République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

Université de Tissemsilt

Faculté des sciences et de la technologie

Département des sciences et de la technologie

QUELQUES NOTIONS FONDAMENTALES DANS L'ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS ET EXERCICES

Préparé par :

_ Nehari Mohamed

Année Universitaire 2021-2022

Préface

Ce polycopié est le fruit de l'enseignement de module "Algèbre linéaire" pendant des années. Je voulais enrichir la bibliothèque universitaire avec ce travail et aider nos chers étudiants dans ces études.

les étudiants des premières années de sciences et technologie et de sciences de la matière peuvent le profiter en cadre de module Maths 2, pour ce qui est de classes de deuxième année mathématiques et informatique ils trouvent ce qu'ils veulent.

Ce travail contient cinq chapitres, chaque chapitre est suivi par une série de questions de cours et part fois d'exercices d'applications.

Table des matières

Chapitre 1

Les espaces vectoriels et les applications linéaires

1. Les espaces vectoriels.

2. Les applications linéaires.

3. Les matrices.

Les espaces vectoriels ont été introduits par **Cayley** et **Grassmann** au milieu du XIX^e siècle. Cependant, le premier ne proposait qu'un calcul sur des n-uplets et la formalisation du second était des plus obscures. Ce fut l'œuvre de Giuseppe **Peano** de déchiffrer le travail du mathématicien allemand et de donner le premier, en 1888, une définition satisfaisante d'un espace vectoriel. Il introduisit les applications linéaires et montra que cette théorie ne se réduit pas à la dimension finie en citant l'exemple des polynômes. Giuseppe Peano est aussi connu pour son axiomatique des entiers naturels et pour avoir construit une courbe remplissant un carré. On lui doit d'astucieux contre-exemples qui ont remis en cause des assertions qui semblaient pourtant bien établies.

1.1 Espace vectoriel et application linéaire :

1.1.1 Espace vectoriel :

Définition 1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque.*
Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux lois, une loi interne $(+)$ qui fait de E un groupe abélien, est une loi externe $(\cdot)$

$$\begin{aligned} x : \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, x) &\longrightarrow \alpha \cdot x \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.
2. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$. $\quad \forall x, y \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
4. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$. *Ou* $1_{\mathbb{K}}$ *désigne l'élément unité de* $\mathbb{K}$.

Les élément de Esont appelés vecteurs, et ceux de $\mathbb{K}$ scalaires.

Exemple 1 *L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, définies par :*

$$(x, y) + \left(x^{\natural}, y^{6}\right) = (x + x') + (y + y')$$
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

$\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
Par contre $\mathbb{R}^{*2}$ muni de même lois n'est pas un $\mathbb{R}-$espace vectoriel car la loi de multiplicateur n'est pas externe. En effet :
Si : $\lambda = 0$ alors $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) = (0, 0) \notin \mathbb{R}^{*2}$.

Remarque 1 *$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $\mathbb{C}^n$ est $\mathbb{C}-$espace vectoriel .*

1.1.2 Application linéaire :

Définition 2 *Soient E, F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$.*
Une application linéaire (ou $\mathbb{K}-$linéaire)de E dans F est un homéomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi : E \longrightarrow F$ qui vérifié :
$\forall (x, y) \in \mathbf{E}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\boxed{\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \textit{et } \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).}$$

Ces deux propriétés peuvent se résume en une seule :

$$\boxed{\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y). \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.}$$

Définition 3 *Soient E et F deux espaces vectoriels.*
On appelle noyau de l'application linéaire $\varphi : E \longrightarrow F$, le sous ensemble de E d'ont l'image est 0_F. Donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in E : \varphi(x) = 0_F\}.}$$

L'image de φ c'est le sous ensemble $\varphi(E) \subset F$ définit par :

$$\boxed{\operatorname{Im} \varphi = \varphi(E) = \{y \in F / \exists x \in E : y = \varphi(x)\}.}$$

Corollaire 1 *Soit φ une application linéaire de E dans F :(Exercices de TD)*

1. *φ est injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} \varphi = \{0_E\}$.*
2. *φ est surjective $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} \varphi = F$.*

Définition 4

— *Un endomorphisme est une application linéaire de E dans lui même.*
— *Un isomorphisme est une application linéaire bijective de E dans lui même.*
— *Un automorphisme est une application linéaire de E dans lui même.*

1.1.3 Sous espaces vectoriels :

Définition 5 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, F est un sous ensemble de E.*
On dit que F est un sous espace vectoriel de E, si F est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel pour les lois induites par celles définis sur E.

Exemple 2 *$E = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.*
On considère le sous ensemble : $F = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.
Soient $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$.
Comme : $X - Y = (x_1 + 2x_2 - x_3) - (y_1 + 2y_2 - y_3) = 0$
alors : $X - Y \in F$ et $(F, +)$ est un groupe pour la loi additive et les axiomes d'une espace vectoriel sont vérifiées, donc $(F, +, \cdot)$ est un sous espace vectoriel.

Théorème 1 *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.*

1. *Pour q'une partie non vide F de Esoit un sous espace vectoriel de E il faut et il suffit que pour tous $x_1, x_2 \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on ait :*
$$\boxed{\alpha x_1 + \beta x_2 \in F.}$$
2. *L'intersection des sous espaces vectoriels de E est un sous espaces vectoriel.*
   — *La réunion d'une famille croissante(au sens de l'inclusion) de sous espaces vectoriel de E.*
3. *Le noyau d'une application linéaire de E dans F (telle que : E et F deux espace vectoriel) est un sous espace vectoriel de E.*
   — *L'image d'une application linéaire est un sous espace vectoriel de F.*

Exemple 3 *Soit $E = \mathcal{F}([-a, a], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définie sur $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
On désigne par $\mathcal{I}$ (respectivement $\mathcal{P}$) le sous ensemble de E formé des fonctions impaires (respectivement paires).
Les ensembles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des sous espaces vectoriels de E.
En effet : $\forall f, g \in \mathcal{I}$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on à :
$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(-x) &= \alpha f(-x) + \beta g(-x)\\ &= -\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)\\ &= -\left(\alpha f + \beta g\right)(x)\end{aligned}$$
donc : $(\alpha f + \beta g) \in \mathcal{I}$. (de même pour $\mathcal{P}$).

1.1.4 Somme directe

Définition 6 *L'espace vectoriel E est dit somme direct des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2, si et seulement si :*
$$\boxed{E_1 + E_2 = E \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0_E\}.}$$
On notera dans ce cas :
$$\boxed{E = E_1 \oplus E_2.}$$
Remarque 2 *Ainsi tout $x \in E$ admet une décomposition unique sous la forme :*
$$x = x_1 + x_2 \quad \text{telle que } : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2.$$
Exemple 4 *Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ les sous-espaces vectoriels des fonctions réelles impaires et paires sur l'espace vectoriel E.*
$\forall \varphi \in E$, on à :
$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} \quad , \quad g(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}$$
telle que : $f \in \mathcal{I}$ et $g \in \mathcal{P}$ et on à : $\varphi = f + g$.
Donc : $\mathcal{I} + \mathcal{P} = E$.
Comme on a la fonction nul est à la fois paire et impaire alors :
$$\mathcal{I} + \mathcal{P} = \{0_E\} \Longrightarrow \mathcal{I} \oplus \mathcal{P} = E.$$

1.1.5 Projections et projecteurs

Nous définissons ainsi deux endomorphisme P_1 et P_2 de E dans E tels que :
$P_1(x) = x_1 \quad P_2(x) = x_2$ ou : $x = x_1 + x_2$.

Définition 7 *L'application P_1 (respectivement P_2) est appelée la projection de E sur E_1 (respectivement E_2) parallèlement a E_2 (respectivement E_1).*
On remarque que :

$$\begin{array}{lcl} \operatorname{Ker} P_1 = E_2 & ; & \operatorname{Im} P_1 = E_1 \\ \operatorname{Ker} P_2 = E_1 & ; & \operatorname{Im} P_2 = E_2 \end{array}$$

ainsi tous vecteur $x \in E$ peut s'écrit sous la forme :

$$x = x_1 + x_2 = P_1(x) + P_2(x).$$

c-à-d :

$$\boxed{P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_E\,.}$$

Définition 8 *On appelle projecteur de E tout endomorphisme P de E vérifiant :*

$$\boxed{P \circ P = P \ \textit{ou : } P^2 = P.}$$

Définition 9 *(théorème) Si P est un projecteur, alors P est la projection sur $\operatorname{Im} P$ parallèlement à $\operatorname{Ker} P$.*

Définition 10 *(Généralité :) Tout élément $x \in E$ peut s'écrire sous la forme :*

$$x = \sum_{i=1}^{n}; \quad x_i \in E_i$$

1.1.6 Base et dimension

Définition 11 *Une partie $G = v_1, v_2, \cdots, v_p$ du $\mathbb{K}-$espace vectoriel est dit génératrice de E si tout élément de E peut s'écrire comme combinaisons linéaire des éléments de G c-a-d :*

$$\forall x \in E; \exists a_1, a_2, \cdots, a_p : x = \sum_{i}^{p} a_i v_i$$

Définition 12 *Une partie L du $\mathbb{K}-$espace vectoriel est dite libre, si pour tout famille des scalaire $(\lambda_i)_{i \in I}$ on à :*

$$\sum \lambda_i v_i = 0 \longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I.$$

Remarque 3 *Dans le cas contraire, on dit que L est une famille liée.*

Exemple 5 *Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$E = v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0$$

C'est la noyau de l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x, y, z) = x + y + 2z$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, d'autre part :

— *Tout vecteur $v \in E$ s'écrit sous la forme :*

$$v = (x,y,z) = (-y-2z, y, z) = y(-1,1,0) + z(-2,0,1) \\ = yv_1 + zv_2.$$

Tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linaire des vecteurs v_1 et v_2.

— *Les vecteurs v_1 et v_2 sont linéairement indépendants car :*
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ On a :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + 0\beta = 0 \\ 0\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Définition 13 *Une famille $B = (v_i)_{i \in I}$ d'élément du $\mathbb{K}-$espace vectoriel est une base de E si et seulement si :*

1. *B est une famille génératrice.*
2. *B est une famille libre.*

Exemple 6 *La famille $B = \{v_1, v_2\}$ de l'exemple précédent forme une base pour le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$.*

Théorème 2 *La famille $B = (v_i)_{i=1,\cdots,n}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de E est une base de E si et seulement si tout vecteur x de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire de $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.*
C-à-d :

$$\forall x \in E; \exists!\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n.$$

— *Les x_i sont appelés : coordonnées de x suivant B.*

Définition 14 *On dit qu'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille finie génératrice.*

Exemple 7 *Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, il est engendré par les vecteurs : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.*

Théorème 3 *(Théorème de la base incomplète). Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
$E \neq \{0_E\}$ de dimension finie, v une famille génératrice de E et L une famille libre contenue dans G alors : il existe une base finie B de E dont l'ensemble des élément contient L est contenu dans G, on note $L \subset B \subset G$. C-à-d : Si E est de dimension n, on complète L par $(n-p)$ élément de G pour obtenir une base de E.

Exemple 8 *On sait que l'ensemble $L = (1,0,0), (0,-2,0)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ donc on peut complète L un par troisième vecteurs $(0,0,3)$ de telle faccon que l'ensemble $B = (1,0,0), (0,-2,0), (0,0,3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Définition 15 *(Dimension) : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel telle que $E \neq \{0_E\}$.*
On appelle dimension de E sur $\mathbb{K}$ le nombre de vecteurs d'une base de E.
Ce nombre est noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ (ou $\dim E$).
Convention : $\dim \{0_E\} = 0$.

Exemple 9 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2; \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3; \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n.$
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1; \quad \dim_R \mathbb{C} = 2.$

Remarque 4

1. *Un sous espace vectoriel de dimension* 1 *est appelé : droite vectoriel.*
2. *Un sous espace vectoriel de dimension* 2 *est appelé : plan vectoriel.*
3. *Un sous espace vectoriel de dimension* $(n-1)$ *est appelé : uper plan.*

Proposition 1

Théorème 4 *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension* n*, alors :*

1. *Une famille libre de* n *vecteurs est une base de* E.
2. *Une famille génératrice de* n *vecteur est une base de* E.

