République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et
De la recherche scientifique
Université de Tissemsilt
Faculté des sciences et de la Technologie Département des sciences et de la Technologie

ANALYSE MATHÉMATIQUE*maths03*

Recueil d'Exercices Corriges

Préparé par :

MERZOUGUI Mokhtar **BIROUD Kheireddine**

Année Universitaire 2023/2024

المطبوعة المقدمة هي عمل ثان ثنائي داعمة للمطبوعة الاولى(1) وهي عبارة عن مجموعة من التمارين المحلولة بالتفصيل. والبعض الاخر باختصار وهي مبنية على ما قدم في المطبوعة الاولى الموجهة الى طلبة السنة ثانية العلوم والتكنولوجيا والمدارس التحضيرية .

حيث تم تناول تمارين حول السلاسل العددية .

بعد ذلك تم طرح تمارين حول دوال ذات متغيرين(النهايات المشتقات الجزئية. المعادلات التفاضلية الجزئية)

ثالثا عالجنا العديد من التكاملات الموسعة بحسابها او معرفة طبيعتها باستخدام العديد من المعايير

رابعا تم التطرق الى تمارين حول المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والثانية المتجانسة غير متجانسة..

وفي الاخير تم حل العديد من التمارين حول التكاملات المتعددة

في الاخير نسال الله تعالى السداد والتوفيق

Introduction

Ce polycopié est un ouvrage, principalement destiné aux étudiants de deuxième année école supérieure de management, mais aussi à tous les étudiants de deuxième année filière génie mécanique, électronique et industrie pétrochimiques. Il fait suite au polycopié [1] publié par la faculté des sciences et de la technologie, et contenant les notions présentées en cours de mathématiques.

Nous ry présentons différents exercices de Mathématiques de degré de difficulté variable, avec des corrigés détaillés. Le lecteur y trouvera aussi des exercices supplémentaires avec des solutions abrégées.

Notons que les exercices proposés dans ce polycopié traitent les séries numériques, les fonctions à deux variables, les intégrales doubles, les intégrales impropres et les équations différentielles.

Nous espérons que ce polycopié réponde aux attentes des étudiants et qu'il les aidera à réussir.

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

<u>Exercice</u> 1.1. Soit

$$\boldsymbol{u_n = \frac{2}{n^2-1} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.}$$

1. Écrire $\boldsymbol{u_n}$ sous la forme

$$\boldsymbol{u_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} \qquad \text{pour} \quad n \geq 2.}$$

2. Calculer la somme $\boldsymbol{S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}}$.

$$\boxed{\text{Solution}}$$

Soit $u_n = \frac{1}{n^2-1}$, pour $n \geq 1$.
1. Écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$?
On peut voir facilement que $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

2. On calcul

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\
&= (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) = \frac{3}{2}.$$

Ainsi la série est convergente et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

<u>Exercice</u> 1.2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries de termes généraux

$$\boldsymbol{w_n = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad t_n = u_n^2}$$

sont convergentes.

$\boxed{\textbf{S o l u t i o n}}$

1.

$$w_n = \sqrt{u_n v_n}$$

Remarquons que $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ ceci implique que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. Ainsi, si $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \sqrt{v_n}$, on a :

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum \frac{u_n + v_n}{2}$ converge et par le théorème de comparaison $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

2.

$$t_n = u_n^2.$$

Puisque $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, ainsi $u_n < 1$.
Donc $u_n^2 < u_n$ (car $u_n \geq 0$).
Par le théorème de comparaison $\sum u_n^2$ converge.

<u>Exercice</u> 1.3. Soient les deux suites (u_n) et (v_n), on suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$.

❶ Montrer que la suite (v_n) et la série $\sum u_n$ sont de même nature.

$\boxed{\textbf{S o l u t i o n}}$

1. On a

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_{n+1} - v_n) \\ &= v_{n+1} - v_0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_0).$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ est finie alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est finie et la série converge. Sinon, elle diverge.

<u>Exercice</u> 1.4. Sommer les séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^{n-2}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} nq^n \quad \text{avec}(0 < q < 1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Solution

1.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^{n-2}} = 5^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Une série géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $\frac{2}{5}$. ainsi, la somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^{n-2}} = 5^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 5^2 \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5^3}{3}.$$

2.
$$\text{On calcul} \sum_{n=0}^{\infty} nq^n \quad \text{avec}(0 < q < 1) \qquad \text{sachant que} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

On a Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} nq^n &= q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n + \ldots \\
&= q(1 + q + \ldots + q^n + \ldots) + \ldots + q^n(1 + q + \ldots + q^n + \ldots) + \ldots \\
&= q(1 + q + \ldots + q^n + \ldots)(1 + q + \ldots + q^n + \ldots) \\
&= \frac{q}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

3.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\
&= \left(1 - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Ainsi la série est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

4.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n.n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right). \end{aligned}$$

On pose

$$v_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

D'après l'exercice précédent et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = u_2 + u_3 + \ldots + u_n \\ &= \left(\ln\frac{3}{2} - \ln 2\right) + \left(\ln\frac{4}{3} - \ln\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2.$$

Exercice 1.5. Trouver la nature de la série qui a pour terme général

➊ $u_n = \dfrac{1+n^2}{n^2}$ ➋ $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ ➌ $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

➍ $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ ➎ $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ ➏ $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

➐ $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n}$ ➑ $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ➒ $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

Solution

1. Soit la série $\sum \frac{1+n^2}{n^2}$. On calcule la limite du terme général u_n.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^2}{n^2} = 1 \neq 0.$$

Ainsi, la série $\sum \frac{1+n^2}{n^2}$ converge.

2. Soit la série $\sum \frac{n!}{a^n}$. Appliquons la règle de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{a^{n+1}}.\frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{a} = +\infty > 1.$$

Ainsi, la série $\sum \frac{n!}{a^n}$ diverge.

3. Soit la série $\sum \frac{n!}{n^n}$. Appliquons la règle de d'Alembert

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} \\
&= \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

4. Soit la série $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$. On calcul la limite du terme général u_n.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(\sin\left(\frac{1}{n}\right))} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 \neq 0.$$

Ainsi la série $\sum \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ diverge.

5. Soit la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$. Appliquons le critère d'equivalence.

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{n} n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}.$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} = 1$$

Ce qui montre que

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

C'est le terme général d'une série de Reimann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$.

6. Soit la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Appliquons le critère d'equivalence.

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

C'est le terme général d'une série de Reimann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

Ainsi, la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

7. Soit la série $\sum \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n}$. On applique le critère d'equivalence et le critère de Cauchy.

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n = v_n$$

Puis on calcule $\sqrt[n]{v_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5} < 1$.

Ainsi, la série $\sum \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n}$ converge.

8. Soit la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Appliquons la règle de Cauchy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = e^{-1} < 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

9. Soit la série $\sum \frac{n}{2^n}$. Appliquons la règle de d'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ainsi, la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge.

Exercice 1.6. Trouver la nature de la série qui a pour terme général,

$$❶\ u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right), \quad ❷\ u_n = \sqrt[3]{\frac{n}{n^6+1}}, \quad ❸\ u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^{10}}\right),$$

$$❹\ u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^a + 1}, \quad ❺\ u_n = ne^{\frac{1}{n}} - n, \quad ❻\ u_n = \frac{1}{\ln(n)^n},$$

$$❼\ \frac{n^{1000}}{n!}, \quad ❽\ u_n = \frac{2^n}{n^2}.$$

Solution

1. Soit la série $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$. Appliquons le critère d'equivalence.

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \sim \frac{1}{n}.$$

la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente donc, par le théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ est divergente.
C'est le terme général d'une série de Reimann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$.
Ainsi la série $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$ diverge.

2. Soit la série $\sum \sqrt[3]{\frac{n}{n^6+1}}$. Appliquons le critère d'equivalence.

$$u_n = \sqrt[3]{\frac{n}{n^6+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$$

C'est le terme général d'une série de Reimman converge avec $\alpha = \frac{5}{3} > 1$.
Ainsi la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente donc, par le théorème de comparaison, la série $\sum \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ est convergente.
Soit la série $\sum \sqrt[3]{\frac{n}{n^6+1}}$ converge.

3. Soit la série $\sum \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^a+1}$. Appliquons le critère d'equivalence.

$$u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^a+1} \sim \frac{1}{n^a+1} \sim \frac{1}{n^a}.$$

C'est le terme général d'une série de Reimman : 1°) Si $a \leq 1$ notre série diverge (par le critère d'equivalence), 2°) Si $a > 1$ notre série converge (par le critère d'equivalence).

5. Soit la série $\sum ne^{\frac{1}{n}} - n$. On applique le critère d'equivalence.

$$u_n = ne^{\frac{1}{n}} - n = \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \sim 1 = v_n.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1 \neq 0$. Ainsi, $\sum ne^{\frac{1}{n}} - n$ est convergente.

6. Soit la série $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$. On applique le critère de Cauchy.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1$$

Ainsi la série $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$ converge.

7. Soit $\sum \frac{n^{1000}}{n!}$, appliquons le critère de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{1000}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^{1000}} = 0 < 1$$

Ainsi la série $\sum \frac{n^{1000}}{n!}$ converge.

8. La série $\sum \frac{2^n}{n^2}$ est divergente. En effet, il suffit d'appliquer le critère de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{2^n} = 2 > 1.$$

Exercice 1.7. **Etudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.**

$$\text{❶} \quad u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)}, \qquad \text{❷} \quad u_n = \frac{1}{(\ln n)^n},$$
$$\text{❸} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}\arctan\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \text{❹} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n},$$
$$\text{❺} \quad u_n = (-1)^n\frac{1}{\ln n}, \quad \text{❻} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1},$$
$$\text{❼} \quad u_n = \frac{\cos(2n)}{n^2+1}, \quad \text{❽} \quad u_n = n\cos\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Solution

1. Soit $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$, nous remarquons que $0 < cos^2(n) \leq 1$, donc

$$\frac{1}{n\cos^2(n)} \geq \frac{1}{n}$$

série de Reimman $\alpha \leq 1$ diverge par le critère de comparaison on a $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$ diverge aussi.

2. Soit $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$. On applique le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\ln n)} = 0 < 1.$$

Ainsi la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$ converge.

3. Soit $\sum \frac{(-1)^n}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}$

On a $|\frac{(-1)^n}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}$, on sait que $\text{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ donc $\frac{1}{n}\text{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, ainsi la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}$ est absolument convergente donc convergente.

4. Soit la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. On applique le critère de Leibniz

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\frac{1}{n}$ est décroissante à partir de $n \geq 1$, ainsi $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}$ est convergente.

5. Soit la série $\sum(-1)^n\frac{1}{\ln n}$, appliquons le critère de Leibniz

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$
- $\frac{1}{\ln n}$ est décroissante à partir de $n > 1$, ainsi $\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{1}{\ln n}^n$ est convergente.

6. Soit la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ est convergente car (par le critère de Leibniz) :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$
- $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ est décroissante. Ceci implique $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge.

7. Soit $\sum \frac{\cos 2n}{n^2+1}$, nous remarquons que
$|\frac{\cos 2n}{n^2-n+1}| \leq \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$) ainsi la série $\sum \frac{\cos 2n}{n^2+1}$ est absolument convergente donc convergente.

8. Soit $\sum n \cos \frac{1}{n^2}$, on a $\cos \frac{1}{n^2} \sim 1$ donc $n \cos \frac{1}{n^2} \sim n$, la série $\sum n$ est divergente $v_n = n \to \infty > 1$ quand $n \to \infty$ ainsi $\sum n \cos \frac{1}{n^2}$ est divergente.

Exercice 1.8. **Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.**
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Solution

Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \to 0$ quand $n \to \infty$, ceci implique $u_n \sim v_n$ comme ce sont des séries de termes positifs, la série de terme général v_n converge aussi, si elle diverge alors la série de terme général v_n diverge aussi.

Réciproquement
$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1-v_n}.$$

On a encore $u_n \sim v_n$ donc la série sont de même nature.

Exercice 1.9. **Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et u_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par**
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}.$$

❶ Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

❷ En déduire que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Solution

Soit la série $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.

1. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha n+1} = 0$ et $\frac{1}{\alpha n+1}$ est décroissante. Ainsi, par le critère de Leibniz $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$ est convergente.

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1}=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 t^{\alpha n}dt=\int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-t^{\alpha})^n dt=\int_0^1\frac{1-(-t^{\alpha})^{N+1}}{1+t^{\alpha}}dt$$

quand $N\to+\infty$, $(-t^{\alpha})^{N+1}\to 0$, ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^{\alpha}}dt.$$

2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=[\ln(t+1)]_0^1=\ln(2).$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=[\mathrm{arctg}(t)]_0^1=\mathrm{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 1.10.

Trouver la nature de la série du terme général $u_n=\sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 1.11.

❶ Soit (u_n) une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice 1.12.

❶ Soit (u_n) une suite positive telle que la série de terme général u_n diverge. Pour tout n, on pose $S_n=u_0+\ldots\ldots\ldots u_n$. Etudier en fonction de α la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{(S_n)^{\alpha}}$.

