ?

2°)- En déduire le module d'élasticité (E), Conclure ?

Solution :

1°)- Les contraintes et les déformations infinitésimales :

$$\varepsilon_{inf} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,02}{80} = 2,5 \cdot 10^{-4}$$
$$\sigma_{inf} = \frac{P}{S_0} = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = 51,97 MPa$$

Les contraintes est les déformations vraies :

$$\varepsilon_v = \ln(1 + \varepsilon_{inf}) = 2,499 \cdot 10^{-4}$$
$$\sigma_v = \sigma_{inf}(1 + \varepsilon_{inf}) = 51,98 MPa$$

2°)- le module d'élasticité (E) : selon la loi de Hooke on a ($\sigma = \varepsilon \cdot E$)

$$E_{inf} = \frac{\sigma_{inf}}{\varepsilon_{inf}} \cong 20,788 \cdot 10^4 MPa$$
$$E_v = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_v} \cong 20,80 \cdot 10^4 MPa$$

Conclusion : Dans le domaine élastique, le calcul infinitésimal est suffisant.

Exercice N°16:

En un point (**A**) d'un solide élastique homogène et isotrope de coefficient de Poisson ($\nu=1/3$), les déformations principales sont données dans le rapport:

$$(\varepsilon_3 \div \varepsilon_1 = 6 \div 10 ; \varepsilon_3 \div \varepsilon_2 = 6 \div 8 ; \varepsilon_2 \div \varepsilon_1 = 8 \div 10).$$

1°)- Trouver le rapport correspondant en contraintes ($\sigma_3 \div \sigma_2 \div \sigma_1$) ?

2°)- La contrainte de cisaillement maximale au point (**A**) est ($\tau_{max} = 5 N/mm^2$) et le module d'élasticité du solide est ($E= 2 \cdot 10^5 N/mm^2$), trouver les valeurs des contraintes et des déformations principales ?

Solution:

1°)- Le rapport correspondant en contraintes ($\sigma_3 \div \sigma_2 \div \sigma_1$) :

En utilisant les lois de comportement :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Pour ($\varepsilon_2 \div \varepsilon_1 = 8 \div 10$) on a :

$$(4 + 5\nu)\sigma_1 - (5 + 4\nu)\sigma_2 + \nu\sigma_3 = 0 \quad Eq(1)$$

Pour ($\varepsilon_3 \div \varepsilon_1 = 6 \div 10$) on a :

$$(3 + 5\nu)\sigma_1 + 2\nu\sigma_2 - (5 + 3\nu)\sigma_3 = 0 \quad Eq(2)$$

En divisant les deux équations (1) et (2) sur (σ_1), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (5 + 4\nu)\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \nu\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 4 + 5\nu \\ 2\nu\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - (5 + 3\nu)\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = -(3 + 5\nu) \end{cases}$$

Dont la solution donne :

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{16}{17} ; \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{15}{17}$$

Le rapport correspondant en contraintes est ($\sigma_3 \div \sigma_1 = 15 \div 17$; $\sigma_3 \div \sigma_2 = 15 \div 16$; $\sigma_2 \div \sigma_1 = 16 \div 17$).

2°)- Les valeurs des contraintes et des déformations principales :

$$\tau_{\max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} = 5 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3) = 10 \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{15}{17}$$

La solution est :

($\sigma_1 = 85 \text{ MPa}$; $\sigma_2 = 80 \text{ MPa}$; $\sigma_3 = 75 \text{ MPa}$) et ($\varepsilon_1 = 1,67 \times 10^{-4}$; $\varepsilon_2 = 1,33 \times 10^{-4}$; $\varepsilon_3 = 1 \times 10^{-4}$).

Exercice N°17:

La répartition des contraintes dans un corps solide déformable en équilibre statique sans effet des forces de volume est donnée par le tenseur suivant rapporté au repère ($oe_1e_2e_3$):

(L'état des contraintes est indépendant de l'axe vertical : oz)

$$\sigma = \begin{bmatrix} (2x + 2y)\beta & 2\beta\sigma_{12}(x, y) & 0 \\ 2\beta\sigma_{12}(x, y) & (2x - 4y)\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta y \end{bmatrix} \text{ Mpa} \quad \text{Avec : } \beta \text{ est constante réelle,}$$

La contrainte agissant au point $M(0,1)$ sur un plan verticale de normale inclinée de ($\pi/4$) par rapport à (ox), est une contrainte de cisaillement pure (τ).