Théorème 5 *Soient* E_1 *et* $E_2 2-$*sous-espace vectoriel de* E *qu'est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* $(E \neq \{0_E\})$ *de dimension finie :*

1. *Si :* $E_1 \subset E_2$ *et* $\dim E_1 = \dim E_2$ *alors :* $E_1 = E_2$.

Théorème 6 *Soient* E_1 *et* $E_2 2-$*espace vectoriel dans* E *qu'est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension quelconque :*

1. $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.
2. $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cup E_2)$.

1.1.7 Les matrices

Définition 16 *(Notation) Soient* E *et* $F 2-$*espace vectoriel de dimension* n, m *respectivement,* $B = (e_1, \cdots, e_n)$ *une base de* E *et* $B' = (e'_1, \cdots, e_n)$ *une base de* F.
Soit f *une application linéaire de* E *dans* F*, les vecteurs* $f(e_1), \cdots, f(e_n)$ *s'écrivent comme combinaison linéaire des vecteurs de* B'.
On à pour $j = 1, \cdots, n$ *:*

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \cdots + a_{ij}e'_i + \cdots + a_{mj}e'_m$$

Le tableau suivant de nombre suivant :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

est appelé : matrice associée a f *relativement aux bases* B *et* B'.

1. *On note cette matrice* (a_{ij})*, dans la notation* $a_{i,j}$*;* i *désigne l'indice de ligne et* j *l'indice de colonne et les* a_{ij} *sont appelés les termes de la matrice (ou les coefficients).*
2. $M_{m,n}(\mathbb{K})$ *désigne l'ensemble des matrices à* m *ligne,* n*colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
3. *Deux matrices sont égales si elles ont le même nombre de ligne et colonne, et si* $a_{ij} = b_{ij}$ *pour tout* $i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$.
4. *Une matrice* M *de type* (n, n) *est appelée : matrice carrée d'ordre* n.

— *La suite des éléments diagonaux* $(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ *est appelée : diagonal principale.*
— *La somme des élément diagonaux* $(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ *est appelée : trace de la matrice est notée :* $\mathrm{Tr}(M)$.
— *Un matrice est appelée diagonal si :* $a_{ij} = 0$ *lorsque* $i \neq j$.
— *Une matrice est appelée triangulaire inférieur si :* $a_{ij} = 0$ *lorsque* $i < j$.
— *Une matrice est appelée triangulaire supérieur si :* $a_{ij} = 0$ *lorsque* $i > j$.
— *La matrice carré diagonale d'ordre* n *dont tout les termes diagonaux sont égaux à 1 est appelée : matrice identité d'ordre* n*, on le note :* I_n.
— *Une matrice carrée est dite symétrique si :* $a_{ij} = a_{ji}$.
— *Une matrice carrée est dite antisymétrique si :* $a_{ij} = -a_{ji}$ *pour tout* $i, j \in [i, n]$.

1. *Addition de matrice : Si* $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *sont 2 matrice de type* (m, n)*, on pose* $A + B = C$ *avec :*
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

2. *Multiplication d'une matrice par un scalaire :*
Etant données un scalaire c *dans* $\mathbb{K}$ *et une matrice* A *de* $M_{m,n}(\mathbb{K})$.
On définit le produit de A *par* c *:*
$$c \cdot A = c \cdot (a_{ij}) = (ca_{ij}).$$

Théorème 7 $(M_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *de dimension finie* (m, n)*. Une base étant formée des matrice* (M_{ij}) *de type* (m, n)*, dont tout termes sont nuls saufle terme de la* $i-$*éme ligne et la* $j-$*éme colonne qui est égal à* 1.
La famille $(M_{ij})_{(i,j)} \in [1, m] \times [1, n]$ *est appelée : base canonique.*

3. *Produit matriciel :*
Soient $\mathbb{K}$ *un corps commutatif,* $A = (a_{ij})$ *une matrice de* $M_{m,n}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{ij})$ *une matrice de* $M_{n,p}(\mathbb{K})$*. (C'est-à-dire, telles que le nombre de colonne de* A *soit égal au nombre de ligne de* B*.)*
On définit alors le produit de A *et* B*, dans cet ordre par la matrice :*
$$C = A \cdot B = (c_{ij}) \text{ ou : } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \text{ pour tout : } i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, p.$$

Remarque 5 *En général s'il existe le produit de deux matrice n'est pas commutative.*

4. *Transposé d'une matrice :*
Soit $A = (a_{ij})$ *une matrice de* $M_{m,n}$.
La transposée de A *est la matrice notée :*
$${}^{t}A = (b_{kl}) \qquad \text{de } M_{n,m}(\mathbb{K}),$$
définit par :
$$b_{kl} = a_{lk} \quad \forall : k = 1, \cdots, k, \text{ et } l = 1, \cdots, n.$$

1.1.8 Relation entre une application linéaire et sa matrice

Théorème 8 *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies n et m, B une base de E et B' une base de F, alors l'application :*

$$\begin{aligned} U : L_{\mathbb{K}}(E,F) &\longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f &\longrightarrow M_f\left(B,B'\right), \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Remarque 6

1. *La bijection précédente dépend essentiellement du choix des bases E et F.*
2. *U étant linéaire, on à :*

$$M_{f+g}\left(B,B'\right) = M_f\left(B,B'\right) + M_g\left(B,B'\right) \quad \forall f,g \in L_{\mathbb{K}}(E,F).$$
$$M_{af}\left(B,B'\right) = aM_f\left(B,B'\right) \quad \forall a \in \mathbb{K}.$$

Proposition 2 *Soient E et F,G trois $\mathbb{K}-$espaces vectorielles de dimension finies, B_E et B_F et B_G les bases respectives de E,F et G*
$f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
Soient $M_f\left(B_E, B'_F\right)$ et $M_g\left(B_F, B'_G\right)$ les matrices respectivement avec les bases correspondantes, alors :

$$\boxed{M_{g\circ f}\left(B_E,B_G\right) = M_g \cdot M_f.}$$

Propriétés 1

1. *Si A est une matrice de type (n,p) : $\mathrm{Id}_n A = A = A\,\mathrm{Id}_p$.*
2. *Soient trois matrices A,B,C.*
   — *Si l'une des expressions $A(B+C)$ ou $AB+AC$ est définie l'autre l'est aussi et elle sont égales.*
   De même pour $(B+C)A$ et $BA+CA$.
   — *Si l'une des produits $(AB)C$ ou $A(BC)$ est définis, l'autre l'est aussi et on à l'égalité*
   $$(AB)C = A(BC).$$
   — *Si C est un élément de $\mathbb{K}$, on à :*
   $$C\cdot(AB) = (CA)\cdot B = A\cdot(CB).$$
3. *Si 0 désigne la matrice nulle on à :*
   $$A\cdot 0 = 0 \quad et 0\cdot A = 0.$$
   Mais $AB = 0$ n'entraîne pas $A = 0$ ou $B = 0$.

1.1.9 Notation matricielle d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectorielle de dimension n et p (respectivement). B_E est une base de E, B_F est une base de F, f est une application linéaire de E dans F,et A la matrice de f relativement aux bases B_E et B_F.
On pose $y = f(x)$ pour tout x dans E, et on désigne par X la matrice colonne des coordonnées de x suivant B_E et par Y la matrice colonne des coordonnées de y suivant B_F alors :

$$Y = A\cdot X.$$

1.1.10 Matrices carrées

L'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{K}$ est noté $M_n(\mathbb{K})$.
L'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ muni de l'addition et du produit des matrices est un anneau unitaire, l'élément unité est I_n.
On remarque que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension n et B une base de E, alors la matrice I_n n'est pas autre que la matrice $M_{\mathrm{Id}_E}(B, B)$ noté encore $M_{\mathrm{Id}_E}(B)$ ou Id_E désigne l'application identité dans E.

Définition 17 *(Matrice carrées régulières(ou inversible)) On dit qu'une matrice carrée d'ordre n, A est inversible ou régulière s'il existe une matrice carré B d'ordre n telle que :*

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A.$$

Si la matrice B existe, elle est unique et est notée A^{-1}.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ inversibles est noté : $GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème 9

1. *Soient E est $F2\mathbb{K}-$espace vectoriel de même dimension finie n, B_E est une base de E et B_F une base de F.*
   Soient f une application linéaire de E dans F et $A = M_f(B_E, B_F)$, alors : f est bijective si et seulement si A est inversible, et :
   $$A_{-1} = (M_f)^{-1} = M_{f^{-1}}.$$
2. *Si A et B sont des matrice inversibles d'ordre n, alors (AB) est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*
3. *Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
4. *$GL_n(\mathbb{K})$ muni du produit des matrices est un groupe.*

Définition 18 *(Matrice de passage :Changement de bases) Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n, B = e_1, e_2, \cdots, e_n$ une base de E et $B' = e'_1, e'_2, \cdots, e'_n$ une nouvelle base de E.*
On appelle matrice de passage de B à B' et on note la matrice $P = M_{\mathrm{Id}(B,B')}$.
La matrice P de passage de B à B' est la matrice dont les éléments des vecteurs colonnes sont les coordonnées de vecteurs de la nouvelles base B' par rapport à l'ancienne base B, autrement dit :

$$P = (P_{ij}) \text{ telle que : } e'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i.$$

Exemple 10 *E et F sont deux-espace vectoriels de dimension respectivement 3 et 2, f l'application linéaire de E dans F définie par :*

$$f(e_1) = U_1 + U_2 \quad , f(e_2) = 2U_1 \quad , f(U_3) = U_1 - U_2.$$

Considérons la nouvelle base : e'_1, e'_2, e'_3 de E et $U'1, U'2$ de F telle que :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad et : \quad \begin{cases} U'_1 = U_1 + U_2 \\ U'_2 = -U_1 + U_2 \end{cases}.$$

La matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) *a la base* (e'_1, e'_2, e'_3) *et la matrice suivante :*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base (U_1, U_2) *a la base* (U'_1, U'_2) *et la matrice suivante :*

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3 *Soient* E *un* $K-$*espace vectoriel,* B *et* B' *deux bases de* E *et* x *un élément de* E*. On désigne par* X *la matrice colonne des coordonnées de* x *suivant* B, x' *la matrice colonne des coordonnées de* x *suivant* B'*, et* P *la matrice de passage de* B *à* B'*, alors :*

1. P *est inversible et* P^{-1} *est la matrice de passage de* B' *a* B*.*
2. $X = PX'$ *et* $X' = P^{-1}X$*.*

Théorème 10 *Soient* E_1 *et* E_2 *deux* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension finies,* B_1 *et* B'_1 *deux bases de* E_1 *et* B_2, B'_2 *deux bases de* E_2*.*
Soient P *la matrice de passage de* B_1 *à* B'_1 *et* Q *la matrice de passage de* B_2 *à* B'_2*. Alors :*
Si f *est une application linéaire de* E_1 *dans* $E_2, A = M_f(B_1, B_2)$ *et* $B = M_f(B'_1, B'_2)$*, on à :*

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P,$$

autrement dit :

$$E_1 \xrightarrow{\mathrm{Id}E_1} E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{\mathrm{Id}_{E_2}} E_2.$$

Ce schéma indique la bases par rapport auxquelles les matrices sont écrites.
Cas particulier (important) : Soient un endomorphisme de E, B ***et*** B' ***deux bases de*** E*,* ***si*** $A = M_f(B)$ ***et*** $A' = M_f(B')$ ***et*** P ***la matrice de passage de*** B ***à*** B' ***alors les deux matrices*** A ***et*** A' ***sont liées par :*** $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$*.*

Définition 19 *(Matrices équivalentes-Matrices semblables :) Soient* A *et* B *deux matrices de* $M_{m,n}(\mathbb{K})$*. On dit que* A *et* B *sont équivalentes s'il existe deux matrices carrées* P *et* Q *inversible telles que :*

$$B = Q^{-1} \cdot A \cdot P,$$

ou : P *est d'ordre* $n; Q$ *est d'ordre* m*. Si* A *et* B *sont deux matrices carrées d'ordre* n*, on dit que* A *et* B *sont semblable s'il existe une matrice carrées* P *inversible d'ordre* n *telles que :*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Remarque 7