Exercice 1.13.

Calculer les formes des séries suivantes :

❶ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{5^n}$. ❷ $\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}$.

❸ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$. ❹ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{n+1}\right)$.

❺ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}$. ❻ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+5)}$.

❼ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$. ❽ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2n-3}$.

❾ $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n+4}{n\,(n^2-4)}$. ❿ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n+2}{n\,(n^2-1)}$.

Solution

❶ Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{5^n} = \frac{1 - \frac{1}{5^{p+1}}}{1 - \frac{1}{5}}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{5}{4}$.

❷ Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} e^{-n} = \frac{1 - e^{-p-1}}{1 - e^{-1}}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}$.

❸ Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{p+1}}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$.

❹ Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{p} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} \right) = \cos 1 - \cos\frac{1}{p+1},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} \right) = \cos 1 - 1$.

❺ Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$2\sum_{n=1}^{p} \frac{n}{3^n} = 3\sum_{n=1}^{p} \frac{n}{3^n} - \sum_{n=1}^{p} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{3^n} - \frac{p}{3^p} = \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{p}{3^p},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

❻ Puisque pour tout entier $p \geq 5$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+5)} &= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5} \right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \sum_{n=6}^{p+5} \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} - \sum_{n=p+1}^{p+5} \frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+5)} = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{137}{300}$.

❼ Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4p+1} \right),$$

on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}$.
❽ Puisque pour tout entier $p \geq 5$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^2+2n-3} &= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{p}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n} - \sum_{n=5}^{p+3}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n} - \sum_{n=p}^{p+3}\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n-3} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n} = \frac{25}{48}$.
❾ Puisque pour tout entier $p \geq 7$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{p} \frac{n+4}{n(n^2-4)} &= -\sum_{n=3}^{p}\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\sum_{n=3}^{p}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{p}\frac{1}{n+2} \\ &= -\sum_{n=3}^{4}\frac{1}{n} - \sum_{n=p-1}^{p}\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=p-1}^{p+2}\frac{1}{n},\end{aligned}$$

on a $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n(n^2-4)} = -\sum_{n=3}^{4}\frac{1}{n} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n} = \frac{47}{48}$.
❿ Puisque pour tout entier $p \geq 4$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{p} \frac{n+2}{n(n^2-1)} &= -2\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n+1} \\ &= -1 - \frac{2}{p} + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=p}^{p+1}\frac{1}{n},\end{aligned}$$

on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n(n^2-1)} = -1 + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n} = \frac{5}{4}$.

Exercice 1.14.

❶ Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$.

❷ Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)}$.

❸ Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

❹ Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e^n}{3^n} + \frac{\ln 2^n}{n^3-n}\right)$.

❺ Montrer, par induction, que pour tout entier $p > 0$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{p(p+3)}{4(p+1)(p+2)}.$$

En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

❻ Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{Arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg}\frac{1}{n+1}.$$

En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$.

❼ **Trouver les trois constantes α, β et μ de sorte que pour tout entier $n \geq 3$:**
$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$
En déduire la somme de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

❽ **Montrer que pour tout entier $p \geq 1$:**
$$(e-1)\sum_{n=1}^{P} ne^{-n} = \frac{1-e^{-p}}{1-e^{-1}} - pe^{-p}.$$
En déduire la somme de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}.$$

❾ **Pour quelles valeurs des deux nombres réels α et β la série**
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(n(n+1)^{\alpha}(n+2)^{\beta}\right),$$
converge-t-elle ? Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

❿ **Soit (a_n) la suite de nombres réels définie par**

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ et } a_0 = a_1 = 1.$$
1) Montrer, par induction, que pour tout entier $n \geq 0$: $a_n \geq n$.
2) En déduire la somme des deux séries suivantes :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}},$$
et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}}.$$

Solution

❶ Puisque pour tout entier $p \geq 2$:
$$\sum_{n=2}^{p} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} = \sum_{n=2}^{p}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{p^2},$$
on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} = 1.$

❷ Puisque pour tout entier $p \geq 5$:
$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{p} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)} &= -\frac{3}{2}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n} + \frac{5}{3}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n+2}\\ &= -\frac{3}{2}\left(\sum_{n=2}^{3}\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\sum_{n=p}^{p+2}\frac{1}{n},\end{aligned}$$
on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=2}^{3}\frac{1}{n} + \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n} = \frac{65}{36}.$

❸ Rappel : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Puisque pour tout entier $p \geq 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{2p}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{(2n-1)^2},$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$

❹ 1) Puisque pour tout entier $p \geq 2$: $\displaystyle\sum_{n=2}^{p} \frac{e^n}{3^n} = \frac{1-\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{e}{3}} - 1 - \frac{e}{3}$,

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{3^n} = \frac{e^2}{3(3-e)}$.

2) Puisque pour tout entier $p \geq 4$:

$$\sum_{n=2}^{p} \frac{\ln 2^n}{n^3-n} = \frac{\ln 2}{2} \sum_{n=2}^{p} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{\ln 2}{2} \left(\sum_{n=1}^{2} \frac{1}{n} - \sum_{n=p}^{p+1} \frac{1}{n}\right),$$

on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln 2^n}{n^3-n} = \frac{3\ln 2}{4}$.

D'où $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e^n}{3^n} + \frac{\ln 2^n}{n^3-n}\right) = \frac{e^2}{3(3-e)} + \frac{3\ln 2}{4}$.

❺ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

❻ 1) Soit $n \geq 1$ et posons $\alpha = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n}$ et $\beta = \operatorname{Arctg} \frac{1}{n+1}$. Alors, $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ et

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

D'où $\operatorname{Arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg}\frac{1}{n+1} = \alpha - \beta = \operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$.

2) Ainsi, puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p} \operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1} &= \operatorname{Arctg} 1 + \sum_{n=1}^{p}\left(\operatorname{Arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{Arctg}\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctg} 1 - \operatorname{Arctg}\frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2}$.

❼ Rappels : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ et $0! = 1$.

1) $\alpha = 1, \beta = 3$ et $\mu = 1$.

2) Puisque pour tout entier $p \geq 3$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=1}^{2} \frac{n^3}{n!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-1)!} + 3\sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{p} \frac{1}{(n-3)!} \\ &= 5 + \left(\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n!} - 2\right) + 3\left(\sum_{n=0}^{p-2} \frac{1}{n!} - 1\right) + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!},\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$.

❽ Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}(e-1)\sum_{n=1}^{p} ne^{-n} &= \sum_{n=1}^{p} ne^{-n+1} - \sum_{n=1}^{p} ne^{-n} = \sum_{n=0}^{p-1}(n+1)e^{-n} - \sum_{n=1}^{p} ne^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} e^{-n} - pe^{-p} = \frac{1-e^{-p}}{1-e^{-1}} - pe^{-p}\end{aligned}$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n} = \frac{e}{(e-1)^2}$.
❾ Rappel : $\forall p \geq 1, \ln p! > \frac{p}{2}\ln\frac{p}{2}$.
Pour tout entier $p \geq 1$, posons

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sum_{n=1}^{p} \ln\left(n(n+1)^{\alpha}(n+2)^{\beta}\right) \\ &= (1+\alpha+\beta)\ln p! + (\alpha+\beta)\ln(1+p) + \beta\ln(2+p) - \beta\ln 2,\end{aligned}$$

et montrons : (σ_p) converge $\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta = 0$ et $\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ et $\beta = 1$.
1) $\alpha = -2$ et $\beta = 1$. Puisque pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sigma_p = -\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{p}\right) - \ln 2,$$

on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sigma_p = -\ln 2$.
2) (σ_p) converge. Alors, $1+\alpha+\beta = 0$. En effet, si $1+\alpha+\beta > 0$, on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sigma_p = +\infty$ car pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sigma_p > &\left((1+\alpha+\beta)\frac{p}{2} + (\alpha+2\beta)\right)\ln\frac{p}{2} \\ &+ \beta\ln\left(1+\frac{2}{p}\right) + (\alpha+\beta)\ln 2.\end{aligned}$$

De même si $1+\alpha+\beta < 0$, on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sigma_p = -\infty$ car pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sigma_p < &\left((1+\alpha+\beta)\frac{p}{2} + (\alpha+2\beta)\right)\ln\frac{p}{2} \\ &+ \beta\ln\left(1+\frac{2}{p}\right) + (\alpha+\beta)\ln 2\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\sigma_p = (\alpha+2\beta)\ln p + (\alpha+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) + \beta\ln\left(1+\frac{2}{p}\right) - \beta\ln 2.$$

Par conséquent comme la suite (σ_p) converge, il faut que $\alpha + 2\beta = 0$.
Pour $\alpha = -2$ et $\beta = 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(n(n+1)^{\alpha}(n+2)^{\beta}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = -\ln 2.$$

❿ 2a) Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_{p+1}},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}} = 2.$

2b) Puisque pour tout entier $p \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n}{a_{n-1}a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{a_{n-1}a_n} - \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right) = \frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_p a_{p+1}},$$

on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}} = 1.$

Exercice 1.15. Etudier la convergence des séries suivantes :

❶ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+1}.$ ❷ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3+1}{n^3+5}.$

❸ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}.$ ❹ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin 5n^2}{n^2+1}.$

❺ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n!}{n^2}.$ ❻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 4n}{n^2}.$

❼ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$ ❽ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n^2+1)}}.$

❾ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}.$ ❿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}.$

Solution

❶ Converge car pour tout entier $n > 0$: $0 < \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2}$.
❷ Diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3+1}{n^3+5} = 2$.
❸ Diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \neq 0$.
❹ Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\frac{\sin 5n^2}{n^2+1}\right| < \frac{1}{n^2}$.
❺ Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\frac{\sin n!}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$.
❻ Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\frac{\cos 4n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$.
❼ Converge car pour tout entier $n > 0$:

$$0 < \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

❽ Converge car pour tout entier $n > 0$: $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

❾ Diverge car pour tout entier $n > 1$: $\frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
❿ Converge car pour tout entier $n > 0$: $0 < \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 1.16. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

❶ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. ❷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2+1}}$.

❸ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$. ❹ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\ln n}$.

❺ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$. ❻ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n^n}{(n+2)!}$.

❼ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n+1)}{(n+1)!}$. ❽ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right)$.

❾ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{25}}{\operatorname{sh} n}$. ❿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Solution

❶ Converge d'après le critère des séries alternées.
❷ Converge d'après le critère des séries alternées.
❸ Converge d'après le critère de Cauchy.
❹ Diverge car pour tout entier $n > 3$: $\frac{1}{1+\ln n} > \frac{1}{2\ln n} > \frac{1}{2n}$.
❺ Converge d'après le critère de d'Alembert.
❻ Converge d'après le critère de d'Alembert.
❼ Diverge d'après le critère de d'Alembert.
❽ 1) D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ converge.

2) D'après le critère des séries alternées, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ converge.

D'où la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right)$ converge.
❾ Puisque pour tout entier $n \geq 1$: $\operatorname{sh} n > \frac{e^n-1}{2} > \frac{n^{27}}{27!2}$, le critère de comparaison nous permet d'affirmer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{25}}{\operatorname{sh} n}$ converge.
❿ Diverge d'après le critère de l'intégrale.

Exercice 1.17. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

❶ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. ❷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n!}{n^3}$.

❸ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$. ❹ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}$.

❺ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin(2n+1)\frac{\pi}{4}\right)^n$. ❻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin(2n+2)\frac{\pi}{4}\right)^n$.

❼ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n.$ ❽ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}.$

❾ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n}.$ ❿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$

Solution

❶ Converge d'après le critère des séries alternées.
❷ Converge car pour tout entier $n > 1$:

$$0 < \frac{\ln n!}{n^3} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln k}{n^3} < \frac{\ln n}{n^2} = \frac{2\ln \sqrt{n}}{n^2} < \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

❸ Diverge. Posons $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$. Puisque pour tout entier $n \geq 0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 6n + 2} > 1,$$

la suite (a_n) est strictement croissante donc minorée par $a_0 = 1$; ce qui entraîne que $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$.
❹ Converge d'après le critère de d'Alembert.
❺ Converge car pour tout entier $n > 0$: $\left|\left(\sin(2n+1)\frac{\pi}{4}\right)^n\right| = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$.
❻ Diverge car $\lim_{n\to+\infty} \left(\sin(2n+2)\frac{\pi}{4}\right)^n \neq 0$.
❼ Montrons que cette série diverge. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge.
Alors, $\lim_{n\to+\infty} \sin n = 0$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} |\cos n| = 1$. Ainsi, puisque pour tout entier $n > 0$:

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right| = \left|\cos 1 + \frac{\cos n}{\sin n}\sin 1\right| \geq \left|\frac{\cos n}{\sin n}\right|\sin 1 - \cos 1,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right| = +\infty,$$

ce qui entraîne, d'après le critère de d'Alembert, que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$ diverge. D'où contradiction.
❽ Puisque $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}dx$ diverge ; ce qui nous permet de conclure, grâce au critère de l'intégrale, que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$ diverge.
❾ Diverge car $\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$.
❿ Diverge car pour tout entier $n > 1$: $\operatorname{Arctg}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 1.18. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

❶

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

❷

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

$\boxed{\textbf{Solution}}$

❶ Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$.
❷
$$\frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2k}$$
Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$.