1°)- Si ($\beta = 1/2$), Déterminer $\sigma_{12}(x, y)$ et donner la valeur de (τ)?

Solution:

$\sigma_{12}(x, y) = ?$ et (τ) = ?

Pour ($\beta = 1/2$) :

$$\sigma = \begin{bmatrix} (2x+2y) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) & 2\left(\frac{1}{2}\right)\sigma_{12}(x, y) & 0 \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)\sigma_{12}(x, y) & (2x-4y)\left(\frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(\frac{1}{2}\right)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+y) & \sigma_{12}(x, y) & 0 \\ \sigma_{12}(x, y) & (x-2y) & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} Mpa$$

Le tenseur des contraintes agissant au point $M(0,1)$:

$$\sigma[M(0,1)] = \begin{bmatrix} (0+1) & \sigma_{12}(0,1) & 0 \\ \sigma_{12}(0,1) & (0-2 \cdot 1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12}(0,1) & 0 \\ \sigma_{12}(0,1) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Mpa$$

Le système d'équation d'équilibre est donné par :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + F_z = 0$$

Le système d'équation d'équilibre devient (sans effet des forces de volume ($F_x=F_y=F_z=0$)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (x+y)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}(x,y)}{\partial y} &= 0 & 1 + \frac{\partial \sigma_{12}(x,y)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial (x-2y)}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial \sigma_{12}(x,y)}{\partial x} - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Le système d'équation d'équilibre agissant au point $M(0,1)$ devient :

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = -1 \Rightarrow \sigma_{12} = -y + f(x)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} = 2 \Rightarrow \sigma_{12} = 2x + c \quad \text{avec } c = \text{cte}$$

donc : $\sigma_{12} = 2x - y + c$ avec $f(x) = 2x + c$

$$\sigma[M(0,1)] = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12}(0,1) & 0 \\ \sigma_{12}(0,1) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1+c & 0 \\ -1+c & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Mpa}$$

La normale inclinée de $(\pi/4)$ par rapport à (ox)

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma[M(0,1)]\{\vec{n}\} = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1+c & 0 \\ -1+c & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} c \\ c-3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_n = \{\vec{n}^T\} \vec{T}(M, \vec{n}) \Leftrightarrow \sigma_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} c \\ c-3 \\ 0 \end{Bmatrix} = c - \frac{3}{2}$$

La contrainte est une contrainte de cisaillement pure : $\sigma_n = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \text{ MPa}$

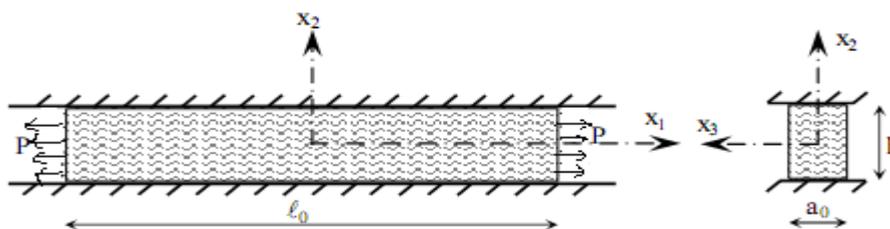
d'où $\sigma_{12}(x, y) = 2x - y + \frac{3}{2}$

La composante tangentielle est :

$$\|T\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{t}_n\|^2 \Rightarrow \|\vec{t}_n\| = \sqrt{\|T\|^2 - \sigma_n^2} = 1,5 \text{ MPa}$$

Exercice N°18:

Une plaque de hauteur h et de faible épaisseur $a_0 = 15 \text{ cm}$ devant une longueur $\ell_0 = 245 \text{ cm}$, est confinée entre deux solides infiniment rigides et soumise à une force uniforme P tel que montré sur la figure ci-dessous.



- 1°)- Quelles sont les composantes nulles des tenseurs des contraintes et des déformations.
- 2°)- Si on suppose que le matériau de la plaque est élastique et isotrope avec un module d'élasticité E et un coefficient de Poisson ν , déterminer en fonction de P , E et ν les composantes non nulles des deux tenseurs ?

3°)- Déterminer, en fonction de E , ν et des coordonnées (x_1, x_2, x_3) , les expressions des composantes u_1 , u_2 et u_3 du champ des déplacements ?

4°)- Si $E = 200 \text{ Mpa}$ et $\nu = 0.33$, calculer la force « P » nécessaire pour allonger la longueur de la plaque à $l = 290\text{cm}$?