- *On à vu que deux matrices associées à une même application linéaire sont équivalentes, et l'inverse reste vraie.*
- *De même, deux matrice à un même endomorphisme sont semblables, l'inverse reste aussi vraie.*

Définition 20 *Rang d'une matrice. On appelle rang d'une matrice* A*, le rang des vecteurs colonnes de* A*.*
Autrement dit le rang de A *et le nombre maximum de vecteurs colonnes de* A *linéairement indépendants.*
On le note : $\mathrm{rg}(A)$*.*

Exemple 11 *Calculer le rang de la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d'ou :} \operatorname{rg}(A) = 2.$$

Proposition 4

i) *Si A est la matrice de type (m, n) d'une application linéaire f de E dans F par rapport à des bases B_E et B_F, alors :*
$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f).$$

ii)
$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\left({}^tA\right)$$

iii) *Le rang de A est égal au nombre maximum des vecteurs lignes de A linéairement indépendants.*
$$\operatorname{rg}(A) \leq m \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(A) \leq n.$$

iv) *Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles sont le même rang.*

Exercice 1 *Soient u et $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ ou : $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, montrer que :*

1. $\operatorname{rg}(\alpha u) = \operatorname{rg}(u); \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} - \{0_{\mathbb{K}}\}$.
2. $\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

Solution 1 *Soit $\alpha \in \mathbb{K} - \{0_{\mathbb{K}}\}$ donc $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}, (\alpha \cdot u) : E \to F$ telle que : $\forall x \in E; (\alpha u)(x) = \alpha \cdot u(x)$*

1. *$Im(\alpha u) = Im(u)$? $\quad (\alpha u) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$; car : $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.*
   Soit $(\alpha u(x)) \in Im(\alpha u) \Longrightarrow (\alpha u(x)) = u(\alpha x) \in Im(u)$. Soit $u(x) \in Im(u) \Longrightarrow u(x) = \alpha u\left(\alpha^{-1} x\right) \in (\alpha u)(E) = Im(\alpha u)$.
   Donc $Im(\alpha u) \subset Im(u)$ et $Im(u) \subset Im(\alpha u)$.
   Alors : $\dim Im(\alpha u) = \dim Im(u) \Longrightarrow \operatorname{rg}(\alpha u) = \operatorname{rg}(u)$.
2. *$(u + v) : E \longrightarrow F/(u + v)(x) = u(x) + v(x); \forall x \in E; (u + v) \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ espace vectoriel de $\mathbb{K}$ $Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)$?*
   Soit :

$$(u + v)(x) \in Im(u + v) \Longrightarrow (u + v)(x) = u(x) + v(x) \in Imu + Imv$$
$$\dim(u + v) \leq \dim(Imu + Imv) = \dim Imu + \dim Imv - \dim(Imu \cap \dim Imv)$$
$$\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) - \dim(Im(u) \cap Im(v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$
$$\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$$

Conclusion : L'application rg n'est pas linéaire.

1.2 Exercices

Exercice 2 *(Question de cours)*

1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.*
2. *L'ensemble $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *Le sous-espace vectoriel engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r.*

4. *Tout système de vecteurs qui engendrent un espace-vectoriel E de dimension finis n comporte exactement n vecteurs.*
5. *Si F est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension finie n, avec $\dim F = n$ alors : $F = E$.*
6. *Si F et G sont deux espaces vectoriels de E de dimension finie, tels que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$. Alors ils ont supplémentaires.*
7. *Si $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels fixés, l'ensemble formé des vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$ tels que :*
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n = b,$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de $\dim = 1$.

Exercice 3 *Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.*
Parmi les sous-ensemble suivants de E les quels sont des sous-espaces vectoriels ?

(a) $A = \{f \in E, f(1) = 1 + f(0)\}$.
(b) $B = \{f \in E, f(1) \geq f(0)\}$.
(c) $C = \{f \in E, \forall x \in \mathbb{R} : f(1-x) = f(x)\}$.
(d) $D = \{p \in E, \mathbf{p}$ *est un polynôme de degré* $\mathbf{n}\}$.
(e) $F = \{p \in E,$ *p est un polynôme de degré inférieur ou égale à* $\mathrm{n}\}$.

Exercice 4 *Les ensemble suivantes A, B et C sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Justifier en précisent $\mathbb{K}$.*

$$A = \left\{y \in \mathcal{C}^2; y'' + y = 0\right\}$$
$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x - y + z = 0 \text{ et } 2x - iy + z = 0\right\}$$
$$C = \{U_n; \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n\}.$$

Exercice 5 $F = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3/x$ *et* $y \in \mathbb{R}, \mathbb{R}^3$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$

1. *F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?*
2. *Trouver une partie generatrice de F ?. En déduire* $\dim F$.
3. $e_1' = (1,1,0)$ *et* $e_2' = (2,1,0) \in \mathbb{R}^3$, *montrer que* $F = [e_1', e_2']$.
4. $G = (0,0,z) \in \mathbb{R}^3$ *est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? En déduire* $\dim G = ?$.
5. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
6. *Compléter e_1', e_2' pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 6 *Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et* p *un projecteur de E (endomorphisme de E telle que : $p^2 = p$).*
Montrer que $E = \ker p \oplus Im$.

Exercice 7 *Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Considérons la matrice :*
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
et l'endomorphisme f de E, définie par $f(M) = N \cdot M$ pour tout élément M de E.

1. *Donner une base B de E et sa dimension.*
2. *Quelles est la matrice A de f relativement à la base trouvée B ?*

3. *Calculer la trace et le déterminent de A.*
4. *Lapplication f est-elle bijective ?*

Exercice 8 *Soit f l'endomorphisme qui est dans une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ d'un espace vectoriel E de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, a comme matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer les nombres réels a et b pour que le vecteur :*

$$e'_1 = e_1 + ae_2 + be_3 \text{ telle que } f(e'_1) = 0.$$

2. *On pose $e'_2 = f(e_2)$ et $e'_3 = f(e_3)$.*
   Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ forme une base de E.
3. *Ecrire la matrice A' de f suivant la base B'. En déduire $\ker f$ et Imf.*

Exercice 9 *Dans $\mathbb{R}^4$, on donne les vecteurs :*

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), v_2 = (1, 2, 3, 0), v_3 = (0, -1, 2, -2), v_4 = (3, 7, 7, 2), v_5 = (0, -9, -9, 6)$$

1. *Montrer que $v_4 \in [v_2, v_3]$ et que $v_5 \in [v_1, v_2]$.*
2. *Soient $F = [v_2, v_3, v_4]$ et $G = [v_1, v_5]$.*
   Trouver la dimension des sous-espaces $F, F + G$ et $F \cap G$.
3. *Montrer que le sous-espaces H engendré par le vecteur $v_6 = (1, 2, 3, 1)$ est supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F + G$, en déduire celui de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^4$.*

Chapitre 2

Déterminants

1. Généralités.

2. Déterminants.

3. Applications.

Le calcul du déterminant d'une matrice carrée est un outil nécessaire, tant en algèbre linéaire pour vérifier une inversibilité ou calculer l'inverse d'une matrice, qu'en analyse vectorielle avec, par exemple, le calcul d'un jacobien.

S'il existe une formule générale de calcul du déterminant, sa complexité en fait une technique difficile à mettre en ?uvre pour des matrices de grande taille. On lui préfère alors des méthodes de calcul plus simples comme la technique du pivot de Gauss.

2.1 Permutation-Transposition et Signature

Définition 21 *(Permutation) On appelle permutation de l'ensemble $X = 1, 2, \cdots, n$ tout application bijective :*

$$\sigma : 1, 2, \cdots, n \longrightarrow 1, 2, \cdots, n$$
$$P \longrightarrow \sigma(P).$$

L'ensemble des permutations de l'ensemble X est noté : S_n.

Exemple 12

$$\sigma : 1, 2, 3, 4 \longrightarrow 1, 2, 3, 4$$
$$\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3, \sigma(4) = 2.$$

Est une permutation contient a S_4.

Remarque 8 *L'ensemble S_n contient $n!$ éléments.*
La notation habituelle pour une permutation consiste a écrire dans une première rangé les entiers $1, 2, \cdots, n$ et au dessous leurs images comme suite :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple 13

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si σ_1 et σ_2 sont deux permutation de S_n on peut former la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$ par :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma_1 \circ \sigma_2(1) & \sigma_1 \circ \sigma_2(2) & \sigma_1 \circ \sigma_2(3) & \cdots & \sigma_1 \circ \sigma_2(n) \end{pmatrix}.$$

Exemple 14

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{1} & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

De même puisque σ est bijective on peut construire la permutation inverse σ^{-1}.

Exemple 15

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 22 *(Transposition) On appelle transposition une permutation qui change entre eux 2 élément et laisse fixes les autres.*
Les transpositions sont notée par : $\tau, t, \cdots$

Exemple 16

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 9

1. *Si τ est une transposition alors comme $\tau^2 = Id$ alors $\tau = \tau^{-1}$.*
2. *On peut obtenir une permutation en effectuant plusieurs transposition.*

Exemple 17

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5 *Toute permutation peut se décomposer en produit de transposition.*

Remarque 10 *La faccon de décomposer une permutation en produit de transposition n'est pas seul.*

Exemple 18

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \tau_1(1,4) \\ \tau_2(5,2) \\ \tau_3(5,3) \end{matrix}.$$

2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \tau_1(1,2) \\ \tau_2(4,2) \\ \tau_3(1,3) \\ \tau_4(1,5) \\ \tau_5(1,2) \end{matrix}.$$

$$\sigma = \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1; \quad \sigma = \tau_5 \circ \tau_4 \circ \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1.$$

Ce qu'est remarquable.

Théorème 11 *Soit σ une permutation.*
S'il existe une décomposition de σ ou un nombre paire (respectivement impair) de transposition alors tout autre décomposition de σ comportera un nombre paire (respectivement impaire) de transposition.
Par conséquent le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ (ou p est le nombre de transposition dans une décomposition de σ.
Le nombre $\varepsilon(\sigma)$ s'appelle signature de la permutation.

Preuve. Soit τ une transposition de $1, 2, \cdots, n$.
On a $\det\left(V_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \cdots, v_{\tau(n)}\right) = -\det\left(V_1, V_2, \cdots, V_n\right)$.
Soient 2 décompositions de σ quelconques en produit de transposition

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_p \quad ; \quad \sigma = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_q$$

Il suffit de montrer que $(-1)^p = (-1)^q$.
Soient $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et soit Δ le déterminant suivant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \det\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right) \\
&= \det\left(e_{\tau_1\circ\tau_2\cdots\tau_p(1)}, e_{\tau_1\circ\tau_2\cdots\cdots\tau_p(2)}, \cdots, e_{\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(1)}\right) \\
&= -\det\left(e_{\tau_2\cdots\tau_p(1)}, e_{\tau_2\cdots\tau_p(2)}, \cdots, e_{\tau_2\circ\cdots\circ\tau_p(1)}\right) \\
&\ \vdots \\
&= (-1)^p \det\left(e_1, e_2, \cdots, e_n\right) \\
&= (-1)^p,
\end{aligned}$$

de la même manière on trouve que $\Delta = (-1)^q = (-1)^p$. C.q.f.d. □

Corollaire 2

1. *Si τ est une transposition alors $\epsilon(\tau) = -1$.*
2. $\epsilon\left(\sigma_1 \circ \sigma_2\right) = \epsilon\left(\sigma_1\right) \times \epsilon\left(\sigma_2\right)$.
3. $\epsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \epsilon(\sigma) \quad \forall \sigma \in S_n$.
4. $\det\left(V_{\sigma(1)} V_{\sigma_2}, \cdots, V_{\sigma_n} = \epsilon(\sigma) \det\left(V_1, V_2, \cdots, V_n\right)\right.$.