Exercice 1.19. **Etudier la convergence des séries suivantes :**
$$S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2};\ \ S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}};\ \ S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3};\ \ S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n;$$
$$S_5 = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-n}).$$

$\boxed{\textbf{Solution}}$

$\dfrac{n^2+1}{n^2} \to 1 \neq 0$ donc la série ne converge pas.
$\dfrac{2}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ l s'agit du terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$
$$\frac{(2n+1)^4}{\left(7n^2+1\right)^3} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^2}.$$
Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \to \frac{1}{e} \neq 0.$$
La série diverge.
$$\ln\left(1+e^{-n}\right) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$
Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$.

Exercice 1.20. **Déterminer la nature de la série de terme général :**
$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \textbf{si } n \textbf{ est un carré} \\ \\ \dfrac{1}{n^2} & \textbf{sinon} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Solution}}$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=p^2}^{N} u_n + \sum_{n\neq p^2}^{N} u_n > \sum_{n=p^2}^{N} u_n = \sum_{n=p^2}^{N} \frac{1}{p}.$$
Cette dernière série diverge (Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc la série de terme général u_n diverge.
Expliquons quand même un peu
$$\sum_{n=1}^{N} u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10^2} + \cdots$$
Ainsi, il est plus clair que tous les "$\frac{1}{n}$" sont dans la série et que donc la série diverge.

<u>Exercice</u> 1.21. **Les sommes suivantes sont-elles finies ?**

$$S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n; \quad S_2 = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}}; \quad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}; S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Solution

- $\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\frac{2^n}{3^{n-2}} = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\left|\frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}\right| \leq \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$, la série converge.
- $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \sim \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

<u>Exercice</u> 1.22. **Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général**

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$

Solution

Si $\alpha > 1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta \in]\alpha, 1[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} \to 0 < 1.$$

Lorsque $n \to +\infty$. Cela montre que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ converge car $\beta < 1$.
Si $\alpha < 1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta \in]1, \alpha[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = n^{\alpha-\beta} \ln(n) \to +\infty.$$

Lorsque $n \to +\infty$. Cela montre que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\beta > 1$.
Lorsque $\alpha = 1$, c'est plus compliqué, les règles de Riemann ne marche pas. Il s'agit d'une série à termes positifs, on peut appliquer la comparaison à une intégrale

$$x \to \frac{1}{x\ln(x)}.$$

Est intégrable car

$$\int_2^X \frac{1}{x\ln(x)} dx = \left[\ln(\ln(x)\right]_2^X = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2))\Big) \to +\infty.$$

Lorsque X tend vers l'infini, ce qui montre que l'intégrale est divergente, la fonction $x \to \frac{1}{x\ln(\mathrm{x})}$ est clairement décroissante et tend vers 0 en l'infini, donc la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Remarque 1.1. *C'est ce que l'on appelle la règle de Duhamel.*

<u>Exercice</u> 1.23. **Etudier la nature de la série de terme général u_n :**

❶ $u_n=\frac{n+1}{n^3-7}$ ❷ $u_n=\frac{n+1}{n^2-7}$ ❸ $u_n=\frac{n+1}{n-7}$
❹ $u_n=\frac{1}{\ln(n^2+2)}$ ❺ $u_n=\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$ ❻ $u_n=\frac{1}{n!}$
❼ $u_n=\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ ❽ $u_n=\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ ❾ $u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
❿ $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Solution

❶ La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n\sim\frac{1}{n^2}.$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha=2>1$.
❷ La suite (u_n) est de signe constant

$$u_n\sim\frac{1}{n}.$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha=1\leq 1$.
❸ $u_n\to 1\neq 0$ la série diverge grossièrement.
❹ u_n est de signe constant

$$u_n=\frac{1}{\ln\left(n^2+2\right)}=\frac{1}{\ln\left(n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)}=\frac{1}{2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{1}{2\ln(n)+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

$$n^{\frac{1}{2}}u_n=n^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\ln(n)+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\to+\infty.$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n\to+\infty$ avec $\alpha<1$ entraine que la série de terme général u_n diverge.
❺ u_n est de signe constant

$$n^{\frac{5}{4}}u_n=n^{\frac{5}{4}}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}}\to 0$$

D'après les règles de Riemann $n^\alpha u_n\to+\infty$ avec $\alpha>1$ entraine que la série de terme général u_n converge.
❻ u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0<0.$$

D ?après la Règle de D ?Alembert la série de terme général u_n converge.
❼ u_n est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{4^{n+2}((n+2)!)^2}{(2n+1)!}}{\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}}=\frac{4^{n+2}((n+2)!)^2(2n-1)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n+1)!}=4\frac{((n+2)^2((n+1)!)^2(2n-1)!}{((n+1)!)^2(2n+1)2n(2n-1)!}$$
$$=4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n}\sim 1.$$

Cà ce n'est pas de chance, sauf si on peut montrer que la limite est 1 par valeur supérieure

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=4\frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n}=\frac{4\left(n^2+4n+4\right)}{4n^2+2n}=\frac{4n^2+16n+16}{4n^2+2n}>1.$$

Ouf ! La limite est 1^+ donc la série de terme général diverge.
❽ u_n est de signe constant

$$u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \to \frac{1}{e} \neq 0.$$

Remarque 1.2. *La série de terme général u_n diverge grossièrement.*

❾ u_n est de signe constant

$$u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n-\frac{1}{2}+o(1)} = e^{-n}e^{-\frac{1}{2}+o(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

$\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ strictement inférieure à 1. La série de terme général u_n converge.
❿

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} > 1.$$

Donc u_n ne peut pas tendre vers 0.

Exercice 1.24.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ est semi-convergente.

Solution

On pose

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\sqrt{x}+1)}$$

$$f'(x) = -\frac{(\ln(\sqrt{x}+1))'}{(\ln(\sqrt{x}+1))^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{\ln(\sqrt{x}+1)}}{(\ln(\sqrt{x}+1))^2} < 0.$$

Donc la suite de terme général $u_n = f(n)$ est décroissante, elle tend vers 0 , d'après le TSSA la série converge.

$$|u_n| = \frac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)}$$

$$n^{\frac{1}{2}}|u_n| = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln(\sqrt{n}+1)} \to +\infty.$$

D'après les règles de Riemann si $n^\alpha |u_n| \to +\infty$ avec $\alpha > 1$ la série de terme général $|u_n|$ diverge ce qui montre que la série de terme général ne converge pas absolument. Cette série est donc semi-convergente.

Exercice 1.25. **Etudier la convergence de la série numérique de terme général u_n :**

❶ $u_n = (-1)^n\frac{n^3}{n!}$.
❷ $u_n = \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{C}$.
❸ $u_n = na^{n-1}, a \in \mathbb{C}$.
❹ $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.
❺ $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.
❻ $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$.
❼ $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Solution

❶ On pose $v_n = |u_n| = \frac{n^3}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n+1} \to 0.$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

❷ On pose $v_n = |u_n| = \frac{|a|^n}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \to 0.$$

D'après la règle de D ?Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

❸ On pose $v_n = |u_n| = n|a|^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)|a|^n}{n|a|^{n-1}} = \frac{n}{n+1}|a| \to |a|$$

Si $|a| < 1$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

Si $|a| \geq 1, |u_n| \to +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

❹

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Il s'agit d'une série alternée car $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$, il est à peu près évident que a_n est décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA, la série converge.

Remarque 1.3. *on pourrait montrer qu'elle semi-convergente.*

❺

$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.

❻ On pose

$$V_N = \sum_{n=0}^{N} \sin(n) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{in}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right).$$

Normalement il faudrait prendre la somme à partir de $n = 1 \mathrm{car} u_0$ n'est pas défini, mais cela ne change rien au fond.

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in} = \sum_{n=0}^{N} \left(\mathrm{e}^{i}\right)^n = \frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^{ir}} = \frac{e^{\frac{i(N+1)}{2}}\left(e^{-\frac{i(N+1)}{2}} - e^{\frac{i(N+1)}{2}}\right)}{e^{\frac{i}{2}}\left(e^{-\frac{i}{2}} - e^{\frac{i}{2}}\right)} = e^{\frac{iN}{2}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= e^{\frac{iN}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Donc

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Et

$$|V_N| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right)\right| \leq \left|\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{in}\right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Les sommes partielles sont bornées et la suite $\frac{1}{n}$ est décroissante et tend vers 0 . Cela montre que la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

❼ Tentons de faire un développement limité en $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ donc à l'ordre 2 ou $3/2$, dans le premier terme on va perdre un ordre à cause du n devant le $\ln$ et dans la cos la variable sera $1/\sqrt{n}$

$$\begin{aligned}
u_n &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4}{4!} + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{7}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{7}{24n^2}
\end{aligned}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.

Exercice 1.26. **Calculer**

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}.}$$

et

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}}$$

Solution

❶ On pose $v_n = \frac{1}{n!}$, il s'agit d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1.$$

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_{n-k} v_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Comme on le verra dans le chapitre " séries entières"

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Ce qui montre que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^2.$$

❷ On pose
$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}.$$
a_n est le terme général d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1.$$
$|b_n| = \frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente avec $q = \frac{1}{2} < 1$, donc la série de terme général b_n converge absolument.
On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}a_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = e.$$
Comme on le verra dans le chapitre " séries entières " et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$
Finalement
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{2e}{3}.$$

<u>Exercice</u> 1.27. Etudier la nature des séries de terme général et calculer leur somme :

- ❶ $\boldsymbol{u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \quad n \geq 3.}$ ❷ $\boldsymbol{u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), n \geq 2.}$
- ❸ $\boldsymbol{u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right), \quad n \geq 1.}$

Solution

❶ $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ qui est une suite de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$ donc la série de terme général u_n converge.
On décompose cette fraction en élément simple
$$u_n = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{\frac{1}{4}}{n} + \frac{\frac{3}{8}}{n-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{n+2}$$
$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\frac{1}{4}}{k} + \frac{\frac{3}{8}}{k-2} + \frac{-\frac{5}{8}}{k+2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2}$$

Dans la seconde somme on pose $k' = k - 2, k = 3 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n - 2$.
Dans la troisième somme on pose $k'' = k + 2, k = 3 \Rightarrow k'' = 5$ et $k = n \Rightarrow k'' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k'=1}^{n-2}\frac{1}{k'} - \frac{5}{8}\sum_{k''=5}^{n+2}\frac{1}{k''}.$$

On change k' en k et k'' en k

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2}\frac{1}{k}.$$

On va réunir les valeurs de k comprises entre $k = 5$ et $k = n - 2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} u_k = &\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right)\\ &- \frac{5}{8}\left(\sum_{k=5}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\\ &- \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=3}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right.$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{48} + \frac{25}{32} = \frac{89}{96}.$$

❷ Il est à peu près clair que u_n tend vers 0 , c'est déjà cela, mais comment, on va faire un développement limité en $\frac{1}{n}$ de $|u_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ (car $\frac{n+1}{n-1} > 1$), on pose $x = \frac{1}{n}$ donc $n = \frac{1}{x}$.
On fait un développement limité à l'ordre 2 car la série de Riemann $\frac{1}{n}$ est divergente et que la série de Riemann $\frac{1}{n^2}$ est convergente (En général il faut aller à un ordre strictement supérieur à 1, dans les cas raisonnable).

$$\begin{aligned}|u_n| = \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\\ &= 2x + o\left(x^2\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Et voilà, c'est raté la série de terme général u_n ne converge pas absolument, on va essayer de montrer qu'elle converge simplement en utilisant le fait que cette série est alternée.

$$v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = f(n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1), x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-(x+1)}{x^2-1} = -\frac{2}{x^2-1} < 0.$$

De plus
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 0.$$
Donc la série de terme général $u_n = (-1)^n v_n$ est convergente.
$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) &= \textstyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k(\ln(k+1)-\ln(k-1))\\ &= \textstyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln(k+1) - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln(k-1).\end{aligned}$$
Dans la première somme on pose $k' = k+1, k=2 \Rightarrow k'=3$ et $k=n \Rightarrow k'=n+1$.
Dans la seconde somme on pose $k'' = k-1, k=2 \Rightarrow k'=1$ et $k=n \Rightarrow k''=n-1$
$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k'=3}^{n+1}(-1)^{k'-1}\ln(k') - \sum_{k''=1}^{n-1}(-1)^{k''+1}\ln(k'').$$
On remarque que $(-1)^{k''+1} = (-1)^{k''-1}(-1)^2 = (-1)^{k''-1}$, puis on remplace k' et k'' par k dans chacune des sommes
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln(\frac{k+1}{k-1}\Big) &= \sum_{k=3}^{n+1}(-1)^{k-1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)\\ &= \sum_{k=3}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k) + (-1)^{n-1}\ln(n) + (-1)^{(n+1)-1}\ln(n+1)\\ &- \left((-1)^{1-1}\ln(1) + (-1)^{2-1}\ln(2) + \sum_{k=3}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)\right).\end{aligned}$$
Les deux sommes se simplifient
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) &= \sum_{k=3}^{n+1}(-1)^{k-1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\ln(k)\\ &= (-1)^{n-1}\ln(n) + (-1)^n\ln(n+1) + \ln(2)\\ &= (-1)^{n-1}(\ln(n) - \ln(n+1)) + \ln(2)\\ &= (-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(2)\end{aligned}.$$
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left((-1)^{n-1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(2)\right) = \ln(2)\end{aligned}$$
❸ $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \sim -\frac{1}{(n+2)^2} \sim -\frac{1}{n^2}$, il s'agit d'une suite de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, la série converge.
Petit calcul
$$1 - \frac{1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2-1)(k+2-1)}{(k+2)^2} = \frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}$$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k+3) + \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+2).\end{aligned}$$