5°)- Que devient alors la nouvelle épaisseur « a » de la plaque ?

Solution :

1°)- Les composantes nulles :

Les composantes de cisaillement et de glissement

$\epsilon_{22} = 0$ empêché par les deux solides

$\sigma_{33} = 0$ la plaque est libre de se dilater sur son épaisseur

2°)- Les composantes non nulles :

La force est uniforme $\sigma_{11} = P$; c'est une traction

σ_{22} fonction de σ_{11} et ν

On a $\epsilon_{ij} = [(1+\nu)/E] \cdot \sigma_{ij} - (\nu/E) \cdot \text{trace}(\sigma)$.

$\epsilon_{11} = \sigma_{11}/E - (\nu/E) \sigma_{22}$

$\epsilon_{22} = \sigma_{22}/E - (\nu/E) \sigma_{11} = 0$ donne $\sigma_{22} = \nu \sigma_{11} = \nu P$

$\epsilon_{33} = \sigma_{33}/E - \nu/E (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\nu \sigma_{11} (1 + \nu)/E = -\nu (1 + \nu) P/E$ et $\epsilon_{11} = (1 - \nu^2) P/E$

3°)- Déplacements:

$u_1 = \int \epsilon_{11} dx_1 = (P/E) (1 - \nu^2) x_1$ ne dépend pas des autres directions puisque pas de glissement.

$u_2 = \int \epsilon_{22} dx_2 = 0$

$u_3 = \int \epsilon_{33} dx_3 = (-P/E) \nu (1 + \nu) x_3$

4°)- Traction :

La déformation : $\epsilon_{11} = \Delta l/l_0 = (290 - 245)/245 = 0.184 = 18.4 \%$

D'où : $P = E \epsilon_{11} / (1 - \nu^2) \cong 41.30 \text{ MPa}$

5°)- Epaisseur finale :

$\epsilon_{33} = -\nu (1 + \nu) P/E = -0.091 = -9.1 \%$ d'où $a = a_0 (1 + \epsilon_{33}) \cong 14 \text{ cm}$.

Exercice N°19: flexion simple d'une poutre rectangulaire

On considère une poutre droite d'axe $(O; \vec{E}_1)$, de section rectangulaire (hauteur $2h$, épaisseur $2b$). Cette poutre est encastree dans un massif à l'abscisse $(x_1=0)$. L'extrémité libre est la seule supportant un chargement. D'autre part on suppose que les forces de volume sont nulles. On suppose que l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions de la poutre et qu'en conséquence, on peut faire l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

Nous adoptons la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi = \frac{P}{I} \left(\frac{h^2}{2} x_1 x_2 + \frac{l}{6} x_2^3 - \frac{x_1 x_2^3}{6} \right) \quad \text{avec} \quad I = \frac{(2b)(2h)^3}{12} = \frac{4}{3} b h^3$$

On constate aisément que la fonction ainsi définie est bi-harmonique.

- 1°)- Déterminer l'état de contrainte ?
- 2°)- Déterminer la tenseur déformation ?
- 3°)- Déduire le champ de déplacement ?
- 4°)- Déduire la déformée de la ligne moyenne ($x_2 = x_3 = 0$) ?
- 5°)- Déterminer la flèche à l'extrémité libre ?

Solution :

1°)- On peut alors déterminer l'état de contrainte obtenu :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{P}{I} (l - x_1) x_2 \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{P}{2I} (h^2 - x_2^2) \end{cases}$$

Cet état de contrainte est parfaitement compatible avec la condition de non chargement des faces supérieure ($x_2 = h$) et inférieure ($x_2 = -h$) de la poutre.

Pour la section extrémité ($x_1 = l$), on obtient un torseur équivalent avec un moment nul au centre de surface et une résultante n'ayant qu'une composante :

$$\int_S \overline{T(M; \vec{E}_1)} ds = -P \vec{E}_2$$

On peut donc considérer que la poutre est sollicitée en flexion simple. Il est à noter que l'état de contrainte ainsi obtenu est parfaitement en accord avec la théorie élémentaire des poutres.

Il reste à vérifier les conditions aux limites sur les déplacements et en particulier la condition d'encastrement de la section ($x_1 = 0$).

Il convient donc de calculer la forme générale du champ de déplacement. Toutefois, dans le cas d'élasticité plane, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode générale avec la détermination du tenseur antisymétrique. L'intégration peut se faire directement à partir des relations déplacements-déformations.