2.1.1 Formule théorique du déterminant

Définition 23 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit par récurrence une application : det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la manière suivante :*

— *Si $n = 1$: c-à-d $A = (a_{11})$, alors $\det A = a_{11}$.*
— *Si $n = 2$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left(C_1, C_2\right).$$

Si $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned}
C_1 = (a_{11}, a_{21}) &= (a_{11}, 0) + (0, a_{21}) \\
&= a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) \\
&= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\
C_2 = (a_{12}, a_{22}) &= (a_{12}, 0) + (0, a_{22}) \\
&= a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1) \\
&= a_{12}e_1 + a_{21}e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A = \det\left(C_1, C_2\right) &= \det\left(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{21}e_2\right)\\ &= a_{11}a_{12}\det\left(e_1, e_1\right) + a_{11}a_{22}\left(e_1, e_2\right) + a_{21}a_{12}\det\left(e_2, e_1\right) + a_{21}a_{22}\det\left(e_2, e_2\right)\\ &= a_{11}a_{22}\det\left(e_1, e_2\right) - a_{21}a_{22}\det\left(e_1, e_2\right)\\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.\end{aligned}$$

— *Si $n = 3$:*

$$\begin{aligned}\det A = \det\left(C_1, C_2, C_3\right) &= \det\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1}e_i, \sum_{j=1}^{3} a_{j2}e_j, \sum_{k=1}^{3} a_{k3}e_k\right)\\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{i1}a_{j2}a_{k3}\det\left(e_i, e_j, e_k\right)\end{aligned}$$

1. *Si 2 indices sont égaux le terme $a_{i1}a_{j2}a_{k3}\det\left(e_i, e_j, e_k\right) = 0$.*
2. *Il reste les termes correspondants aux indices i, j, k variant entre 1 et 3 et différents entre eux, c-à-d toutes les permutations de $1, 2, 3$.*
   En échangeant de notation et on pose : $i = \sigma(1)$; $j = \sigma(2)$; $k = \sigma(3)$ d'où :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in S_3} a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\cdot a_{\sigma(3)3}\det\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\right)\\ &= \sum_{\sigma\in S_3} \epsilon(\sigma)a_{\sigma(1)}\cdot a_{\sigma(2)}\cdot a_{\sigma(3)}\det\left(e_1, e_2, e_3\right).\end{aligned}$$

On pose $i = \sigma(1); j = \sigma(2); k = \sigma(3)$ d'où :

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in S_3} a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\cdot a_{\sigma(3)3}\det\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\right)\\ &= \sum_{\sigma\in S_3} \epsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}\det\left(e_1, e_2, e_3\right),\end{aligned}$$

donc :

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_3} \epsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\cdot a_{\sigma(3)3}.$$

On à : $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ où :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}; \tau = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}; \tau = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$
$$\tau = \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}; \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}; \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

d'où $\epsilon\left(\sigma_1\right) = 1; \epsilon\left(\sigma_2\right) = -1; \epsilon\left(\sigma_3\right) = -1; \epsilon\left(\sigma_4\right) = -1; \epsilon\left(\sigma_5\right) = 1; \epsilon\left(\sigma_6\right) = 1$,
donc :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23}.$$

Proposition 6

1. *Le déterminant est une application linéaire par rapport à chaque colonne(on dit aussi multilinéaire) c-à-d :*
   Si $A = \|C_1, C_2, \cdots, C_n\|$ alors $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall k\in\{1, \cdots, n\}$:

a) $\det \|C_1, \cdots, \lambda C_k, \cdots, C_n\| = \lambda \det \|C_1, \cdots, C_k, \cdots, C_n\|$.

b) $\det \|C_1, \cdots, a_k + b_k, \cdots, C_n = \det\| C_1, \cdots, a_k, \cdots, C_n\| + \det \|C_1, \cdots, b_k, \cdots, C_n\|$.

2. *Si deux colonnes sont égales le déterminant est nul.*

Preuve.
1. Par récurrence sur **n** :

i) Pour $n = 1$: il y a rien a démontrer.

ii) Pour $n = 2$: C'est une simple vérification.

En effet :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+e & c \\ b+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}.$$

Ce qui montre la linéarité par rapport à la $1^{\text{ére}}$ colonne, de même pour la $2^{\text{éme}}$ colonne.

Enfin :

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

Et la propriété 2 est vérifiée.

Supposons que le théorème est vrai jusqu'à l'ordre $n-1$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons la linéarité de $\det A$ par rapport à la $k^{\text{éme}}$ colonne $k \in \{1, \cdots, n\}$.

D'autre part : supposons que $C_k = C_{k+1}$ et j différant de k et $k+1$.

On a la matrice A_{ij} définie par :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d'ordre $n-1$ à deux colonne égales.

donc d'après l'hypothèse de récurrence sont $\det = 0$.

Aussi dans le développement de de $\det A$ tous les termes du type $a_{1j} \det A_{1j}$ avec $j \neq k$ et $j \neq k+1$ sont nuls il reste :

$$\det (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k} + (-1)^{1+k+1} \det A_{1k+1} = 0.$$

□

Corollaire 3 *Si l'on échange entre elles deux colonnes le déterminant change de signe.*

Preuve. Remplaccons dans la matrice A les colonnes C_i et C_k par leurs somme. On à :

$$\begin{aligned} 0 &= \det \|C_1, \cdots, C_i + C_k, \cdots, C_i + C_k, \cdots, C_n\| \\ &= \underbrace{\det \|C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_i, \cdots, C_n\|}_{0} + \det \|C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_k, \cdots, C_n\| \\ &\quad + \det \|C_1, \cdots, C_k, \cdots, C_i, \cdots, C_n\| + \underbrace{\det \|C_1, \cdots, C_k, \cdots, \mathbf{C}_k, \cdots, C_n\|}_{0} \end{aligned}$$

Le $1^{\text{ére}}$ et le dernier terme étant nuls. d'où on obtient le résultat. □

2.1.2 Permutation des colonnes :

Soit $A = \|C_1, C_2, \cdots, C_n\|$ et A' la matrice obtenue en échangeant l'ordre des vecteurs colonnes de A.

Exemple 19 *Connaissant le* $\det \|C_1, C_2, C_3, C_4\|$ *et déterminant le* $\det \|C_4, C_3, C_1, C_2\|$. *On à :* $A' = \|C_4, C_3, C_1, C_2\| \overset{\textit{la colonne } 4 \textit{ et } 1}{\longrightarrow} \|C_1, C_3, C_4, C_4\| \overset{\textit{la colonne } 2 \textit{ et } 3}{\longrightarrow} \|C_1, C_2, C_4, C_3\| \overset{\textit{la colonne } 3 \textit{ et } 4}{\longrightarrow} \|C_1, C_2, C_3, C_4\|$.
a chaque transposition le déterminant change de signe donc : $\det A' = (-1)^3 \det A$.
conclusion : *Si τ est le nombre nécessaire de transposition pour passer de A à A' alors :* $\det A\,(A') = (-1)^\tau \det A$.

Théorème 12 *Soit $A = \|C_1, C_2, \cdots, C_n\| \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ alors :*

- *Les vecteurs $C_1, C_2, \cdots, C_n$ forme une base de $\mathbb{K}^n$ si est seulement si* $\det A \neq 0$.
- $\det A = 0$ *si et seulement si $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ est liée.*
- $\det A = 0$ *si et seulement si l'un des vecteurs C_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres.*

Preuve.$'' \Longrightarrow ''$
Supposons $C_k = \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n \lambda_i C_i$ par suite $A = \|C_1, \cdots, C_k, \cdots, C_n\|$.
En utilisant la linéarité de $\det A$ on à :

$$\det A = \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n \lambda_i \det \|C_1, \cdots, C_k, \cdots, C_n\|,$$

donc chaque terme de la somme est un déterminant avec deux colonnes égales donc il est nul, et par conséquent $\det A = 0$.
$'' \Longrightarrow ''$
Soit $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et montrons que si on avait $\det \|C_1, \cdots, C_k, \cdots, C_n\| = 0$ l'on aurait une contradiction.
Puisque $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ est une base tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaisons linéaire des élément de la base.
Soient $v_1 = \sum_{j=1}^n a_j c_j, v_2 = \sum_{k=1}^n b_k c_k, \cdots, v_n = \sum_{l=1}^n g_l c_l . n$ vecteurs quelconques de $\mathbb{K}^n$, on utilisant la linéarité par rapport à chaque colonnes :

$$\begin{aligned}
\det \|v_1, v_2, \cdots, v_n\| &= \det \left\| \sum_{j=1}^n a_j c_j, \sum_{k=1}^n b_k c_k, \cdots, \sum_{l=1}^n g_l c_l \right\| \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_j b_k \cdots g_l \|C_1, C_k, \cdots, C_l\|.
\end{aligned}$$

Or chaque terme de ce type $\alpha \det \|C_1, C_k, \cdots, C_l\|$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $j, k, \cdots, l \in 1, 2, \cdots, n$.

- Si deux indices sont égaux alors : $\|C_j, C_k, \cdots, C_l\| = 0$.
- Si tous les indices sont différents, $\|C_j, C_k, \cdots, C_l\|$ est obtenu par permutation des colonnes de la matrice $\|C_1, C_2, \cdots, C_n\|$, puisque le déterminant de celles ci à été supposé nul. Le terme $\alpha \|C_j, C_k, \cdots, C_l\| = 0$, et finalement $\det \|v_1, v_2, \cdots, v_n\| = 0$ mais ceci est impossible car $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont des vecteurs arbitraires.
  Il suffit de prendre pour $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ la base canonique $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$, $\det \|e_1, e_2, \cdots, e_n\| = 1$.

$\square$

Exemple 20 *La famille* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *de* $\mathbb{R}$ *est elle de* $\mathbb{R}^2$ *avec :*

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors :

$$\det \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Exemple 21

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{3} & 10 & 2 \\ \boxed{5} & 11 & -1 \\ \boxed{4} & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 10 & 2 \\ \boxed{3} & 11 & -1 \\ \boxed{2} & 7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boxed{2} & 10 & 2 \\ \boxed{2} & 11 & -1 \\ \boxed{2} & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Proposition 7 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *alors :*

$$\det A \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Théorème 13 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *alors :*

$$\det({}^tA) = \det A.$$

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ telle que : $A = (a_{ij})$, posons ${}^tA = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $b_{ij} = a_{ij}; \forall i, j$:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \qquad \text{(par définition.)}$$

Soit $\sigma \in S_n$.
$a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{\sigma(\sigma^{-1}\sigma^{-1})} \cdot a_{\sigma(\sigma^{-2}\sigma^{-2})} \cdots a_{\sigma(\sigma^{-n}\sigma^{-n})}$. Car on à seulement permuté les facteurs de fait que $\sigma \in S_n$ et $\mathbb{K}$ commutatif alors :

$$a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} f : S_n &\Longrightarrow S_n \\ \sigma &\Longrightarrow f(\sigma) = \sigma^{-1} \end{aligned}$$

f est une application bijective,
en effet :

1.
$$\begin{aligned} f(\sigma_1) = f(\sigma_2) &\Longrightarrow \sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1} \\ &\Longrightarrow \sigma_1 \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \\ &\Longrightarrow \mathrm{Id} = \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1} \\ &\Longrightarrow \mathrm{Id} \circ \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_2 \\ &\Longrightarrow \sigma_2 = \sigma_1. \end{aligned}$$

   f est injective.

2. Soit $\sigma \in S_n$ or $\sigma^{-1} \in S_n \Longrightarrow \exists f\left(\sigma^{-1}\right)=\left(\sigma^{-1}\right)^{-1}=\sigma$.
   Donc lorsque σ parcourt S_n, σ^{-1} parcourt lui aussi S_n. Or : $\epsilon\left(\sigma_{-1}\right)=\epsilon(\sigma)$ alors :

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon\left(\sigma^{-1}\right) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon\left(\sigma^{-1}\right) b_{\sigma^{-1}(1)1} \cdot b_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots b_{\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \det\left({}^tA\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 14

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \det(A \cdot B)=\det A \cdot \det B.$$

Preuve. Soient $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ telle que : $a_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}; \quad \forall i=1, \cdots, n$

$B=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ telle que : $b_i=\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}; \quad \forall i=1, \cdots, n.$

Posons : $C=A \cdot B=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ telle que : $c_{ik}=\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$.

$$c_k=\begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{jk} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} b_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} b_{jk} \end{pmatrix}=\sum_{j=1}^n b_{jk}\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

$$c_k=\sum_{j=1}^n b_{jk} a_j.$$

$$\begin{aligned}
\det(A \cdot B)=\det(C) &= \det\left(c_1, c_2, \cdots, c_n\right) \\
&= \det\left(\sum_{j=1}^n b_{j1} a_{j1}, \sum_{l=1}^n b_{L2} a_l, \cdots, \sum_{i=1}^n b_{in} a_i\right) \\
&= \sum_{j,l,i=1}^n b_{j1} \cdot b_{l2} \cdots b_{in} \cdot \det(a_{j1}, a_l, \cdots, a_i) \\
&= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} . b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}}_{\det(B)} \cdot \underbrace{\det(a_1, a_2, \cdots, a_n)}_{\det(A)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Conséquence 1

1. *Le* det *est une application multi linéaire de chaque ligne.*
2. *Si une matrice a* 2 *lignes égales, le det est nul.*
3. *Le* $\det \neq 0$ *si est seulement si les vecteurs lignes sont indépendants.*
4. *Touts les propriétés relativement aux colonnes sont vraie pour les lignes.*

Remarque 11 *D'après la propriété de* ${}^tA$*, tout ce qui a été dit précédemment concernant les colonnes d'un* det *peut s'appliquer par transposition aux lignes.*

Corollaire 4 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible si et seulement si :* $\det A \neq 0$ *et on à :*
$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Preuve.