Dans la première somme on pose $k' = k + 3, k = 1 \Rightarrow k' = 4, k = n \Rightarrow k' = n + 3$.
Dans la deuxième somme on pose $k'' = k + 1, k = 1 \Rightarrow k'' = 2, k = n \Rightarrow k'' = n + 1$.
Dans la troisième somme on pose $k''' = k + 2, k = 1 \Rightarrow k''' = 3, k = n \Rightarrow k'' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k'=4}^{n+3} \ln(k') + \sum_{k''=2}^{n+1} \ln(k'') - 2\sum_{k'''=3}^{n+2} \ln(k''').$$

On remplace k', k'' et k''' par k

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=4}^{n+3} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - 2\sum_{k=3}^{n+2} \ln(k).$$

On va réunir les sommes entre $k = 4$ et $k = n + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) \\ &= \left(\sum_{k=4}^{n+1} \ln(k) + \ln(n+2) + \ln(n+3)\right) + \left(\ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1} \ln(k)\right) \\ &\quad - 2\left(\ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1} \ln(k) + \ln(n+1)\right).\end{aligned}$$

Les sommes de $\ln(k)$ de $k = 4$ à $k = n + 1$ s'éliminent.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) &= (\ln(n+2) + \ln(n+3)) + (\ln(2) + \ln(3)) - 2(\ln(3) + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2}\right) + \ln(2) - \ln(3) \\ &\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2} = 1.\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

<u>Exercice</u> 1.28.

Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b, c sont trois réels vérifiant $a + b + c = 0$, on pose pour tout $n \geq 0$:

$$\boldsymbol{u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}}.$$

Montrer que la suite de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Solution

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (av_k + bv_{k+1} + cv_{k+2}) = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} + c\sum_{k=0}^{n} v_{k+2}.$$

Dans la deuxième somme on pose $k' = k+1, k = 0 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$.
Dans la troisième somme on pose $k'' = k+2, k = 0 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+2$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k'=1}^{n+1} v_{k'} + c\sum_{k''=2}^{n+2} v_{k''}.$$

On change k' et k'' par k.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=1}^{n+1} v_k + c\sum_{k=2}^{n+2} v_k.$$

On réunit les sommes entre $k = 2$ et $k = n$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= a\left(v_0 + v_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k\right) + b\left(v_1 + \sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1}\right) + c\left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1} + v_{n+2}\right)\\ &= a(v_0+v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1}+v_{n+2}) + (a+b+c)\sum_{k=2}^{n} v_k\\ &= a(v_0+v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1}+v_{n+2}).\end{aligned}$$

Car $a+b+c = 0$.
La suite tend vers 0 donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty}\left(a(v_0+v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1}+v_{n+2})\right) = a(v_0+v_1) + bv_1.$$

Exercice 1.29.

Etudier la convergence des séries de terme général :

❶ $\boldsymbol{u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)}$ ❷ $\boldsymbol{u_n = \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln(n))^{2011}}$

❸ $\boldsymbol{u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}}\sqrt{\sin(x)}dx}$ ❹ $\boldsymbol{u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}}$

❺ $\boldsymbol{u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}}$ ❻ $\boldsymbol{u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}}$.

Solution

❶ On va d'abord diviser n^3+1 par n^2+1, ce qui donne $n^3+1 = (n^2+1)n + (-n+1)$, donc

$$\frac{n^3+1}{n^2+1} = n + \frac{-n+1}{n^2+1}.$$

Et alors

$$u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{-n+1}{n^2+1}\pi\right) = (-1)^n\sin\left(\frac{-n+1}{n^2+1}\pi\right).$$

On va montrer que la série est alternée, mais comme $-n+1 < 0$, le sinus va être négatif aussi, on va légèrement modifier u_n

$$u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right).$$

Puis on va montrer que $v_n = \sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right)$ est décroissante et qu'elle tend vers 0 $\frac{n-1}{n^2+1}$ tend vers 0, donc v_n tend vers $\sin(0) = 0$.
Avant de montrer que la suite est décroissante on va montrer que $\frac{n-1}{n^2+1}\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\frac{n-1}{n^2+1}\pi > 0$ c'est clair

$$\frac{\pi}{2} - \frac{n-1}{n^2+1}\pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{n-1}{n^2+1}\right)\pi = \frac{n^2+1-2(n-1)}{2\left(n^2+1\right)}\frac{\pi}{2} = \frac{n^2-2n+3}{2(n^2+1)}\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{(n-1)(n-3)}{2\left(n^2+1\right)}\frac{\pi}{2} > 0.$$

Pour $n > 3$ (n tend vers l' infini donc on n'a pas de problème pour les petites valeurs de n)

$$v_n = \sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right) = f(n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \sin\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)' \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right) = \pi\frac{1\times\left(x^2+1\right) - (x-1)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$
$$= \pi\frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right).$$

Au moins pour x assez grand, $-x^2+2x+1 < 0$ et pour x assez grand (que 3) $\frac{x-1}{x^2+1}\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right) > 0$, la fonction est décroissante donc la suite est décroissante. Finalement il s'agit d'une série alternée convergente.
❷

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln(n))^{2011} = \left(1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)(\ln(n))^{2011}$$
$$= \left(\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)(\ln(n))^{2011} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}(\ln(n))^{2011}$$
$$n^{\frac{3}{2}}\frac{\pi^2}{2n^2}(\ln(n))^{2011} = \frac{\pi^2}{2n^{\frac{1}{2}}}(\ln(n))^{2011} \to 0.$$

D'après la règle de Riemann la série de terme général u_n converge.
❸ On rappelle que pour tout $x \geq 0, \sin(x) \leq x$

$$0 \leq u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)}dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{3} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Donc la série de terme général u_n converge.
❹ $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$ n'est pas de signe constant mais il parait délicat d'appliquer le TSSA

$$u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n} = \frac{1}{1+n} + (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}.$$

$\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$, donc divergente.
Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, on a alors $f(n) = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

$$f(n) > 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(n) = 0.$$

C'est évident. Et pour tout $x > 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - \sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)-2x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} < 0.$$

Ce qui montre que la suite $\left(\frac{\sqrt{n}}{1+n}\right)$ est décroissante, d'après le TSSA la série de terme général $(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$ converge.
u_n est la somme du terme général d'une série divergente $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et du terme général d'une série convergente $(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{1+n}$, donc la série de terme général u_n diverge.
❺ D'après la règle de Cauchy

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{(\ln(n))^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln(n)} \to 0 < 1.$$

Donc la série de terme général u_n converge. ❻ Cela va dépendre de la valeur de α

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2\sin^2(\alpha)}{n^{\frac{2}{n}}}$$
$$n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n}\ln(n)} \to e^0 = 1.$$

Donc

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \to 2\sin^2(\alpha).$$

D'après la règle de Cauchy.
Si $2\sin^2(\alpha) < 1$, autrement dit $\sin^2(\alpha) < \frac{1}{2}$, soit encore $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela se voit assez facilement sur le cercle trigonométrique.
La série de terme général u_n converge.
Si $2\sin^2(\alpha) > 1$, autrement dit si ${}^2\sin^2(\alpha) > \frac{1}{2}$, soit encore $-1 \leq \sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) \leq 1$, c'est-à-dire si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha \in \left]\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$ La série de terme général u_n diverge.
Si $2\sin^2(\alpha) = 1$ on ne peut pas conclure avec la règle de Cauchy, mais alors

$$u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n} = \frac{\left(2\sin^2(\alpha)\right)^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Qui est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.

Exercice 1.30.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\pi\mathbb{N}$$

❶ **On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser**

- **a) La nature de la série $\sum u_n$.**
- **b) La nature de la suite (u_n).**

❷ **a) Si $a_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, quelle est la nature de la série $\sum a_n$?**

- **b) Quelle est la nature de la suite (u_n) pour $a = 1$.**

Solution

❶

a. La suite u_n n'est pas forcément positive mais à partir d'un certain rang $0 < \frac{a}{k} < \pi$ donc les termes $\sin\left(\frac{a}{k}\right)$ sont positifs donc u_n ne change plus de signe lorsque que n augmente. Elle est de signe constant.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \prod_{k=1}^{n+1} \sin\left(\frac{a}{k}\right)}{n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right)} = (n+1)\sin\left(\frac{a}{n+1}\right) \sim (n+1) \times \frac{a}{n+1} = a.$$

D'après la règle de D'Alembert si $a < 1$ alors la série converge et si $a > 1$ la série diverge.

b. Si la série converge alors la suite tend vers 0.

❷

a. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc a_n tend vers 0, on va faire un développement limité de a_n en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2. Attention en multipliant par n on va perdre un ordre. Remarque $\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ donc $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ et la suite a_n est négatif (donc de signe constant).

$$\begin{aligned} a_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) &= \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

$-\frac{1}{6n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente $(\alpha = 2 > 1)$. Donc la série de terme général a_n converge.

b. Pour $a = 1$

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

Donc

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(k\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La série de terme général a_n converge, donc la suite (u_n) converge.

Exercice 1.31.

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

❶ **Nature de la série $\sum u_n$?**

❷ **Nature de la série $\sum (-1)^n u_n$?**

Solution

❶ Dans un premier temps remarquons que pour tout $n \geq 1, u_n > 0$, on en déduit que

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Cela montre que la suite (u_n) tend vers 0 mais cela ne suffit pas pour montrer que la série est convergente (si on avait pu montrer que $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n^2}$ là cela aurait été bon).
Dans un deuxième temps on va faire un développement limité en " u_n "

$$u_{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 - u_n + o(u_n)\right) = \frac{1}{n} - \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

$\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général u_n diverge.
❷
$$(-1)^{n+1}u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1}\frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right).$$
$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est une série alternée, $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant, c'est le terme général d'une série de Riemann.
$$\left|(-1)^{n+1}\frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)\right| \sim \frac{u_n}{n}.$$
Et $0 < \frac{u_n}{n} < \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$ par conséquent $(-1)^{n+1}\frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente, c'est donc le terme général d'une série convergente et enfin $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ est le terme général d'une série convergente. (Il en est de même pour $(-1)^n u_n$ évidemment).

Exercice 1.32.

Montrer que la suite $u_n = \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ converge, on pourra d'abord montrer que la série de terme général
$$z_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
est convergente.

Solution

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}}{\frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{e^{n+1}(n+1)!n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{e^1(n+1)n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{en^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}$$
$$= e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = ee^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = ee^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = ee^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$
Le but est de faire un développement limité de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en $\frac{1}{n}$ à l'ordre 2.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = ee^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = ee^{-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = ee^{-1+\frac{1}{2n}\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$
$$= e^{\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Par conséquent
$$z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{12n^2}.$$
$\frac{1}{12n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente donc z_n est le terme général d'une série convergente.
D'autre part
$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(u_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n}\ln(u_k).$$
Dans la première somme on pose $k' = k+1, k = 1 \Rightarrow k' = 2$ et $k = n \Rightarrow k' = n+2$
$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k'=2}^{n+1}\ln(u_{k'}) - \sum_{k=1}^{n}\ln(u_k).$$

On change k' en k dans la première somme et on simplifie

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$$
$$\ln(u_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} z_k + \ln(u_1).$$

La série de terme général z_k converge donc $\ln(u_{n+1})$ converge et finalement u_{n+1} admet une limite finie.

<u>Exercice</u> 1.33.

Nature de la série de terme général (convergence et absolue convergence).

$$\boldsymbol{w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.}$$

Où

$$\boldsymbol{u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.}$$

Solution

Commençons par une mauvaise nouvelle, si u_n et v_n sont les termes généraux de séries absolument convergente alors w_n est le terme général de la série produit, qui est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Seulement voilà la série de terme général v_n ne converge pas absolument alors il faut faire autrement.