2°)- Dans notre exemple nous avons la tenseur déformation suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{P}{EI}(l-x_1)x_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = -\frac{\nu P}{EI}(l-x_1)x_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{12} = -\frac{(1+\nu)P}{2EI}(h^2-x_2^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$

3°)- Les deux premières équations nous permettent d'écrire :

$$u_1 = \frac{P x_2}{EI} \left(l x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) + f(x_2) \qquad u_2 = -\frac{\nu P}{EI} (l-x_1) \frac{x_2^2}{2} + g(x_1)$$

A partir de la troisième équation, on obtient :

$$\begin{cases} f(x_2) = -K x_2 + \frac{P}{2EI} \left[(2+\nu) \frac{x_2^3}{3} - 2(1+\nu) h^2 x_2 \right] + K_2 \\ g(x_1) = K x_1 - \frac{P}{2EI} \left(l x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} \right) + K_1 \end{cases}$$

Le champ de déplacement n'étant déterminé que par trois constantes, il est pratiquement impossible de respecter la condition d'encastrement pour tous les points de la section droite définie par $(x_1 = 0)$. Pour définir les constantes, on se contentera de donner leur valeur afin de respecter le non déplacement de certains points de la section origine. On peut écrire par exemple :

$$\begin{cases} u_1(0,0) = 0 \\ u_2(0,0) = 0 \\ u\left(0, \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 = 0 \\ K_1 = 0 \\ K = -\frac{P h^2 (4+5\nu)}{6EI} \end{cases}$$

4°)- On peut alors en déduire la déformée de la ligne moyenne ($x_2 = x_3 = 0$).

$$u_2(x_1, 0) = -\frac{P h^2}{6EI} (4+5\nu) x_1 - \frac{P}{2EI} \left(l x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} \right)$$

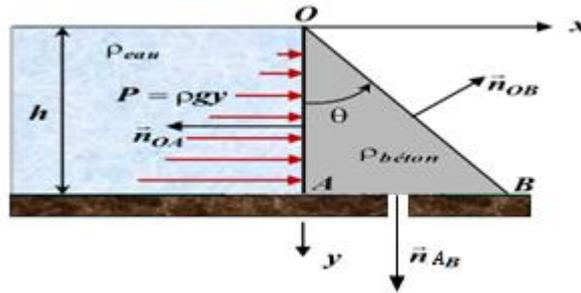
5°)- Ainsi la flèche à l'extrémité libre est :

$$u_2(l, 0) = -\frac{P h^2}{6EI} l (4+5\nu) - \frac{P l^3}{3EI}$$

Dans cette expression, le second terme correspond parfaitement à la valeur de la flèche donnée par la théorie élémentaire des poutres. Le premier terme apparaît donc comme un terme correctif vis à vis de cette théorie.

Exercice N°20: Conditions aux limites

Soit un barrage-poids schématisé de la façon suivante (voir figure ci-dessous). Ce barrage de section rectangulaire. **OAB** repose simplement sur le sol par son coté **AB**. De façon très schématique, un barrage-poids est un bloc (en maçonnerie ou en béton), assez lourd pour résister à la poussée qui cherche à le faire glisser sur sa base ou à la faire basculer.



Vue en plan barrage-poids

Le tenseur des contraintes donné comme suit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} MPa$$

1°)- Ecrire les conditions aux limites du problème dans le plan (\vec{X}, \vec{Y}) .

Solution :

Les conditions aux limites du problème dans le plan (\vec{X}, \vec{Y}) :

1. Conditions de chargement de la face **OA** :

Soit $\vec{n}_{OA} = (0, -1, 0)$ la normale à la face **OA**.

P la charge exercée par la pression d'eau en un point **M** de **OA** est donnée par :

$$P(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \vec{n}_{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho gy \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho gy \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22} = -\rho gy \end{cases}$$

Les conditions aux limites de la face **OA** sont :

$$\begin{cases} \sigma_{12}(0, y) = 0 & \forall y \text{ et } y \in [0, h] \\ \sigma_{22}(0, y) = -\rho gy & \forall y \text{ et } y \in [0, h] \end{cases}$$

2. Conditions de chargement de la face **OB** : cette surface n'est pas chargée donc le vecteur contrainte en un point M de cette surface est nul, soit $P(M)=0$.