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\Longrightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : A \cdot A^{-1} = I_n \\ &\Longrightarrow \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det I_n \\ &\Longrightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \\ &\Longrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 5 *2 matrice semblable ont le même déterminant.*

Preuve.
Soient A et B2 matrice semblable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donc il existe P inversible telle que :

$$\begin{aligned} B = P^{-1} \cdot A \cdot P \Longrightarrow \det B &= \det\left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right) \\ &= \frac{1}{P} \cdot \det A \cdot P \\ &= \det A. \end{aligned}$$

Ce corollaire permet de de poser la définition suivante : □

Définition 24 *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel de dimension finie :* $f : E \longrightarrow E$ *un endomorphisme de* E*, on à alors :*
$\det f = \det \mathcal{M}_f(B)$ *où* B *est une base quelconque de* E*.*

Proposition 8

1. $\det\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \cdots, f\left(x_n\right)\right) = \det f \cdot \det B_E\left(x_1, \cdots, x_; n\right) \quad f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
2. $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.
3. $\det f^{-1} = [\det f]^{-1}$.

Remarque 12 *Le déterminant ne dépend pas de la base choisie.*
c-à-d : $\det f = \det \mathcal{M}_f(B) = \det \mathcal{M}'_f\left(B'\right)$

Théorème 15 *(Calcul de l'inverse d'une matrice) Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\operatorname{cof}\left({}^tA\right)$ *la matrice obtenue de* ${}^tA$ *en remplaccant chaque élément de* ${}^tA$ *par son cofacteur.*
On à : $A \cdot \operatorname{cof}\left({}^tA\right) = \operatorname{cof}\left({}^tA\right) \cdot A \cdot A = \det A \cdot I$.
En particulier si A *est inversible i.e :* $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{cof}\left({}^tA\right).$$

Exemple 22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a det $A = -3 \neq 0$ *alors* A *est inversible.*

$$^{t}A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{1} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{-1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} \end{pmatrix},$$

donc :

$$\operatorname{cof} {}^{t}A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Donc : $\operatorname{cof}({}^{t}A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ *d'où :*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Formule de calcul d'un déterminant par blocs :

Théorème 16 *Soit la matrice carrée :* $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *où :* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}); C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et le* 0 *la matrice nulle de* $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(q,p)$ *alors :*

$$\det M = \det A \cdot \det B.$$

Preuve. En considère les notation ci-dessus on à : $n = p + q$.
Soit $B_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n = E$.
Posons : $E_1 = [\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}]$ et $E_2 = [\{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}]$ alors :E $= E_1 \oplus E_2$.
Posons : $B_1 = \{e_1, \cdots, e_p\}$ base de E_1 et $B_2 = \{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n\}$ base de E_2.
$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (C_{ij})$ alors :

$$x_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{pj}, 0_k, \cdots, 0_k) \in E_1 \Longrightarrow x_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i$$

$$y_j = (0_k, \cdots, 0_k, b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{qj}) \in E_2 \Longrightarrow y_j = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} e_{i+p}$$

$$z_j = (a_{1j}, \cdots, c_{pj}, \cdots, 0_k) \in E_1 \Longrightarrow z_j = \sum_{i=1}^{p} c_{ij} e_i$$

d'où :

$$\begin{aligned}\det M &= \det_{B_E}(x_1, x_2, \cdots, x_p, z_1 + y_1, \cdots, z_q + y_q)\\ \det A &= \det_{B_1}(x_1, x_2, \cdots, x_p)\\ \det B &= \det_{B_2}(y_1, y_2, \cdots, y_p).\end{aligned}$$

□

2.2 Exercices

Exercice 10 *Calculer les déterminant suivants :*

$$a)\begin{pmatrix} 0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad b)\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{pmatrix}$$

Exercice 11 *Calculer les déterminants d'ordre* 4 *et* $n+1$ *respectivement :*

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ a & b & c & d\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad b)\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n\\ 1 & x & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x & x_n\\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x\end{pmatrix}$$

Exercice 12 *Calculer* D_n *et* D'_n *en fonction de* n *:*

$$D_n = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & 0 & 0\\ a & 2a & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & 2a & a & \cdots & 0\\ \cdot & 0 & a & 2a & \cdots & \cdots\\ \cdot & \cdot & 0 & a & \cdots & \cdot\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 2a\end{pmatrix};$$

$$D'_n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0\\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdot & \cdot\\ \cdot & 0 & -1 & \cdots & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x\end{pmatrix}$$

Exercice 13 *Calculer le déterminant d'ordre* n *suivant :*

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 2 & 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 2\\ 2 & 2 & 3 & 2 & \cdot & \cdot & 2\\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & \cdot & 2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdot & \cdot & 2 & n\end{pmatrix}.$$

Exercice 14 *Soit* $D = \left(\begin{array}{c|c} A & B\\ \hline 0 & C\end{array}\right)$ *avec* $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ *et* $C \in M_{n-k}(\mathbb{K})$.

a) Montrer que $\det D = \det A \cdot \det C$.

b) Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *:*

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & C \end{array}\right) = \det(A+B) \cdot \det(A-B).$$

Chapitre 3

Système d'équation linéaire

1. Méthode de Cramer.

2. Méthode de Roché-Fontené.

3.1 Introduction :

Vous avez appris à, résoudre les systèmes d'équations linéaire par plusieurs méthode, mais ces méthode n'est pas simples par fois, surtout elle ne permettant pas de savoir a priori si le système admet ou non des solutions.
Le déterminant fournisse un outil efficace et indispensable pour la discussion des système linéaire :

- Ils permettant d'avoir les conditions de compatibilité sous forme de relation lient les coefficient.
- Ils fournissent des formules qui donnent explicitement la solution.

3.2 Définition et interprétation

Définition 25 *Un système linéaire de n équation et p inconnues sur le corps $\mathbb{K}$ et de la forme :*

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

telle que : a_{ij}, b_j et $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^p$.
On appelle solution de système (s) tout vecteur $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^p$ dont les composantes x_i satisfont toutes les équations.
Le système (s) est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Remarque 13 *L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équation les opérations élémentaire suivantes :*

1. *Change l'ordre des équations.*
2. *Multiplier une équation par un scalaire non nul.*
3. *Ajouter a une équation une combinaison linéaire des autres.*

Remarque 14 *Le système (S) peut êter envisagé forme :*

1. *La forme matricielle :*
   pour :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}),$$

   on à : $(S) \iff A \cdot X = B$. *Cas particulier : Si* $B = 0$ *alors* $A \cdot X = 0$ *s'appelle système homogène.*

   Définition 26 *On appelle rang du système* (S) *le rang de la matrice* A.

2. *La formule vectoriel :*

   Notons $A = \|C_1, C_2, \cdots, C_p\|$ *telle que :* C_i *la* i^{ieme} *colonne de* A *et* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

   donc le système (S) *peut s'écrit :*

$$(S) \Longrightarrow x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_p C_p = b.$$

Remarque 15 *Pour que le système* (S) *soit compatible il faut est il suffit que :* $b \in < C_1, \cdots, C_p >$

3.3 Résolution du système S :

1. Système de Crame : (cas particulier :)

— **Définition 27** *On appelle système de cramer un système linéaire dont la matrice* A *est carrée et inversible.*
Il agit donc d'un système de n *équation en inconnues de range* n.

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \textit{avec } \det A \neq 0.$$

— Résolution de système de cramer :

a. Sous forme matricielle le système s'écrit :

$$A \cdot X = B \iff X = A^{-1}B$$
$$\Longrightarrow x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_j \det A_{ij}.$$

b. Sous forme vectorielle s'écrit : $x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_n C_n = b \Longrightarrow$ admet une solution si : $b = \sum_{k=1}^{n} x_k C_k$. Or :

$$\det \|C_1, C_2, \cdots, C_i, b, C_{i+1}, \cdots, C_n\| = \det \left\| C_1, \cdots, C_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} x_k C_k, C_{i+1}, \cdots, C_n \right\|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \det \|C_1, C_2, \cdots, C_{i-1}, C_k, C_{i+1}, \cdots, C_n\|$$

pour $k \neq i$, les déterminant de cette somme sont nuls (2 colonnes égales).
Il reste le terme $k = i$ c-à-d : $x_i \det A$. Ainsi : $\det \|C_1, C_2, \cdots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \cdots, C_n = x_i \det A$,
d'où :

$$x_{i=1} = \frac{\det \|C_1, \cdots, C_{i-1}, b, C_{i+1}, \cdots, C_n\|}{\det A}$$

Remarque 16 *Un système de cramer admet toujours une est une seule solution.*

Exemple 23 *Soit le système :*

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4y = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases},$$

alors : $\det A = -46$ *donc :*

$$x = \frac{\Delta x}{\det A}, y = \frac{\Delta y}{\det A}, z = \frac{\Delta z}{\det A}.$$

On trouve que : $(x, y, z) = (5, 1, 1)$.

2. Le système de Rouché-Fontené :(Cas génerale)
   - **Définition 28** *Considérons un système de n équation et p inconnues de rang r :*

$$(S_2) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \textit{ainsi : } \mathrm{A_r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Soit $A_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ la sous matrice de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que $\det A \neq 0$. *Le déterminant de la matrice A_r s'appelle le mineure de A.*

Définition 29 *Soit A est une matrice et δ un mineure d'ordre $r$extrait de A. On appelle bordant de δ tout mineure de d'ordre $r+1$ extrait de A.*

Exemple 24

$$\textit{Soit : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{et } : \delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Les bordant de δ sont :
En bordant avec la 3^{ieme} ligne :

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ \hline 3 & -1 & 2 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline 3 & -1 & -1 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \hline 3 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

En bordant avec la 4^{ieme} ligne :

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 4 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ \hline 3 & -1 & -1 \end{array}\right| ; \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ \hline 4 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Remarque 17 *Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et δ est un mineur d'ordre r il y a exactement $(n-r)(p-r)$ dans A.*
Résolution de système :
Le système $x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p = b$ est compatible si et seulement si : $b \in$ Vect $\{C_1, C_2, \cdots, C_p\}$ or la famille : $\{C_1, C_2, \cdots, C_p\}$.
a rang r puisque $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} \\ a_{r1} & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$; donc : $\{C_1, C_2, \cdots, C_r\}$ est une famille libre et donc une base de Vect $\{C_1, C_2, \cdots, C_r\}$ donc $b \in \mathrm{Vect}\,\{C_1, C_2, \cdots, C_r\}$ ssi tous les bordants de S sont nuls c-à-d :

$$\Delta_S = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ \hline a_{s1} & \cdots & a_{sr} & b_s \end{array}\right| = 0; \quad s = r+1, \cdots, n.$$

Théorème 17 *Les déterminant Δ_s sont dites déterminant caractéristiques leur annulation est donc une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit compatible.*
Recherche effective de la solution : Considérons le système (S_2) dans lequel on suppose que la matrice encadrée à un déterminant non nuls et supposons réalisée la condition de compatibilité.
Soit la matrice

$$B = \|C_1, C_2, \cdots, C_p\| = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rp} & b_r \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice à rang r, car $C_{r+1}, C_{r+2}, \cdots, C_p, b \in \mathrm{Vect}\,\{C_1, C_2, \cdots, C_r\}$ et les vecteurs $\{C_1, C_2, \cdots, C_r\}$ forment un système libre, donc les lignes de B forment une famille libre de rang r, donc les $n-r$ derniers lignes sont combinaison linéaire des r premières ceci veut dire que dans le système (S_2), les dernières $n-r$ équation s'obtiennent comme combinaison linéaire des autres et par conséquent, elle peuvent être éliminées, aussi le système (S_2) :