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{n}\left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}\right).$$

Puis on va décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}$ en éléments simples, il existe a, b et c (ces trois constantes peuvent dépendre de n) tels que :

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{a}{(k+1)^2} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{n-k+1}.$$

Je multiplie par $(k+1)^2$, puis $k=-1$

$$a = \left[\frac{1}{n-k+1}\right]_{k=-1} = \frac{1}{n+2}.$$

Je multiple par $n-k+1$, puis $k=n+1$

$$c = \left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]_{k=n+1} = \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Je multiplie par k, puis $k \to +\infty$

$$0 = b - c \Rightarrow b = \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Finalement on a

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{\frac{1}{n+2}}{(k+1)^2} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{n-k+1}.$$

Ce que l'on remplace dans la somme partielle

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} w_n &= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n+2}}{(k+1)^2} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{n-k+1}\right)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\right)\right).\end{aligned}$$

Puis on va faire le changement d'indice $k' = n - k$ dans la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}$$
$$k = 0 \Rightarrow k' = n \quad \text{et } k = n \Rightarrow k' = 0$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1} = \sum_{k'=0}^{n}\frac{1}{k'+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Ce que l'on remplace dans la somme partielle

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} w_n &= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\left((-1)^n\left(\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\right) + 2\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right) = S_{1,N} + S_{2,N}.\end{aligned}$$

Où $w_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$ est le terme général de la série S_1 et $w_{2,n} = \frac{(-1)^n}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$ le terme général de la série S_2.
On rappelle un résultat " connu ",

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \sim \ln(n).$$

Alors

$$n^{\frac{3}{2}}\left|w_{2,n}\right| = n^{\frac{3}{2}}\frac{1}{(n+2)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \sim \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0.$$

D'après les règles de Riemann la série de terme général converge absolument, donc $S_{1,N}$ admet une limite finie lorsque N tend vers l'infini.
Pour la série S_1 cela va être moins simple $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$ est une somme partielle qui admet une

limite puisque que le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, mais le terme $\frac{(-1)^n}{n+2}$ ne permet pas d'espérer une convergence absolue, reste la solution de montrer qu'il s'agit d'une série alternée, il faut montrer que

$$a_n = \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Tend vers 0 et est dévroissant, $a_n \to 0$ c'est évident.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n =& \frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} \\ =& \frac{(n+2)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2} - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Donc $a_{n+1} - a_n$ a le même signe que

$$\begin{aligned} &(n+2)\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(k+1)^2} - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} \\ &\quad = (n+2)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right) - (n+3)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}, k+1 < n+1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} > \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}1 = \frac{1}{(n+1)^2}\times(n+1) = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0.$$

Ce qui montre bien que $a_{n+1} - a_n < 0$ c'est-à-dire que la suite est décroissante.
Par conséquent

$$w_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} = (-1)^n a_n.$$

Est le terme général d'une série convergente et enfin la série de terme général w_n est la somme de deux série convergente, elle converge.

Exercice 1.34.

Montrer que les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Ne sont pas de mêmes natures et que pourtant $u_n \sim v_n$.

Solution

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissant et tend vers 0 donc la série de terme général u_n est une série convergente.
$\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général v_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente, elle diverge.

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 1.$$

Ce qui montre que ces deux suites sont équivalentes.

Remarque 1.4. *Si $u_n \sim v_n$ alors les séries de terme général u_n et de terme général v_n sont de même nature est un résultat faux, pour qu'il soit vrai, il faut que u_n et v_n soient de signes constants.*

<u>Exercice</u> 1.35. **On pose**

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

❶ **Montrer que la suite $f(n)$ est positive et décroissante. Au moyen d'une intégration par parties donner une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n-1)$.**
Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$

$$f(n) = \frac{n!}{e} \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right).$$

❷ **Montrer que l'on a :**

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la nature des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n); \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n).$$

❸ **Déterminer le rayon de convergence de la série entière**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) x^n.$$

Solution

❶ $\forall x \in [0,1], x^n e^{-x} > 0$ donc $f(n) > 0$

$$\forall x \in [0,1], 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

Donc

$$\int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

Autrement dit $f(n+1) \leq f(n)$, cette suite est décroissante.

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} \left(-e^{-x} \right) dx = -\frac{1}{e} + n f(n-1).$$

Montrons par récurrence que
$$f(n) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).$$
Pour $n = 0$
$$\int_0^1 x^0 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1$$
$$\frac{0!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{e}(e-1) = 1 - \frac{1}{e}.$$
L'hypothèse est vérifiée au rang 0.
Supposons
$$f(n-1) = \frac{(n-1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right).$$
Alors
$$f(n) = -\frac{1}{e} + nf(n-1) = -\frac{1}{e} + n\frac{(n-1)!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) = -\frac{1}{e} + \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)$$
$$= \frac{n!}{e} \times \left(-\frac{1}{n!}\right) + \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).$$
Ce qui achève la récurrence.
❷ Pour tout $x \in [0,1], e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0}$, on en déduit que :
$$\frac{1}{e} \times x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n.$$
Puis en intégrant en 0 et 1
$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n dx \leq f(n) \leq \int_0^1 x^n dx.$$
Comme
$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
Cela donne
$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}.$$
$f(n)$ est minorée par $\frac{1}{e(n+1)} \sim \frac{1}{en}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général $f(n)$ diverge.
$$\frac{1}{en(n+1)} \leq \frac{f(n)}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$
$\frac{f(n)}{n}$ est majorée par $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série de terme général $\frac{f(n)}{n}$ converge.
$f(n)$ est positive et décroissante, la série de terme général $(-1)^n f(n)$ est une série alternée convergente.

❸ Soit R le rayon de convergence de la série entière. Comme la série de terme général $f(n)$ diverge cela signifie que 1 n'est pas dans le disque de convergence sinon

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)1^n.$$

Convergerait, cela entraine que $R \geq 1$.
Comme la série de terme général $(-1)^n f(n)$ converge, cela signifie que -1 est dans le disque de converge donc $R \leq 1$, en effet

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-1)^n < +\infty.$$

Exercice 1.36. **On considère la série numérique de terme général u_n pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:**

$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

- ❶ **Montrer que si cette série est convergente pour une valeur a donnée, elle converge pour tout $b \geq a$.**
- ❷ **Montrer que si $a \leq 2$ la série est divergente.**

On pourra utiliser un développement limité de $\ln(u_n)$.

- ❸ **On pose $a = 2 + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$**
  Montrer que u_n est équivalent à $\exp\left(-\frac{1}{6}n^{\varepsilon}\right)$. En déduire que la série est alors convergente.
- ❹ **Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles cette série converge.**

Solution

❶ On a $0 < \sin(u) < u$ pour $u > 0$ donc

$$0 < n \sin\left(\frac{1}{n}\right) < n \times \frac{1}{n} = 1.$$

Par conséquent

$$\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a} > \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b} > 0.$$

Puisque $n^b > n^a$.
Cela montre que le terme général $\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b}$ est majoré par le terme général d'une série convergente, cette série converge.
❷

$$\ln(u_n) = \ln\left(\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}\right) = n^a \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Il faut faire le développement limité de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ à un ordre suffisant parce que l'on va d'abord multiplier par n puis par n^a et à la fin on veut un développement limité à un ordre strictement supérieur à 2.

$$\ln(u_n) = n^a \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^a \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^a \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$= n^a\left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3-a}}\right).$$

Comme $a \leq 2, 2-a \geq 0$, ce qui montre que $\ln(u_n)$ tend vers 0 , et que donc u_n tend vers $1 \neq 0$, la série ne converge pas.

❸

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= n^{2+\epsilon}\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{2+\epsilon}\ln\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\
&= n^{2+\epsilon}\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= n^{2+\epsilon}\left(-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{n^\epsilon}{6}+o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\\
u_n &= \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}+o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right)\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right).
\end{aligned}$$

$1-\epsilon > 0$ donc $\frac{1}{n^{1-\epsilon}} \to 0$ et alors $\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \to 1$, ce qui montre que

$$u_n \sim \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right).$$

En utilisant les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^2\exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right) = 0.$$

Ce qui montre que la série de terme général u_n converge.

❹ On vient de montrer que la série de terme général u_n était convergente si $2 < a < 3$ et à la première question on a montré qui si la série convergeait pour a alors elle convergeait pour $b > a$, elle converge donc pour tout $a > 2$.

Exercice 1.37.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

❶ **a) Calculer u_0.**

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}.$$

❷

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}.$$

c) Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Solution

❶

a)

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

b) $x^2+1 \geq 1$ donc

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1} = x^{2n}.$$

Puis en intégrant entre 0 et 1

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^{2n}dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

❷

a)

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)\,x^{2n}}{1+x^2}dx \\ &= \int^1 dx = \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(u_{k+1}+u_k\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k.$$

Dans la première somme on pose $k' = k+1, k = 0 \Rightarrow k' = 1$ et $k = n \Rightarrow k' = n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k'=1}^{n+1}(-1)^{k'-1}u_{k'} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k.$$

On remplace k' par k dans la première somme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}u_k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k \\ &= (-1)^{n-1+1}u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k + (-1)^0 u_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k \\ &= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k \\ &= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k = (-1)^n u_{n+1} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que u_n tend vers 0 pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \frac{\pi}{4}.$$

Chapitre 2

Fonctions numériques de deux variables

Exercice 2.1. **Calculer les limites suivantes quand elles existent :**

❶
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y}.$$

❷
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x^2-y^2}.$$

❸
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y.$$

❹
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+y^2).$$

❶
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Exercice 2.2.
Calculer les limites suivantes quand elles existent :

❶ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

❷ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

❸ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}.$

❹ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$

❺ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$

❻ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}.$

❼ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

❽ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}.$

❾ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$

❿ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}.$

Solution

❶ N'existe pas car $\lim_{t\to0} f(t,0) = 1 \neq -1 = \lim_{t\to0} f(0,t)$ avec $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

❷ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} : \left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |xy| \Rightarrow \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0.$

❸ N'existe pas car $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0 \neq -1 = \lim_{t\to 0} f(0,t)$ avec $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^2}{x^2+y^2}$.

❹ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|x| + y^2|y|}{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

❺ N'existe pas car $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(t,0)$ avec $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

❻ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \frac{x^2}{x^2+y^4} y^2 \leq y^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0.$$

❼ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

❽ N'existe pas car $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(t,0)$ avec $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$.

❾ $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$.

❿ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|\sin y| \leq |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y}{x^2+y^2} = 0.$$

Exercice 2.3.

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

❶ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2 + \sin 2xy + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

❷ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}$.

❸ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^4}{\sin^2(x^2+y^2)}$.

❹ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2 \sin y}{x^2 + \operatorname{sh}^2 y}$.

❺ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin xy}{\operatorname{sh} x^2 + \operatorname{sh}^2 y}$.

❻ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

❼ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \operatorname{th} y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

❽ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{\sin(x^2+y^2)}$.

❾ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^3\frac{\sin(x^2-y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}$.

❿ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2) + x^2\sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}$.

Solution

❶ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$: $\left|\dfrac{\sin x^2 + \sin 2xy + \sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$

$$\leq \frac{x^2+2|xy|+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(|x|+|y|)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 4\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2+\sin 2xy+\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

❷ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\pi}{2}$:

$$\left|\frac{\sin x \sin y}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|xy|}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}|y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

❸ N'existe pas car $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to 0} f(0,t)$ avec $f(x,y) = \dfrac{x^5+y^4}{\sin^2(x^2+y^2)}$.

❹ 2.14 $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\sin x^2 \sin y}{x^2+\operatorname{sh}^2 y}\right| = \frac{|\sin x^2|}{x^2+\operatorname{sh}^2 y}|\sin y| \leq |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2 \sin y}{x^2+\operatorname{sh}^2 y} = 0.$$

❺ Rappel : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\operatorname{sh} x^2 \geq x^2$ et $\operatorname{sh}^2 y \geq y^2$.
$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{xy \sin xy}{\operatorname{sh} x^2+\operatorname{sh}^2 y}\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq y^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy \sin xy}{\operatorname{sh}^2+\operatorname{sh}^2 y} = 0.$$

❻ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \leq |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

❼ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\sin x \operatorname{th} y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \leq |y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \operatorname{th} y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

❽ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{\sin(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}\left(x^2-y^2\right) = 0.$

❾ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < x^2+y^2 < \frac{\pi}{2}$:

$$\left|x^3y^3\frac{\sin(x^2-y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}|xy|^3 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^3\frac{\sin(x^2-y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)} = 0.$$

❿1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} = 1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)} = 1.$

2) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^2 \sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}|\sin y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)} = 0.$$

Finalement, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)+x^2\sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)} = 1.$

<u>Exercice</u> 2.4.

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{tg} xy}{x^2+y^2}$.

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{tg} y}{x^2+y^2}$.

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Arctg} 2\left(x^2+y^2\right)+x^2\sin y}{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\operatorname{th} y^2$.

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\sqrt[4]{1+x^2+y^2}}{\operatorname{sh}\left(x^2+y^2\right)}$.

$\boxed{6}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln\sqrt{1+\sqrt{x^2+(y-1)^4}}}{\sin\sqrt{x^2+(y-1)^4}}$.

$\boxed{7}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}$.

$\boxed{8}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\boxed{9}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln\left(x^2+y^2\right)$.

$\boxed{10}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.