Soit $\vec{n}_{OB} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ la normale à la face **OB**. Dans ce cas nous pouvons exprimer la relation géométrique suivante entre **x** et **y** : $x = y \cdot \tan\theta$

Les conditions aux limites de la face **OB** sont :

$$\begin{cases} -\sin \theta . \sigma_{11}(y.tg\theta, y) + \cos \theta . \sigma_{12}(y.tg\theta, y) = 0 & \forall y \text{ et } y \in [0, h] \\ -\sin \theta . \sigma_{12}(y.tg\theta, y) + \cos \theta . \sigma_{22}(y.tg\theta, y) = 0 & \forall y \text{ et } y \in [0, h] \end{cases}$$

3. Conditions de chargement de la face **AB** : sur cette face ne se passe rien volontairement, donc nous n'avons pas à exprimer de conditions aux limites.

Références Bibliographiques

- 1) Lyes KHEZZAR, Abdelkrim HADDAD, Mécanique des milieux continus (Cours et exercices corrigés). Office de publication universitaire, Algérie. Mars 2009.
- 2) Samir DEGHBODJ, Polycopie de cours mécanique des milieux continus Cours et applications, Université Larbi Tébessi de Tébessa, 2016.
- 3) A. ALLICHE, Mécanique des solides, élasticité - UPMC Paris 6.
- 4) Bennani A., Lafon-Jalby Y., Massenzio M., Ronel S. Elasticité linéaire (problèmes et corrigés). IUT-LYON1-GMP-DDS. 2013-2014.
- 5) Yves Debard, Elasticité Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique e-mail : yves.debard@univ-lemans.fr <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>, 24 mars 2006 – 21 novembre 2006
- 6) Yves Debard, Résistance des matériaux : élasticité, méthodes énergétiques, méthode des éléments finis Rappels de cours et exercices avec solutions Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html> 20 juin 2011
- 7) A.BENNANI - Y.LAFON-JALBY - M.MASSENZIO - S.RONEL, Elasticité linéaire problèmes et corrigés, semestre 3 module M3102. IUT Lyon 1.
- 8) Zahira BENADLA, Abdellatif MEGNOUNIF, Théorie de l'Elasticité annales des épreuves écrites 2017-2020, université d'abou bekr belkaïd - tlemcen.
- 9) Draïche Kada, Polycopié de Cours Mécanique des solides déformables « ELASTICITE I » Université Ibn Khaldoun Tiaret. Septembre 2016.
- 10) Abdelghani SEGHIR, Mécanique des Milieux Continus, Université A. Mira de Béjaïa <http://univ-bejaia.dz/a.seghir>
- 11) Abdellatif MEGNOUNIF, Théorie de l'Elasticité, Cours en ligne-2020, université d'abou bekr belkaïd - tlemcen.
- 12) Damien André, Résistance Des Matériaux, Module 425, Ecole d'ingénieurs, Université de Limoges, 26 octobre 2022.
- 13) Michel MAYA, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Arts et Métiers ParisTech, Centre d'Enseignement et de Recherche de CLUNY, Année scolaire 2014 – 2015.
- 14) Florence Elias, Elasticité, M2 Fluides Complexes et Milieux Divisés, Notes de cours 2017 – 2018.

- 15) Matteo Ciccotti, Mécanique des Solides et des Matériaux 2, Elasticité-Viscoélasticité, Plasticité-Rupture, ESPCI Paris - Laboratoire de Science et Ingénierie de la Matière Molle, Version: 04/01/2021.
- 16) James-A. Goulet, Module #8b, CIV1150 - Résistance des matériaux, Polytechnique Montréal, 2016.
- 17) LAURENT H., Mécanique des milieux continus, Université de Bretagne Sud Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingénieur, 2011-2012.
- 18) SIDOROFF F., Mécanique des milieux continus. Ecole centrale Lyon, Octobre 2010.
- 19) Thierry PALIN-LUC, Mécanique des solides déformables, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, CER de Bordeaux – Talence, Novembre 2007.
- 20) Nicolas Moës, Mécanique des milieux continus, Ecole d'ingénieur, Nantes, France. 2011.
- 21) Helmut Klöcker, Mécanique des milieux continus, Elasticité, Ecole des mines de Saint Etienne. 2015.
- 22) Florence Zara. Modèle mécanique d'une plaque mince. Doctorat. France. 2017.
- 23) UVSQ - Master SPI - M1ME220 Modèles Avancés en Mécanique des Solides.
- 24) Guy Caignaert et Jean-Pierre Henry, Exercices d'élasticité, 2^{eme} édition Dunod, Bordas, Paris, 1988.
- 25) https://dournac.org/sciences/Tensor_Calculus.pdf, Cours de Calcul Tensoriel avec Exercices corrigés.