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \left|\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1r}x_r \\ \vdots & & & & \\ a_{1r}x_1 & + & \cdots & + & a_{rr}x_r \end{array}\right| \begin{array}{lllll} + & \cdots & + & a_{1p}x_p = & b_1 \\ & & & \vdots & \vdots \\ + & \cdots & + & a_{rp}x_p = & b_r \end{array} \right. \quad (S_2')$$

- *Ces équations sont dites équations principales.*
- *Les inconnues qui y interviennent c-à-d : $x_1, x_2, \cdots, x_r$ sont dites inconnues principales.*
- *Les autres variables libres.*

Remarque 18 *Pour calculer la solution, on donne au variables libres $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_r$ des variables arbitraires. c-à-d :*

$$x_{r+1} = \lambda_{r+1}, x_{r+2} = \lambda_{r+2}, \cdots, x_p = \lambda_p. \quad (\lambda_i \in \mathbb{K})$$

Le système (S_2') s'écrit alors :

$$(S_2'') : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}\lambda_{r+1} - \cdots - a_{1p}\lambda_p \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_r - a_{rr+1}\lambda_{r+1} - \cdots - a_{rp}\lambda p \end{cases}$$

On obtient ainsi un système de Cramer, lequel admet une et une solution unique pour chaque choix de $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_p$ la solution dépend donc des $p-r$ constantes que l'on a fixés, on dit que l'on à une indétermination d'ordre $p-r$.
On peut résumer les résultats dans le théorème suivant :

Théorème 18 *(Théorème de Rouché-Fontené) Soit :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rp}x_p = b_r \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nr}x_r + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Un système de n équation et p inconnus de rang r.

a. *On extraite du système un mineur δ d'ordre r non nul.*
   Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que δ est le mineur encadré :

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

b. *Le système est compatible ssi toutes les déterminants caractéristiques associes à δ sont nuls :*

$$\Delta_s = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ \hline a_{s1} & \cdots & a_{sr} & b_s \end{array}\right| = 0 \quad (s = r+1, \cdots, n).$$

c. *Si cette condition est réalisée le système est équivalent au système principales :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rp}x_p \end{cases}.$$

Exemple 25 *Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les système :*

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - y + 2z &= \boxed{3} \\ 2x + 2y + z &= \boxed{2} \\ x - 3y + z &= \boxed{4} \end{cases}.$$

On a : $\det M = 0$ *ou :*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Le déterminant caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$$

Donc le système est impossible.

Exemple 26 *Soit le système :*

$$(S_2) : \begin{cases} 4x - 6y + 7z & = \boxed{8} \\ x - 2y + 6z & = \boxed{4} \\ 8x - 10y - 3z & = \boxed{8} \end{cases}$$

alors : $\det M = -2 \neq 0$ *ou*

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \\ 4 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Or : $\Delta_2 = \det(M_2) = -2 \neq 0.$
Le déterminant caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & \boxed{8} \\ 1 & -2 & \boxed{4} \\ 8 & -10 & \boxed{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc le système est possible.
Pour : $z = \lambda$ *on* a *:*

$$\begin{cases} 4x - 6y = 8 - 7\lambda \\ x - 2y = 4 - 6\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 11\lambda - 4 \\ y = \dfrac{17\lambda - 8}{2}. \end{cases}$$

3.4 Exercices

Exercice 15 *Résoudre les équations linéaires suivants :*

$a)\begin{cases} 2x + y - 3z & = 5 \\ 3x - 2y + 2z & = 5 \\ 5x - 3y - z & = 16 \end{cases}$; $b)\begin{cases} 2x + 3y & = 3 \\ x - 2y & = 5 \\ 3x + 2y & = 7 \end{cases}$; $c)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 & = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = 5 \end{cases}$

Exercice 16 *Résoudre et discuter suivant les paramètres m et α les système d'équation linaires suivants :*

$a)\begin{cases} -mx + y - mz & = 0 \\ x + my - z & = -m \\ 2x + y - z & = 1 \end{cases}$; $b)\begin{cases} 2x + my - z & = a \\ x + my + z & = b \\ 3x + y - mz & = c \end{cases}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$c)\begin{cases} -\alpha x + y - \alpha y & = 0 \\ x + \alpha y - z & = -\alpha \\ 2x + y - z & = 1 \end{cases}$; $d)\begin{cases} x + y + (1 - 2\alpha)z & = 2(1 + \alpha) \\ (1 + \alpha)x - (1 + \alpha)y + (2 + \alpha)z & = 0 \\ 2x - 2\alpha y + 3z & = 2(1 + \alpha) \end{cases}$

Exercice 17 *Résoudre et discuter selon les valeurs du paramètre réel λ le système suivant :*

$$(S_\lambda) = \begin{cases} (2\lambda+1)x - \lambda y + (\lambda+1)z & = \lambda - 1 \\ (\lambda-2)x + (\lambda-1)y + (\lambda-2)z & = \lambda \\ (2\lambda-1)x + (\lambda-1)y + (2\lambda-1)z & = \lambda \end{cases}$$

Exercice 18 a) *Soient a, b deux nombres réels. Trouver le rang de la matrice :*

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix},$$

suivant les valeurs de a, b.

b) *Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Résoudre et discuter le système : $M(a,b) \cdot X = Y$.*

c) *Si $M(a,b)$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un endomorphisme f, trouver suivant les valeurs de a, b une base de $\ker f$ et $\operatorname{im} f$.*

Exercice 19 *Déterminer la dimension et une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ défini par les équations :*

$$\begin{cases} x - y + 2z - t + u & = 0 \\ 2x + y + z - 2t + 2u & = 0 \\ x + z - t + u & = 0. \end{cases}$$

Chapitre 4

Réduction des endomorphismes 1

Le problème de la diagonalisation est un peu compliqué. Une matrice n'est pas en général diagonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice diagonale. Dans ce chapitre, on s'intéressera aux obstructions au caractère diagonalisable. En particulier, nous donnerons une caractérisation de nature géométrique et algèbrique des matrices diagonalisables.

4.1 Diagonalisation des matrices

4.1.1 Matrice diagonalisable.

Une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}. \tag{4.1}$$

Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ de la décomposition (**??**) étant semblables, elles ont le même polynôme caractéristique. Donc la diagonale de la matrice D est formée des valeurs propres de $\mathbf{A}$.

Exercice 20 *Montrer que la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 21 *Soit* $\boldsymbol{A}$ *la matrice définie par blocs :*

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & \mathrm{C} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont deux matrices carrés de* $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$ *respectivement. Montrer que si* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont diagonalisables, alors* $\mathbf{A}$ *est diagonalisable.*

Proposition 9 *Une matrice* $\boldsymbol{A}$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de* $\mathbb{K}^n$ *formée de vecteurs propres de* $\mathbf{A}$.

Preuve. Supposons qu'il existe une base $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$, et considérons la matrice $\mathbf{P}$ dont les colonnes sont formées par les éléments de cette base :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ formant une base de $\mathbb{K}^n$, la matrice $\mathbf{P}$ est inversible et on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{AP} &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Ax}_1 & \mathbf{Ax}_2 & \cdots & \mathbf{Ax}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1\mathbf{x}_1 & \lambda_2\mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

D'ou

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

En conclut que la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Inversement, si $\mathbf{A}$ est diagonalisable, il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}$ satisfait l'égalité (4.2). Pour les mêmes raisons, les vecteurs colonnes de $\mathbf{P}$ forment une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$. □

4.1.2 La condition suffisante de diagonalisation.

Les matrices en génerale ne sont pas toujour diagonalisables, comme on peut le voir en particulier pour les rotations. La matrice $\mathbf{R}_\theta$ qui représente la rotation d'angle θ du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si $\theta \neq 0$ modulo π, car $\mathbf{R}_\theta$ ne possède pas de valeur propre réelle.

Cet exemple nous donne un idée sur la caractérisation non diagonalisable d'une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car elle n'admet pas de valeur propre réelle. La matrice suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

admet 0 comme valeur propre et n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Car, si elle était diagonalisable, alors son unique valeur propre étant 0, car son polynôme caractéristique est $p_{\mathbf{A}} = x^2$, la matrice $\mathbf{A}$ serait semblable à la matrice nulle. Donc elle est nulle. Ceci n'étant pas le cas de $\mathbf{A}$ la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 22 *Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

Proposition 10 ***(La condition suffisante de diagonalisation).*** *Soit $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et possède toutes ses racines simples, alors $\mathbf{A}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve. Supposons que le polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ soit scindé à racines simples :

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n),$$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i étant valeur propre de $\mathbf{A}$, il existe un vecteur propre $\mathbf{x}_i$ de $\mathbf{A}$ associé, donc les sous-espaces propres de $\mathbf{A}$ formant une somme directe, la famille $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ est libre. Elle possède n éléments, c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$. $\square$

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 6 *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable.*

Remarque 1 *Attention, la réciproque du corollaire* 6 *c'est fausse toujour vraiel. Par exemple, la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

est diagonalisable, alors qu'elle n'admet que deux valeurs propres distinctes, son spectre est $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \{1, 4\}$.

De la même façon, la proposition 10 *est une condition seulement suffisante de diagonalisation, mais elle n'est pas nécessaire. Par exemple, la matrice identité 1_n est diagonalisable, son polynôme caractéristique est déterminé par : $p_{\mathbf{1}_n} = (-1)^n(x-1)^n$, son unique valeur propre* 1 *a comme ordre de multiplicité n.*

Exemple 27 *Considèrons la matrice réelle $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & bc^2 \\ b & a \end{bmatrix}$, avec b, c non nul. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est détèrminé par*

$$p_{\mathbf{A}} = (a-x)^2 - b^2c^2 = ((a-bc)-x)((a+bc)-x).$$

D'ou $\lambda_1 = a - bc$ et $\lambda_2 = a + bc$ sont deux valeurs propres, distinctes par hypothèses sur b et c. On en déduit que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Déterminons les sous-espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2}. On a $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in E_{\lambda_1}$ si, et seulement si,

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Autrement dit, x et y satisfont

$$\left| \begin{array}{l} ax + bc^2y = ax - bcx \\ bx + ay = ay - bcy \end{array} \right.,$$

Donc $x = -cy$. On déduit que

$$E_{\lambda_1} = \mathrm{Vect} \begin{bmatrix} -c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De la même façon, on montre que

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect} \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} a-bc & 0 \\ 0 & a+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & bc^2 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 28 *Une autre caractèrisation non nécessaire de la condition de la proposition 10 est illustré par la matrice suivante :*

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

En peut montré que G est diagonalisable, semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

mais son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{G}} = (x+1)^2(2-x)$ *n'est pas à racines simples.*

4.2 La caractérisation géométrique des matrices diagonalisables

D'après ce qu'ont a vue, les sous-espaces propres d'une matrice $\mathbf{A}$ sont en somme directe. Il est possible que cette somme ne $\ll$ remplisse $\gg$ pas l'espace $\mathbb{K}^n$ tout entier, i.e., que la somme directe $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{K}^n$. C'est en particulier le cas lorsque l'on a $\dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim\left(E_{\lambda_p}\right) < n$. L'objectif de cette section est de montrer que ceci constitue un problème à la diagonalisation de $\mathbf{A}$.

Exemple 29 *Soit la matrice de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *suivante*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Le calcule de son polynôme caractéristique noud donne $p_{\mathbf{A}} = -(x-2)^2(x-3)$ *et, par ailleurs, on a*

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est nécissaire que

$$\mathrm{rg}\,(\mathbf{A} - 3\mathbf{1}_3) = \mathrm{rg}\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{1}_3) = 2.$$

On déduit que $\dim(E_3) = 1$ *et* $\dim(E_2) = 1$. *Ainsi, la matrice* $\boldsymbol{A}$ *n'est pas diagonalisable, car la somme directe de tous les sous-espaces propres* $E_2 \oplus E_3$ *est de dimension 2. Il ne peut donc pas exister de base de* $\mathbb{R}^3$ *formée de vecteurs propres de* $\mathbf{A}$.