$\boxed{11}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)+y^4\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

$\boxed{12}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^4-y^4\right)+\sin 2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^6+y^6\right)} \times \ln\left(1+\left(x^2-y^2\right)^2+x^2y^2\right)$.

Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pour les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par.

Solution

$\boxed{1}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^4\operatorname{tg} xy}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}x^2|\operatorname{tg} xy| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4\operatorname{tg} xy}{x^2+y^2}=0.$$

$\boxed{2}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$0\le\left|\frac{x^2\operatorname{tg} y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|\operatorname{tg} y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\operatorname{tg} y}{x^2+y^2}=0.$$

$\boxed{3}$ 1) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{x^2\sin y}{\sin\left(x^2+y^2\right)}\right| \le \frac{x^2+y^2}{\sin\left(x^2+y^2\right)}|\sin y| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin y}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=0.$$

2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{Arctg} 2t}{\sin t}=2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{Arctg} 2\left(x^2+y^2\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=2.$

Finalement, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{Arctg} 2\left(x^2+y^2\right)+x^2\sin y}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=2.$

$\boxed{4}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\operatorname{th} y^2\right| \le \frac{y^4}{x^2+y^4}|x| \le |x| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\operatorname{th} y^2=0.$$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\operatorname{sh} t}=1 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln\sqrt[4]{1+x^2+y^2}}{\operatorname{sh}\left(x^2+y^2\right)}=\frac{1}{4}.$

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{\sin t}=1\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\ln\sqrt{1+\sqrt{x^2+(y-1)^4}}}{\sin\sqrt{x^2+(y-1)^4}}=\dfrac{1}{2}.$

$\boxed{7}$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}:$

$$0<\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}<6\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}=0.$$

$\boxed{8}$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}:0<\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}<\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

$\boxed{9}$ Rappel : $\lim_{t\to 0+}t\ln t=0.$

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}:0<\left|xy\ln\left(x^2+y^2\right)\right|\le\frac{1}{2}\left|\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right|$$
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln\left(x^2+y^2\right)=0$$

$\boxed{10}$ 1) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{\sin t}=1\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=1.$

2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln\left(1+x^4+y^4\right)}{x^4+y^4}=1.$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$ car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}:$

$$0<\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\le\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2+y^2}\le x^2+y^2.$$

4) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}:$

$$\frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=\frac{\ln\left(1+x^4+y^4\right)}{x^4+y^4}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\frac{x^2+y^2}{\sin\left(x^2+y^2\right)}-\frac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}.$$

Finalement, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}=-1.$

$\boxed{11}$ 1) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1.$

2) $\lim\limits_{t\to 0+}t\ln t=0\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)=0.$ Par conséquent

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^4\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=0$$

car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}:\left|\frac{y^4\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right|.$

Finalement, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)+y^4\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=1.$

$\boxed{12}$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^6+y^6=\left(x^2+y^2\right)\left(\left(x^2-y^2\right)^2+x^2y^2\right)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^4-y^4\right)+\sin 2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^6+y^6\right)} \ln\left(1+\left(x^2-y^2\right)^2+x^2y^2\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left(x^2-y^2\right)+\frac{\sin 2\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\right)\frac{\ln\left(1+\left(x^2-y^2\right)^2+x^2y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2+x^2y^2}=2.$$

Exercice 2.5.

Étudié la continuité des fonctions suivantes :

❶ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$

❷ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{\operatorname{Arctg} y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$

❸ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{th} xy}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$

❹ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{x^2y^2}} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0.\end{cases}$

❺ **Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par**

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x^2}e^{-\frac{y}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

❻ **Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par**

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pour les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par.

❼ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{xy} & \text{si } xy\neq 0\\ 1 & \text{si } xy=0.\end{cases}$

❽ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y} & \text{si } xy\neq 0\\ 1 & \text{si } xy=0.\end{cases}$

Solution

❶ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq 1-\cos\sqrt{|xy|}=2\sin^2\frac{\sqrt{|xy|}}{2}\leq\frac{|xy|}{2}$

$$\Rightarrow \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |f(x,y)|\leq\frac{|x|}{2}\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

❷ $\frac{t}{\operatorname{Arctg} t}=1\Rightarrow \exists 0<\delta\leq 1$ tel que $\forall 0<|t|\leq\delta : \left|\frac{t}{\operatorname{Arctg} t}\right|\leq 2$

$$\Rightarrow \forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \text{ avec } \sqrt{x^2+y^2}<\delta : \left|\frac{\sin xy}{\operatorname{Arctg} y}\right|\leq\left|\frac{y}{\operatorname{Arctg} y}\right||x|\leq 2|x|$$

$$\Rightarrow \forall(x,y)\in B((0,0),\delta) : |f(x,y)|\leq 2|x|\Rightarrow \lim_{(x,u)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

❸ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* : \left|\frac{\operatorname{th} y}{y}\right|\leq|x|$

$$\Rightarrow \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |f(x,y)|\leq|x|\Rightarrow \lim_{(x,u)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

❹ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^* : \left|\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{x^2y^2}}\right|\leq x^2|y|$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y)| \leq x^2|y| \Rightarrow \lim\limits_{(x,u)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

❺ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] : \left|\frac{y}{x^2}e^{-\frac{y}{x^2}}\right| \leq \frac{3}{2x^2}e^{-\frac{1}{2x^2}} < 12x^2$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] : |f(x,y)| \leq 12x^2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,u)\to(0,1)} f(x,y) = 0.$

❻ $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* : \left|\frac{y}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}\right| \leq 2|y| \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y)| \leq 2|y| \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

❼ Soit $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow \exists 0 < \delta < 1$ tel que $\forall 0 < |t| < \delta$:

$$\left|\frac{\sin t}{t} - 1\right| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$: $\left|\frac{\sin xy}{xy} - 1\right| < \varepsilon$; ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in B((0,0),\delta) : |f(x,y) - 1| < \varepsilon.$:
D'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1.$

❽ Soit $\varepsilon > 0$. $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{sh} t} = 1$. Alors, il existe $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $0 < |t| < \delta^t$:

$$\left|\frac{\sin t}{t} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \left|\frac{t}{\operatorname{sh} t} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin xy}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} - 1\right| &= \left|\left(\frac{\sin xy}{xy} - 1\right)\frac{x}{\operatorname{sh} x}\frac{y}{\operatorname{sh} y} + \left(\frac{x}{\operatorname{sh} x} - 1\right)\frac{y}{\operatorname{sh} y} + \left(\frac{y}{\operatorname{sh} y} - 1\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{\sin xy}{xy} - 1\right| + \left|\frac{x}{\operatorname{sh} x} - 1\right| + \left|\frac{y}{\operatorname{sh} y} - 1\right| < \varepsilon\end{aligned}$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in B((0,0),\delta) : |f(x,y) - 1| < \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1.$

Exercice 2.6. Étudié la continuité des fonctions suivantes :

❶ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^4-y^4)}{\operatorname{sh} xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0.\end{cases}$

❷ $f(x,y) = \begin{cases} y + \frac{1}{y}\operatorname{Arctg}(x^2y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0.\end{cases}$

❸ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}\operatorname{th}(xy^2) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0\end{cases}$

❹ $f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2xy}{x^2\sin^2 t + y^2\cos^2 t}dt & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0).\end{cases}$

❺ $f(x,y) = \begin{cases} xy\ln\left|\frac{x}{y}\right| & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0.\end{cases}$

❻ $f(x,y) = \begin{cases} xe^{\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0.\end{cases}$

❼ Soit $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{2y^4}{x^2+y^4}$$

1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,\alpha t) = 0$.

2) Peut-on en déduire que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe ?

Etudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par.

❽ Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\} \cup \{(0,0)\}$. Montrer qu'il n'existe aucun nombre réel α pour lequel la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x-y}} & \text{si } x > y \\ \alpha & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$.

❾ Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ cinq constantes positives et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{\left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^\gamma} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f continue en $(0,0) \iff \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

❿ Comment faut-il choisir la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y\left[\frac{x}{y}\right] & \text{si } y \neq 0 \\ g(x) & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

soit continue aux points $(a,0)$?

Solution

❶ N'existe pas car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{t\to 0} f\left(t,t^3\right)$.

❷ 1) La fonction est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

2) La fonction f est discontinue aux points de la forme $(a,0)$ avec $a \neq 0$ car $\lim\limits_{t\to 0} f(a,t) = a^2 \neq 0 = f(a,0)$.

3) La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$:

$$\left| y + \frac{1}{y}\operatorname{Arctg}\left(x^2 y\right)\right| \leq |y| + x^2,$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y) - f(0,0)| \leq |y| + x^2$.

❸ 1) La fonction est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

2) La fonction f est discontinue aux points de la forme $(a,0)$ avec $a \neq 0$ car $\lim\limits_{t\to 0} f(a,t) = a \neq 0 = f(a,0)$.

3) La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$:

$$\left|\frac{1}{y^2}\operatorname{th}\left(xy^2\right)\right| \leq |x|,$$

ce qui entraine que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y) - f(0,0)| \leq |x|$.

❹ Rappel : $\forall s \in \mathbb{R}^* : \operatorname{Arctg}|s| + \operatorname{Arctg}\frac{1}{|s|} = \frac{\pi}{2}$.

1) Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{2y}{x}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t\left(\operatorname{tg}^2 t + \frac{y^2}{x^2}\right)} = 2\operatorname{Arctg}\frac{x\operatorname{tg} t}{y}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\left(\operatorname{Arctg}\frac{x\sqrt{3}}{y} - \operatorname{Arctg}\frac{x}{y\sqrt{3}}\right) = 2\left(\operatorname{Arctg}\frac{y\sqrt{3}}{x} - \operatorname{Arctg}\frac{y}{x\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$

la fonction f est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
2) La fonction f est discontinue en $(0,0)$ car $\lim\limits_{s\to 0} f(s,s) = \dfrac{\pi}{3} \neq 0 = f(0,0)$.
3) Soit $a \neq 0$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$|f(x,y) - f(a,0)| \leq 2\left|\frac{y}{x}\right|\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

la fonction f est continue en tout point $(a,0)$.
4) Soit $b \neq 0$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$|f(x,y) - f(0,b)| \leq 2\left|\frac{x}{y}\right|\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

la fonction f est continue en tout point $(0,b)$.
❺ Rappel : $\lim\limits_{t\to 0} t\ln|t| = 0 \Rightarrow \exists 0 < \delta < 1$ tel que $\forall 0 < |t| < \delta : |t\ln|t|| < 1$.
1) La fonction f est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
2) La fonction f est continue en $(0,0)$. En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$:

$$\left|xy\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right| = |xy\ln|x| - xy\ln|y|| < |x| + |y|;$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in B((0,0),\delta)$:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq |x| + |y|.$$

3) Soit $a \neq 0$. Montrons à présent la continuité de la fonction f en $(a,0)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe deux nombres réels $\mu, M > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ avec $\sqrt{(x-a)^2+y^2} < \mu$:

$$0 < |x| < |a|+1, \quad |x\ln|x|| < M, \quad |y| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad |y\ln|y|| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)},$$

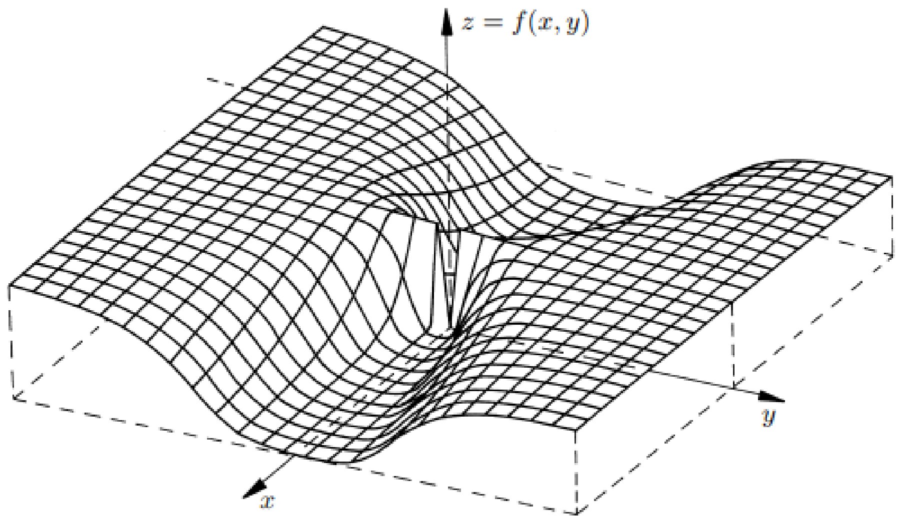
ou encore

$$\left|xy\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right| \leq |y||x\ln|x|| + |x||y\ln|y|| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne que pour tout $(x,y) \in B((a,0),\mu) : |f(x,y) - f(a,0)| < \varepsilon$.
4) Par une démonstration similaire à celle ci-dessus, on prouve que la fonction f est continue en $(0,b)$ avec $b \neq 0$.
❻ 1) La fonction f est continue en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2) Soit $b \in \mathbb{R}$. Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x,y) - f(0,b)| \leq |x|e^{\frac{\pi}{2}},$$

la fonction f est continue en $(0,b)$.
❼ 1) $\lim\limits_{t\to 0} f(t,\alpha t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2\alpha^4 t^2}{1+\alpha^4 t^2} = 0$.
2) N'existe pas car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{t\to 0} f\left(t^2, t\right)$.