4.2.1 Les valeurs propres et ces multiplicités.

Soient $\mathbf{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de $\mathbf{A}$. L'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est appelé multiplicité algébrique de λ, on la note mult alg (λ), ou mult alg (λ) s'il n'y a pas de confusion.

La dimension du sous-espace propre E_λ est appelé la multiplicité géométrique de λ, on la note $\mathrm{mult}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda)$, ou mult geo$(\lambda)$ s'il n'y a pas de confusion. C'est-à-dire

$$\mathrm{mult}^{\mathbf{A}}_{\mathrm{geo}}(\lambda) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n\right)\right).$$

Proposition 11 *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Pour toute valeur propre* λ *de* $\boldsymbol{A}$*, on a l'inégalité suivante*

$$\operatorname{mult}_{geo}(\lambda) \leq \operatorname{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

Preuve. Supposons que λ une racine de $p_{\mathbf{A}}$ d'ordre de multiplicité h. D'après le théorème de trigonalisation 20, la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{T}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{T}_1$ est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_h(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à λ et où la matrice $\mathbf{T}_2$ est triangulaire supérieure n'ademettant pas le coefficient λ sur sa diagonale. On a

$$\operatorname{rg}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n) = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 - \lambda\mathbf{1}_h & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 - \lambda\mathbf{1}_{n-h} \end{bmatrix}.$$

D'ou, on a

$$\operatorname{rg}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n) \geq \operatorname{rg}(\mathbf{T}_2 - \lambda\mathbf{1}_{n-h}) = n - h.$$

La dernière égalité provient du fait que $\mathbf{T}_2 - \lambda\mathbf{1}_{n-h}$ est inversible, car λ n'est pas sur la diagonale de $\mathbf{T}_2$, donc dé son déterminant est non nul. On en déduit que

$$h = \text{ mult }_{\mathrm{alg}}(\lambda) \geq n - \operatorname{rg}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n).$$

D"après le théorème du rang, on a $n = \operatorname{rg}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}_n) + \text{ mult }_{\text{geo}}(\lambda)$. Ainsi

$$\operatorname{mult}_{\mathrm{geo}}(\lambda) \leq \operatorname{mult}_{\mathrm{alg}}(\lambda).$$

□

Exemple 30 *Soit la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, avec* $n \geq 3$*, suivante*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le rang $\mathbf{A}$ *est égale a* 2*, d'ou, la dimension du sous-espace propre* $E_0 = \operatorname{Ker}(\mathbf{A})$ *est* $\dim E_0 = n - 2$*. Ainsi, d'après la proposition 11, la multiplicité algébrique de la valeur propre* 0 *satisfait*

$$n - 2 \leq \operatorname{mult}_{alg}(0).$$

La factorisation de polynôme caractéristique de A *est sous la forme*

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n x^{n-2}\left(x^2 + \alpha x + \beta\right),$$

telsque α *et* β *sont deux réels. Nous avons vu en exemple 36 que le calcul des traces des matrices* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}^2$ *permet de déterminer les deux réels* α *et* β *; on obtient donci toutes les valeurs propres de la matrice* $\mathbf{A}$*.*

4.3 La caractérisation algèbrique des matrices diagonalisables

Théorème 19 ***(La caractérisation des matrices diagonalisables).*** *Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *A est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

ii) *le polynôme* $p_{\mathbf{A}}$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et, pour toute valeur propre* λ *de* $\mathbf{A}$,

$$\operatorname{mult}_{\text{geo}}(\lambda) = \operatorname{mult}_{\text{alg}}(\lambda),$$

iii) *il existe des valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *de* $\mathbf{A}$, *telles que*

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Preuve. Montrons que **i)** implique **ii)**. Supposons que $\mathbf{A}$ soit diagonalisable. Alors $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice diagonale dont la diagonale est formée des valeurs propres de $\mathbf{A}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ces valeurs propres. On a

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \ldots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

où $n_i = \operatorname{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i)$ est la multiplicité algébrique de la valeur propre λ_i, c'est-à-dire, le nombre de fois que λ_i apparaitt sur la diagonale.

Montrons que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, mult alg $(\lambda_i) =$ mult $_{\text{geo}}$ (λ_i). D'après la proposition 9, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbf{A}$. Il existe n_i vecteurs $\mathbf{x}$ de la base $\mathcal{B}$ vérifiant $\mathbf{Ax} = \lambda_i \mathbf{x}$, c'est-à-dire, n_i vecteurs linéairement indépendants dans le sous-espace propre E_{λ_i}. Par suite,

$$\operatorname{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i) = n_i \leq \dim(E_{\lambda_i}) = \operatorname{mult}_{\text{geo}}(\lambda_i).$$

Or, d'après la proposition 11, on a mult geo $(\lambda_i) \leq \operatorname{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i)$. On obtient ainsi l'égalité $\operatorname{mult}_{\text{geo}}(\lambda_i) =$ mult $_{\text{alg}}$ (λ_i).

Montrons que **ii)** implique **iii)**. Soit $\mathbf{A}$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé, soit

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_2)^{n_2} \ldots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

et tel que pour tout i,

$$n_i = \operatorname{mult}_{\text{alg}}(\lambda_i) = \operatorname{mult}_{\text{geo}}(\lambda_i).$$

Donc, les sous-espaces propres sont en somme directe. Soit F le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$F = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}.$$

On a

$$\begin{aligned}\dim(F) &= \dim(E_{\lambda_1}) + \ldots + \dim\left(E_{\lambda_p}\right) \\ &= n_1 + \ldots + n_p \\ &= \deg(p_{\mathbf{A}}) = n.\end{aligned}$$

Ainsi le sous-espace F de $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, par suite $F = \mathbb{K}^n$. Ce qui montre l'assertion **iii)**.

Montrons que **iii)** implique **i)**. Supposons que $\mathbf{A}$ admette des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ telles que

$$\mathbb{K}^n = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}.$$

Considérons, pour tout $i \in [\![1, p]\!], \mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i}, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ forme une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$. De la proposition 9, on déduit alors que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.$\square$

Remarque 19 *On peut dire brèfement, qu'une matrice* $\mathbf{A}$ *est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique s'écrit*

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1)^{multgeo\ (\lambda_1)} \ldots (x - \lambda_p)^{multgeo\ (\lambda_p)},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

En particulier, on retrouve la proposition 10. Si $\mathbf{A}$ *n'admet que des racines simples, alors, pour tout* i,

$$1 \leq \text{mult}_{geo}\ (\lambda_i) \leq \text{mult}_{alg}\ (\lambda_i) = 1.$$

Par conséquent, $\text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_i) = \text{mult}_{\text{geo}}(\lambda_i) = 1$ *et* $\mathbf{A}$ *est diagonalisable.*

Exemple 31 *Nous avons déjà vu que la matrice* $\mathbf{R}_\theta$ *de la rotation du plan vectoriel* $\mathbb{R}^2$ *n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$. *Malgré qu' elle possède deux valeurs propres complexes distinctes :* $e^{i\theta}$ *et* $e^{-i\theta}$. *La matrice* $\mathbf{R}_\theta$ *est donc diagonalisable sur* $\mathbb{C}$, *on a*

$$E_{i\theta} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right), \quad E_{-i\theta} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right).$$

D'où, en posant $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & -i \end{bmatrix}$, *la matrice de changement de la base canonique à la base formée des vecteurs propres* $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, *on a*

$$\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{P},$$

telque l'inverse de la matrice $\mathbf{P}$ *est*

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

Exercice 23 *Nous avons vu dans l'exercice 21, qu'une matrice* $\mathbf{A}$ *par blocs :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \text{C} \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont deux matrices carrées diagonalisables de* $\mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{K})$ *respectivement, est diagonalisable. L'objectif de cet exercice est de montrer que la réciproque est vraie.*

1. *Montrer que* $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}} \cdot p_{\mathbf{C}}$.
2. *Montrer que, pour toute valeur propre* λ *de* $\mathbf{A}$, *on a*

$$\text{mult}^{\text{A}}_{geo}(\lambda) = \text{mult}^{\text{B}}_{geo}(\lambda) + \text{mult}^{\text{C}}_{geo}(\lambda).$$

3. *Montrer que si* ***B*** *ou* ***C*** *n'est pas diagonalisable, alors il existe une valeur propre* λ *de* $\mathbf{A}$ *telle que*

$$\text{mult}^{\mathbf{A}}_{geo}(\lambda) < \text{mult}^{\mathbf{A}}_{alg}(\lambda).$$

4. *En déduire, que si* $\mathbf{A}$ *est diagonalisable, alors* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont diagonalisables.*

4.4 Diagonalisation des matrices et ces applications

On va voir ici quelques applications de la diagonalisation des matrices en particulier, le calcul des puissances des matrices et la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires.

4.4.1 La puissance d'une matrice diagonalisable.

Commençons par l'application classique de la diagonalisation est le calcul des puissance d'une matrice. Soit $\mathbf{A}$ une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'ou il existe une matrice diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix},$$

et une matrice inversible $\mathbf{P}$ telles que : $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Alors $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$, pour tout entier naturel k, d'où

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^k \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}.$$

Exemple 32 *La puissance de la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *est*

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} - 3^k & 2^{k+1} - 2.3^k \\ -2^k + 3^k & -2^k + 2.3^k \end{bmatrix},$$

telles que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.4.2 La résolution des systèmes différentiels linéaires.

La deuxième application classique de la diagonalisation d'une matrice est la résolution des systèmes différentiels linéaires. On va résoudre les systèmes différentiels linéaires de suivant :

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{dx_1(t)}{dt} & = a_1^1 x_1(t) + \cdots + a_1^n x_n(t) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} & = a_n^1 x_1(t) + \cdots + a_n^n x_n(t) \end{array} \right. ,$$

où les a_i^j sont des réels et les x_i des fonctions réelles à valeurs réelles. On peux reformulé ce système différentiel sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

et où $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ représente la dérivé du vecteur $\mathbf{x}(t)$.

Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ soit diagonalisable (nous aborderons le cas des systèmes différentiels avec $\mathbf{A}$ non diagonalisable plus tard), il existe une matrice $\mathbf{D}$ diagonale et $\mathbf{P}$ inversible telles que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}.$$

La matrice $\mathbf{P}$ représente un changement de base de $\mathbb{R}^n$: si $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur colonne exprimant un vecteur $\mathbf{x}(t)$ dans la base initiale et $\mathbf{y}(t)$ celui exprimant $\mathbf{x}(t)$ dans la nouvelle base. On fait le changement de variable $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$. D'où

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt},$$

donc

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y}(t).$$

Le système est donc équivalent au système :

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{y}(t),$$

qui est facile à résoudre, car D est diagonale. En effet, si

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix},$$

les solutions de cette équation sont les vecteurs $\mathbf{y}(t)$ dont la i-ième composante est

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} y_i(0).$$

Il peux déduire $\mathbf{x}(t)$ en calculant $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t)$.

Exemple 33 *On va résoudre le système différentiel suivant :*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t) - y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = 2x(t) + 4y(t), \end{array} \right.$$

où $x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On pose

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad et \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Le système $\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{y}(t)$, telles que $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} = 2u(t) \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = 3v(t). \end{array} \right.$$

La solution de ces deux équations est :

$$\left| \begin{array}{l} u(t) = \beta_1 e^{2t} \\ v(t) = \beta_2 e^{3t}, \end{array} \right.$$

où β_1 et β_2 sont deux constantes réelles. On en déduit que le système (7.5) admet pour solution

$$\left| \begin{array}{l} x(t) = \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{3t} \\ y(t) = -\beta_1 e^{2t} - 2\beta_2 e^{3t}. \end{array} \right.$$

Exercice 24 *On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$,*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}$$

1. *La matrice $\boldsymbol{A}$ est-elle diagonalisable ?*
2. *Montrer que $n-1$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.*
3. *Déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-1$.*
4. *Quel est l'ordre de multiplicité de la valeur propre $n-1$?*
5. *Calculer la trace de la matrice $\mathbf{A}$. En déduire la valeur de toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$.*
6. *Résoudre le système différentiel suivant*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dx(t)}{dt} = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = x(t) + 3y(t) + z(t), \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{array}\right.$$

où $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont trois fonctions dérivables vérifiant $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$.