❽ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'un tel α existe. Alors, il existe deux nombres réels $\delta, M > 0$ de sorte que pour tout $(x, y) \in B((0,0), 2\delta) \cap E$: $|f(x, y)| \leq M$, ce qui est impossible car

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} f(\delta\cos\theta, \delta\sin\theta) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{e^{-\frac{1}{\delta^2}}}{\sqrt{\sqrt{2}\delta\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}} = +\infty.$$

D'où contradiction.

❾ Pour commencer, supposons que la fonction f est continue en $(0, 0)$.
Alors, puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, on doit avoir

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt[\beta_1]{n}}, \frac{1}{\sqrt[\beta_2]{n}}\right) = \frac{1}{2^\gamma} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma} = 0,$$

ce qui entraîne que $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \gamma > 0$.
Pour montrer la réciproque, il suffit de constater que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| &= \frac{\left(|x|^{\beta_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \left(|y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\left(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\right)^\gamma} \\ \leq \frac{\left(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \left(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\left(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\right)^\gamma} &= \left(|x|^{\beta_1} + |y|^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma}. \end{aligned}$$

❿ Montrons que la fonction $g(x) = x$ répond à la question. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\left| y\left[\frac{x}{y}\right] - a \right| \leq |x - a| + |y|,$$

ce qui entraine que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $|f(x, y) - a| \leq |x - a| + |y|$.

<u>Exercice</u> 2.7.

❶ Comment faut-il choisir la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}\ln\left(1+\frac{e^y-1}{x^2+1}\right) & \text{si } y\neq 0\\ g(x) & \text{si } y=0.\end{cases}$$

soit continue aux points $(a,0)$?

❷ Comment faut-il choisir la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xe^x-ye^y}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ g(x) & \text{si } x=y.\end{cases}$$

soit continue aux points (a,a) ?

❸ Comment faut-il choisir la fonction $g:]0,1[\to\mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f:]0,1[\times]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}y\operatorname{cotg}(y\sqrt{x}) & \text{si } x\in]0,1[\\ & \text{et } y\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[\\ g(x) & \text{si } x\in]0,1[\text{ et } y=0,\end{cases}$$

soit continue aux points $(a,0)$ avec $0<a<1$?

❹ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=0.$$

2) Peut-on en déduire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0?$$

❺ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)=0.$$

2) Peut-on en déduire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0?$$

❻ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$$

Montrer que $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)$ et $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)$, n'existent pas, mais que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

❼ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=xv(y)+yv(x)$ où $v(t)=1$ si t est rationnel et 0 si t est irrationnel. Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0,$$

et que $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}f(x,y)\right)$ et $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}f(x,y)\right)$, n'existent pas.

❽ Montrer que

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1 2xye^{-x^2y}dx\neq\int_0^1\left(\lim_{y\to+\infty}2xye^{-x^2y}\right)dx.$$

Solution

❶ Montrons que la fonction $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ répond à la question. En effet, soient $a\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$. D'une part, il découle de la formule de Maclaurin appliquée à la fonction $\ln(1+t)$, qu'à chaque élément $(x,y)\in B((a,0),\delta)$ avec $y\neq 0$, on peut associer $\theta_{x,y}\in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{y}\ln\left(1+\frac{e^y-1}{x^2+1}\right)-\frac{1}{a^2+1}\\ &=\frac{e^y-1-y}{y}\frac{1}{x^2+1}-\frac{(e^y-1)^2}{2y}\frac{1}{(1+x^2+\theta_{x,y}(e^y-1))^2}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{a^2+1}.\end{aligned}$$

D'autre part, il existe deux nombres réels $\delta, M > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in B((a,0),\delta)$ avec $y \neq 0$,

$$\left|\frac{e^y - 1 - y}{y}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad \left|\frac{(e^y-1)^2}{2y}\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1 + x^2 + \theta_{x,y}(e^y - 1))^2} < M,$$

et tout $|x - a| < \delta$:

$$\left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{a^2+1}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2+1} < M.$$

Ainsi, en constatant que pour tout $(x,y) \in B((a,0),\delta)$ avec $y \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{y}\ln\left(1 + \frac{e^y-1}{x^2+1}\right) - \frac{1}{a^2+1}\right| \leq \varepsilon,$$

on obtient pour tout $(x,y) \in B((a,0),\delta)$: $|f(x,y) - f(a,0)| < \varepsilon$.

❷ Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = xe^x$. En constatant que $\lim\limits_{x\to a} f(x,a) = h'(a)$, l'unique choix pour g est

$$g(x) = h'(x) = (1+x)e^x.$$

Reste à démontrer que g est bien la fonction cherchée. En effet, d'après le théorème des accroissements finis, à chaque élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut associer $\theta_{x,y} \in]0,1[$ tel que $h(x) - h(y) = h'(y + \theta_{x,y}(x-y))(x-y)$; ce qui nous permet d'écrire que

$$f(x,y) - f(a,a) = \begin{cases} h'(y + \theta_{x,y}(x-y)) - h'(a) & \text{si } x \neq y \\ h'(x) - h'(a) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Par conséquent $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = f(a,a)$.

❸ Montrons que la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ répond à la question. En effet, soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $0 < \delta < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{1-a}{2}\right\}$ tel que pour tout $0 < |t| < \delta$ et $|x-a| < \delta$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{t}{\operatorname{tg} t} - 1\right| < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{2\sqrt{2}},$$

ce qui entraine que pour tout $(x,y) \in B((a,0),\delta)$ avec $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}\left|y\operatorname{cotg}(y\sqrt{x}) - \frac{1}{\sqrt{a}}\right| &= \left|\left(\frac{y\sqrt{x}}{\operatorname{tg}(y\sqrt{x})} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{y\sqrt{x}}{\operatorname{tg}(y\sqrt{x})} - 1\right|\frac{1}{\sqrt{x}} + \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $(x,y) \in B((a,0),\delta)$: $|f(x,y) - f(a,0)| < \varepsilon$.

❹ 1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$ et tout $y \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, on a

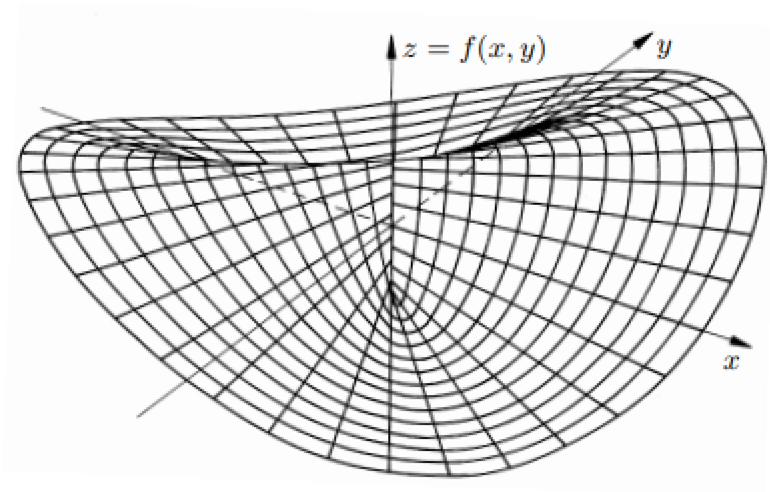
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0.$$

2) Non car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = 1$.

❺ 1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ et tout $y \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, on a

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

2) Non car $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2}$.



❻ Pour tout $0 < |x| \neq \frac{2}{(2k+1)\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ n'existe pas car

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{1}{2n\pi}\right) = x\cos\frac{1}{x} \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{2}{(2n+1)\pi}\right),$$

ce qui implique $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$ n'existe pas.
De même $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ n'existe pas.
Par contre, $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $|f(x,y)| \leq (x+y)^2$.

❼ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ n'existe pas car

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{1}{n}\right) = x \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} f\left(x, \frac{\sqrt{2}}{n}\right),$$

ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ n'existe pas.
De même $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ n'existe pas.
Par contre, $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$ car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$.
❽ En effet, puisque pour tout $y > 0$:

$$\int_0^1 2xye^{-x^2y}dx = -\left. e^{-x^2y}\right|_0^1 = 1 - e^{-y},$$

et tout $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{y\to+\infty} 2xye^{-x^2y} = 0$, on a

$$\lim_{y\to+\infty} \int_0^1 2xye^{-x^2y}dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{y\to+\infty} 2xye^{-x^2y}\right)dx.$$

Dérivées partielles

Exercice 2.8.

❶ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = 0$ mais que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

❷ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = 0$ mais que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

❸ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = 0$ mais que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

❹ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

❺ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Montrer que les deux fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$ mais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ n'existent pas.

❻ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(|x| + |y|) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1.

❼ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{x-1} \sin xy.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

❽ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy + \ln \sqrt[3]{1 + x^2 + 2y^4}$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$.

❾ Soit $f : B((0,0),2) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$.

❿ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y) + \sin(x + y) + e^{x^3 y}.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solution

❶ $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0.$$

La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ car $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

❷ $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$$
La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$ car $\lim_{t\to 0} f\left(t^2,t\right)=1\neq 0=f(0,0)$.

❸ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$

et

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\begin{cases}\frac{xy^2\left(2y^2-x^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}} & \text{si}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0),\end{cases}$

on a $\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(t,t)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\neq 0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$,

ce qui entraîne que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

❹ $\forall t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=\lim_{s\to 0}\frac{f(s,t)-f(0,t)}{s}=t \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(t,0)=\lim_{s\to 0}\frac{f(t,s)-f(t,0)}{s}=0.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq 0=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

❺ Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}2y\sin\frac{1}{y}-\cos\frac{1}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0,\end{cases}$$

on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$,

ce qui entraîne que ces deux fonctions sont continues, en particulier en $(0,0)$.

Par contre, puisque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(2\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right),$$

et que cette dernière limite n'existe pas, on a bien que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ n'existe pas.

De même pour $d\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$.

❻ Rappel $\forall t\in\mathbb{R}^*$: $(|t|)'=\frac{t}{|t|}$.

Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}y\ln(|x|+|y|)+\frac{|x|y}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0),\end{cases}$$

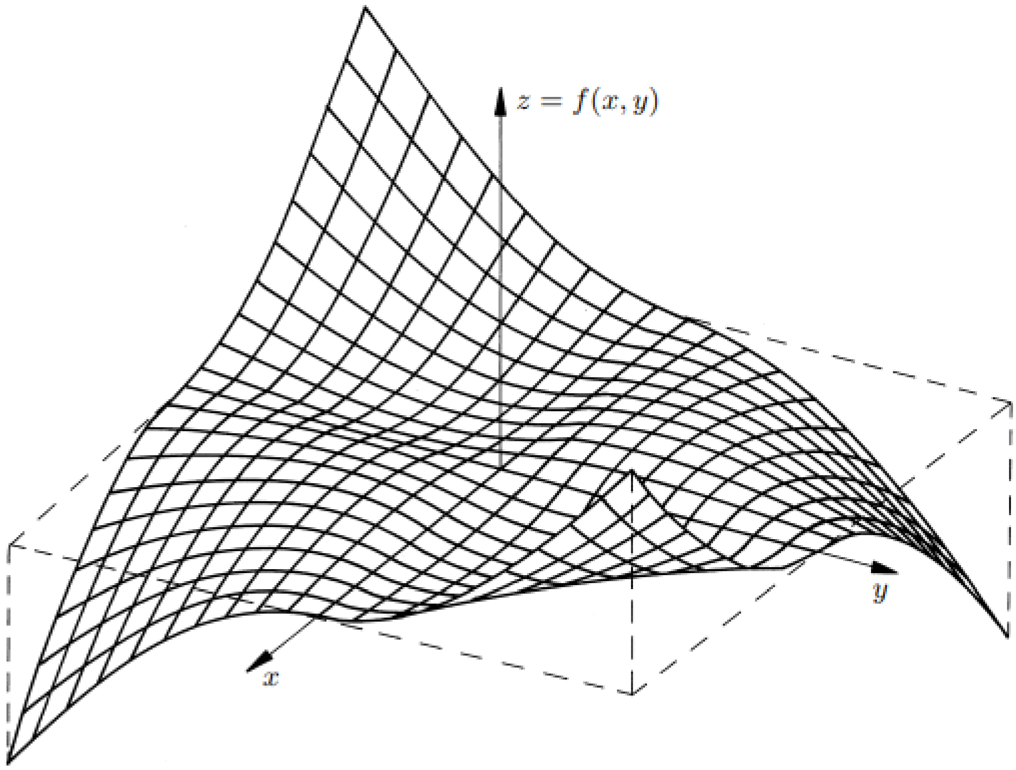
et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}x\ln(|x|+|y|)+\frac{x|y|}{|x|+|y|} & \text{si}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0),\end{cases}$$

les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Comme de plus, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |(|x|+|y|)\ln(|x|+|y|)| + |y|,$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |(|x|+|y|)\ln(|x|+|y|)| + |x|,$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|)\ln(|x|+|y|) = 0$ car $\lim\limits_{t\to 0+} t\ln t = 0$, elles sont aussi continues en $(0,0)$.