4.5 Exercices

Exercice 25 *Montrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable :*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 26 *Les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont-elles diagonalisables ?*

Exercice 27 *Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant la matrice de passage, les matrices suivantes :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 28 *Discuter en fonction de a, b et c la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :*

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 29 *Soit θ un réel. On considère la matrice de rotation*

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

1. *Calculer dans $\mathbb{C}$ les valeurs propres de A.*
2. *Discuter en fonction de θ la possibilité de diagonaliser A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Exercice 30 *Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que si λ est une valeur propre complexe de $\mathbf{A}$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de $\mathbf{A}$, de même ordre de multiplicité.*
2. *Montrer que si* v *est un vecteur propre associé à λ, alors $\overline{\mathbf{v}}$ est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$.*
3. *Diagonaliser en donnant une matrice de passage la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. *Calculer $\mathbf{A}^k$, pour tout entier naturel k.*

Exercice 31 *Soit*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En diagonalisant $\mathbf{A}$, trouver une solution dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à l'équation $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$.

Exercice 32 *Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang un.*

1. *Montrer que la trace de $\mathbf{A}$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$.*
2. *En déduire que $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.*

Exercice 33 *On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.*

1. *Quelle est la somme des valeurs propres de $\mathbf{A}$?*
2. *Quel est le produit des valeurs propres de $\mathbf{A}$?*
3. *Montrer que, si son déterminant n'est pas nul, $\mathbf{A}$ est diagonalisable.*
4. *Montrer que, si son déterminant est nul, $\mathbf{A}$ n'est diagonalisable que si elle est nulle.*
5. *Montrer que $\mathbf{A}$ est diagonalisable sauf si elle est de rang un.*
6. *En supposant que la matrice $\mathbf{A}$ est réelle ; à quelle condition est-elle diagonalisable par un changement de base réel ?*

Exercice 34 *On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable et diagonaliser $\mathbf{A}$.*
2. *Soit $\mathbf{N}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ défini par blocs :*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & -\mathbf{N} \\ 2\mathbf{N} & 4\mathbf{N} \end{bmatrix}.$$

Montrer que la matrice $\mathbf{M}$ est diagonalisable si, et seulement si, la matrice $\mathbf{N}$ est diagonalisable.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes 2

On va traité dans ce chapitre les problèmes de trigonalisation des matrices. Nous montrons que toute matrice à coefficients réelles ou complexes est trigonalisable, si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. On va voir quelques conséquences théoriques importantes de ce résultat.

5.1 Trigonalisation des matrices

Définition 30 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est-à-dire, s'il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbf{T}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}. \tag{5.1}$$

On notera que toute matrice triangulaire supérieure étant semblable à une matrice triangulaire inférieure, une matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Exercice 35 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de A. Montrer que la matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice de la forme*

$$\begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

5.1.1 Caractérisation algèbrique des matrices trigonalisables.

Le résultat suivant forme une caractérisation algèbrique des matrices trigonalisables.

Théorème 20 ***(Théorème de trigonalisation).*** *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son polynôme caractéristique $p_{\mathbf{A}}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Si A est une matrice trigonalisable, par définition, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{T}$ est scindé :

$$p_{\mathbf{T}} = (-1)^n (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n).$$

De ce qui précède, deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Ainsi, $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{T}}$ et par suite le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

La condition est suffisante. On procède par récurrence sur n. Toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est trigonalisable. On suppose que tout matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, dont le polynôme caractéristique est scindé, est trigonalisable, montrons que cela est vrai pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ admet donc au moins une racine λ dans $\mathbb{K}$. Considérons un vecteur propre e dans $\mathbb{K}^n$ associé à la valeur propre λ. Complétons le vecteur e en une base $\mathcal{B} = (\mathbf{e}, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Soit $u_{\mathbf{A}}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à la matrice $\mathbf{A}$, i.e., l'endomorphisme défini, pour tout vecteur $\mathbf{x}$ de $\mathbb{K}^n$, par $u_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$. On a

$$u_{\mathbf{A}}(\mathbf{e}) = \mathbf{Ae} = \lambda\mathbf{e},$$

par suite, la matrice de l'endomorphisme $u_{\mathbf{A}}$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$ est

$$[u_{\mathbf{A}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B} & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{B}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. La matrice $\mathbf{A}$ étant semblable à la matrice $[u_{\mathbf{A}}]_{\mathcal{B}}$, il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

De plus, en déduit que le polynôme caractéristique du bloc B divise le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$, il est donc scindé comme ce dernier. Par hypothèse de récurrence, la matrice $\mathbf{B}$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure, il existe une matrice inversible Q dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, telle que $\mathbf{t}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathrm{BQ}$ soit triangulaire supérieure. En multipliant par blocs, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BQ} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{T}' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

En posant

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

la dernière égalité s'écrit

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{Q} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Ainsi, A est semblable à une triangulaire supérieure. □

5.1.2 Trigonalisation sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

On comence par une première conséquence importante du théorème de trigonalisation. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss et d'autres, tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[x]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Par suite, on a

Proposition 12 *Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Notons que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut toujours se trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En effet, si le polynôme caratéristique de $\mathbf{A}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sinon, le polynôme $p_{\mathbf{A}}$ est toujours scindé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe alors une matrice inversible $\mathbf{P}$ et une matrice triangulaire $\mathbf{T}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}$.

Exemple 34 *La matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

son polynôme caractéristique

$$p_{\mathbf{A}} = \left(x^2 + 1\right)^2.$$

Ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[x]$, par concéquent la matrice A n'est donc pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Malgré qu' il est scindé dans $\mathbb{C}[x]$:

$$p_{\mathbf{A}} = (x-i)^2(x+i)^2.$$

La matrice est trigonalisable. Posons

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \end{bmatrix}.$$

Le premier et troisième vecteur colonne de la matrice $\mathbf{P}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement. Les deux autres vecteurs colonnes complètent ces vecteurs en une base de trigonalisation. On a

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix}.$$

5.1.3 La somme et le produit des valeurs propres.

Le théorème de trigonalisation nous permet de donné une relation entre la trace et le déterminant d'une matrice et ses valeurs propres associés.

Si une matrice A est trigonalisable, alors les valeurs propres de $\mathbf{A}$ étant les racines du polynôme $p_{\mathbf{A}}$, sont aussi les coefficients de la diagonale de la matrice $\mathbf{T}$.

Etant donnée une matrice $\mathbf{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$:

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n).$$

La matrice $\mathbf{A}$ est semblable à une matrice triangulaire $\mathbf{T}$, i.e., il existe une matrice inversible $\mathbf{P}$ telle que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Etant semblables, les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{T}$ ont même trace et même déterminant, on en déduit que la trace (resp. Le déterminant) de $\mathbf{A}$ est égale à la somme (resp. Le produit) des valeurs propres, comptées avec leur ordre de multiplicité. Précisément, on a

Proposition 13 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique*

$$p_{\mathbf{A}} = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \ldots (x - \lambda_p)^{n_p},$$

où n_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique. Alors,

i) $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = n_1\lambda_1 + \ldots + n_p\lambda_p$,

ii) $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1^{n_1} \ldots \lambda_p^{n_p}$.

Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, on a

iii) $\operatorname{trace}\left(\mathbf{A}^k\right) = n_1\lambda_1^k + \ldots + n_p\lambda_p^k$,

iv) $\det\left(\mathbf{A}^k\right) = \lambda_1^{k \cdot n_1} \ldots \lambda_p^{k \cdot n_p}$.

Exemple 35 *Lla matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, possède deux valeurs propres $-i$ et i ; la somme de ces valeurs propres est égale à la trace de $\boldsymbol{A}$ et leur produit est le déterminant de $\boldsymbol{A}$.*

Dans l'exemple de la matrice de la rotation du plan vectoriel, on a déjas trouver le résultat suinant :

$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Est $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{R}_\theta) = \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$*. La proposition précédente, nous permet de retrouver les relations trigonométriques bien connues :*

$$\operatorname{trace}(\boldsymbol{R}_\theta) = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta},$$
$$\det \boldsymbol{R}_\theta = 1 = e^{i\theta}e^{-i\theta}.$$

Exercice 36 *Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, elle n'admet pas de valeur propre nulle.*

Exemple 36 *Dans l'exemple 30, nous avons montré que la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

admet 0 *comme valeur propre, d'ordre de multiplicité géométrique* $n-2$*, donc le polynôme caractéristique est le suivant*

$$p_{\boldsymbol{A}} = (-1)^n x^{n-2} \left(x^2 + \alpha x + \beta\right).$$

Trouvans les autres valeurs propres de $\boldsymbol{A}$*. Supposons que*

$$p_{\boldsymbol{A}} = (-1)^n x^{n-2} \left(x - \lambda_1\right)\left(x - \lambda_2\right).$$

D'après la proposition 13, λ_1 *et* λ_2 *satisfont les deux relations suivantes*

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{trace}(\boldsymbol{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \operatorname{trace}\left(\boldsymbol{A}^2\right) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \end{array} \right.$$

avec

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = 1$ *et trace* $(\mathbf{A}^2) = 2n-1$*, d'ou,* λ_1 *et* λ_2 *satisfont les deux relations*

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2n - 1. \end{array} \right.$$

On a $\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2$*, le système précédent sera*

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = 1 - n. \end{array} \right.$$

Donc λ_1 *et* λ_2 *sont solutions de l'équation*

$$\lambda^2 - \lambda + (1 - n) = 0.$$

D'où

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}.$$

Le spectre de A *est donc*

$$\operatorname{Sp}(A) = \left\{0, \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}\right\}.$$

Les sous-espaces propres sont définis comme suites

$$E_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$E_{\lambda_1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \right), \quad E_{\lambda_2} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \right).$$

Par conséquent

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \lambda_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i\\ \lambda_i+n-1\end{bmatrix},$$

avec $\lambda_i^2=\lambda_i+n-1$*, pour* $i=1,2$.

Exercice 37 *Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres des matrices suivantes de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *:*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ 1&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&0&\cdots&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&0&\cdots&0\\ 1&1&\cdots&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&\cdots&1&1\\ 0&\cdots&0&1\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\cdots&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ 1&0&\cdots&0&1\\ \vdots&\vdots&0&\vdots&\vdots\\ 1&0&\cdots&0&1\\ 1&1&\cdots&1&1\end{bmatrix}.$$

Exemple 37 *Soit* $\boldsymbol{A}$ *la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}n&1&\cdots&1\\ 1&n&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&1\\ 1&\cdots&1&n\end{bmatrix}.$$

Remarquant que

$$\mathbf{A}-(n-1)\mathbf{1}_n=\begin{bmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

D'ou $\mathrm{rg}\,((\mathbf{A}-(n-1)\mathbf{1}_n))=1$*. Donc, on a* $\dim(E_{n-1})=n-1$*. Alors* $n-1$ *est valeur propre de* $\mathbf{A}$*, avec mult alg* $(n-1)\geq n-1$*. Pour déterminer l'autre éventuelle valeur propre* λ*, on calcule*

$$\mathrm{trace}(\mathbf{A})=n^2=\lambda+(n-1)(n-1).$$

Par suite $\lambda=2n-1$*. On a donc mult alg* $(2n-1)\geq 1$*. On en déduit que mult alg* $(n-1)=$ *mult* $_{geo}$ $(n-1)=n-1$ *et que mult* $_{alg}$ $(2n-1)=$ *mult* $_{geo}$ $(2n-1)=1$.

Dans cet exemple, on a

$$\mathbb{K}^n=E_{n-1}\oplus E_{2n-1},$$

par conséquent la matrice $\mathbf{A}$ *est diagonalisable.*

Bibliographie

Bibliographie

[1] Adkins A.W.& Weintraub S. H. *"Algebra, An Aproach via Module Theory"*.Springer-Verlag. 1992.

[2] Arnaudiès & Fraysse *"Algèbre".* Paris. 1985.

[3] Grifone Joseph *"Algèbre Linéaire"*.epadues-Editions.1990.

[4] Godement Roger *"Cours d'algèbre".* Hermann.1966.