❼ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-1}(\sin xy + y\cos xy) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x-1}\cos xy$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - (z-1) = x - z = 0.$$

❽ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \frac{2x}{3(1+x^2+2y^4)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{8y^3}{3(1+x^2+2y^4)},$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y - \left(z - \frac{\ln 2}{3}\right) = \frac{x}{3} + y - z - \frac{\ln\frac{e}{2}}{3} = 0.$$

❾ Puisque pour tout $(x, y) \in B((0,0), 2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(1, 0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)y - (z - \sqrt{3}) = -\frac{x}{\sqrt{3}} - z + \frac{4}{\sqrt{3}} = 0.$$

❿ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \sin\left(x^2 + y\right) + \cos(x + y) + 3x^2 y e^{x^3 y}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin\left(x^2 + y\right) + \cos(x + y) + x^3 e^{x^3 y},$$

l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) x + \frac{\partial f}{\partial y}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - (z - 2) = -y - z + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Exercice 2.9.

❶ Trouver une fonction homogène $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de degré 2 qui n'est pas continue.

❷ Soit $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α telle que $f(1, 0) = 0$. Montrer que pour tout $a > 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0) = 0$.

❸ Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \int_1^{1+x^3} (\operatorname{ch}(xyt^3) + \sin(3xyt^2))dt.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(2, 0)$.

❹ Montrer que $(0, 0)$ est un point stationnaire de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \int_{-x^2}^{y^2} \operatorname{ch}\left(yt^2 + x\right) dt.$$

Etudier sa nature.

❺ Montrer que $(0, 0)$ est un point stationnaire de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dé finie par

$$f(x, y) = 10x^2 \cos y + \int_{x^2}^{y^2} \ln \sqrt{2 + x^4 + \cos(ty)}dt.$$

Etudier sa nature.

❻ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(x^2 \sin^2 t + y^2 \cos^2 t\right) dt.$$

1) Montrer que pour tout $x, y > 0$:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\pi}{x+y}, \frac{\pi}{x+y}\right).$$

2) En déduire que pour tout $x, y > 0$:

$$f(x, y) = \pi \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

❼ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy^3 + \ln \sqrt{1 + x^4 + 2y^2}$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(1, 1)$ avec $\mathrm{v} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

❽ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = -x^2 + 2xy + e^{x+y} \cos x^2$. Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(0, 0)$.

❾ La hauteur d'une montagne en chacun de ses points P est donnée par la fonction

$$h(x,y)=3000-2x^2-y^2,$$

où (x,y) sont les coordonnées de la projection du point P sur le plan de base muni d'un repère orthonormé dont l'axe Ox désigne la direction est et l'axe Oy la direction nord.

1) Dire si l'on commence par monter ou par descendre lorsque l'on se déplace depuis le point $Q=(30,-2)$ dans la direction sud-ouest.

2) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle la plus raide ?

3) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle nulle ?

❿ La profondeur d'un cratère d'un volcan en chacun de ses points P est donnée par la fonction

$$p(x,y)=-500+x^4y^2+\ln\left(1+4x^2+5y^2\right),$$

où (x,y) sont les coordonnées de la projection du point P sur le plan de base muni d'un repère orthonormé dont l'axe Ox désigne la direction est et l'axe Oy la direction nord.

1) Dire si l'on commence par monter ou par descendre lorsque l'on se déplace depuis le point $Q=(1,2)$ dans la direction nord-ouest.

2) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle la plus raide ?

3) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle nulle ?

Solution

❶ La fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\geq y\\ 0 & \text{si } x<y,\end{cases}$
est homogène de degré 2 mais elle n'est pas continue aux points de la forme $(a,a)\neq(0,0)$ car $\lim\limits_{t\to a-} f(a,t)=a^2\neq 0=\lim\limits_{t\to a+} f(a,t)$.

❷ Soit $a>0$. Puisque pour tout $t>0$: $f(t,0)=t^\alpha f(1,0)=0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)=\lim_{t\to a}\frac{f(t,0)-f(a,0)}{t}=0.$$

❸ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=&3x^2\left(\operatorname{ch}\left(xy\left(1+x^3\right)^3\right)+\sin\left(3xy\left(1+x^3\right)^2\right)\right)\\&+\int_1^{1+x^3}\left(yt^3\operatorname{sh}\left(xyt^3\right)+3yt^2\cos\left(3xyt^2\right)\right)dt,\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=&\int_1^{1+x^3}\left(xt^3\operatorname{sh}\left(xyt^3\right)+3xt^2\cos\left(3xyt^2\right)\right)dt,\end{aligned}$$

l'équation du plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ au point $(2,0)$ est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)y-(z-8)=12x+1456y-z-16=0.$$

❹ En effet, $\nabla f(0,0)=\mathbf{0}$ car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=2x\operatorname{ch}\left(yx^4+x\right)+\int_{-x^2}^{y^2}\operatorname{sh}\left(yt^2+x\right)dt,\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=2y\operatorname{ch}\left(y^5+x\right)+\int_{-x^2}^{y^2}t^2\operatorname{sh}\left(yt^2+x\right)dt.\end{aligned}$$

Etudions la nature de ce point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2\operatorname{ch}\left(yx^4+x\right)+4x\left(2yx^3+1\right)\operatorname{sh}\left(yx^4+x\right)+\int_{-x^2}^{y^2}\operatorname{ch}\left(yt^2+x\right)dt,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2x^5\operatorname{sh}\left(yx^4+x\right)+2y\operatorname{sh}\left(y^5+x\right)+\int_{-x^2}^{y^2}t^2\operatorname{ch}\left(yt^2+x\right)dt,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2\operatorname{ch}\left(y^5+x\right)+12y^5\operatorname{sh}\left(y^5+x\right)+\int_{-x^2}^{y^2}t^4\operatorname{ch}\left(yt^2+x\right)dt,$$

on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-4 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2>0,$$

ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en $(0,0)$.
❺ En effet, $\nabla f(0,0)=\mathbf{0}$ car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=20x\cos y-x\ln\left(2+x^4+\cos\left(x^2y\right)\right)+2\int_{x^2}^{y^2}\frac{x^3}{2+x^4+\cos(ty)}dx,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-10x^2\sin y+y\ln\left(2+x^4+\cos y^3\right)-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{y^2}\frac{t\sin(ty)}{2+x^4+\cos(ty)}dx.$$

Etudions la nature de ce point stationnaire. Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=&20\cos y-\ln\left(2+x^4+\cos\left(x^2y\right)\right)-\frac{8x^4-2x^2y\sin\left(x^2y\right)}{2+x^4+\cos\left(x^2y\right)}\\&+2\int_{x^2}^{y^2}\frac{-x^6+6x^2+3x^2\cos(ty)}{\left(2+x^4+\cos(ty)\right)^2}dx,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=&-20x\sin y+\frac{x^3\sin\left(x^2y\right)}{2+x^4+\cos\left(x^2y\right)}+\frac{4x^3y}{2+x^4+\cos y^3}\\&+2\int_{x^2}^{y^2}\frac{x^3t\sin(ty)}{\left(2+x^4+\cos(ty)\right)^2}dx,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=&-10x^2\cos y+\ln\left(2+x^4+\cos y^3\right)-\frac{4y^3\sin y^3}{2+x^4+\cos y^3}\\&-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{y^2}\frac{t^2\left(1+\left(2+x^4\right)\cos(ty)\right)}{\left(2+x^4+\cos(ty)\right)^2}dx,\end{aligned}$$

on a

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=-(20-\ln 3)\ln 3<0,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=20-\ln 3>0,$$

ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en $(0,0)$.
❻ 1) $\forall x,y>0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin^2 t}{x^2\sin^2 t+y^2\cos^2 t}dt\text{` et }\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2y\cos^2 t}{x^2\sin^2 t+y^2\cos^2 t}dt,$$

ce qui entraîne que

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2dt=\pi \\ y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{x^2\sin^2 t+y^2\cos^2 t} \\ =2xy\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{ds}{x^2s^2+y^2}=\pi, \end{cases}$$

avec $s=\operatorname{tg} t$. Ainsi, en résolvant ce système par rapport aux dérivées partielles, on obtient que pour $x\neq y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\pi}{x+y}.$$

Pour $x=y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)=\frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\frac{\pi}{2x}\text{ et }\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)=\frac{2}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2x}.$$

2) Puisque pour tout $x,y>0$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\pi}{x+y}$,
il existe une fonction $h:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^1$ telle que pour tout $x,y>0$:

$$f(x,y)=\pi\ln(x+y)+h(y).$$

Ainsi, puisque pour tout $y>0$: $h(y)=f(1,y)-\pi\ln(1+y)$, on a

$$h'(y)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,y)-\frac{\pi}{1+y}=0.$$

Par conséquent h est une fonction constante. Comme de plus

$$h(1)=f(1,1)-\pi\ln 2=-\pi\ln 2,$$

on obtient finalement que pour tout $x,y>0$:

$$f(x,y)=\pi\ln(x+y)+h(y)=\pi\ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

❼ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,y)=\left(y^3+\frac{2x^3}{1+x^4+2y^2},3xy^2+\frac{2y}{1+x^4+2y^2}\right),$$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(1,1)=\langle\nabla f(1,1),\mathrm{v}\rangle=\dfrac{33}{10}$.
❽ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2x+2y+e^{x+y}\left(\cos x^2-2x\sin x^2\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x+e^{x+y}\cos x^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-2+e^{x+y}\left(\cos x^2-4x\sin x^2-2\sin x^2-4x^2\cos x^2\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2+e^{x+y}\left(\cos x^2-2x\sin x^2\right)\text{ et }\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=e^{x+y}\cos x^2,$$

on a $P_2(0,0) = 1 + x + y - \dfrac{x^2}{2} + 3xy + \dfrac{y^2}{2}$.

❾ 1) Direction sud-ouest : $\mathbf{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\nabla h(x, y) = (-4x, -2y)$. D'où

$$h'_{\mathbf{v}}(0) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}(30, -2) = \langle \nabla h(30, -20), \mathbf{v} \rangle = \frac{80}{\sqrt{2}} > 0.$$

La pente étant positive, on monte.

2) La pente la plus raide au point Q est donnée par les directions

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\nabla h(30, -20)}{\|\nabla h(30, -20)\|} = \pm \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, la pente est la plus raide pour monter.
- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$, la pente est la plus raide pour descendre.
- Au point Q, la pente est nulle pour les deux directions opposées

$$\mathbf{v} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

❿ 1) Direction nord-ouest : $\mathbf{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla p(x, y) = \left(4x^3y^2 + \frac{8x}{1 + 4x^2 + 5y^2}, 2x^4y + \frac{10y}{1 + 4x^2 + 5y^2}\right).$$

D'où

$$p'_{\mathbf{v}}(0) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) = \langle \nabla p(1, 2), \mathbf{v} \rangle = \frac{-288}{25\sqrt{2}} < 0.$$

La pente étant négative, on descend.

2) La pente la plus raide au point Q est donnée par les directions

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\nabla p(1, 2)}{\|\nabla h(1, 2)\|} = \pm \left(\frac{51}{\sqrt{2826}}, \frac{15}{\sqrt{2826}}\right).$$

- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{51}{\sqrt{2826}}, \frac{15}{\sqrt{2826}}\right)$, la pente est la plus raide pour monter.
- Dans la direction $\mathbf{v} = \left(\frac{-51}{\sqrt{2826}}, \frac{-15}{\sqrt{2826}}\right)$, la pente est la plus raide pour descendre.
- Au point Q, la pente est nulle pour les deux directions opposées

$$\mathbf{v} = \pm \left(\frac{-15}{\sqrt{2826}}, \frac{51}{\sqrt{2826}}\right).$$

<u>Exercice</u> 2.10.

❶ **Soient $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:**

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x,x) = (g(x,y), h(x,y)).$$

2) L'existence des fonctions f est-elle liée à la condition imposée à g et h ?

❷ **Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui satisfont pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2 - y^3 + 2x \operatorname{Arctg} x,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 3xy^2 + \frac{2y}{1+y^2}.$$

❸ **Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. En effectuant le changement de variables $u = bx + ay$ et $v = bx - ay$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles**

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

❹ **Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = af(x,y)$.**

❺ **Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
Vérifier que les solutions sont homogènes de degré 0.**

❻ **En effectuant le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.**

❼ **Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h(x)$
soit solution de l'équation aux dérivées partielles
$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.**

❽ **Trouver toutes les fonctions $g, h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(xy) + h\left(\frac{y}{x}\right)$
soit solution de l'équation aux dérivées partielles
$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln \frac{x^2}{y^2}$.**

❾ **Soit $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u + v > 0\}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout $(x,y) \in E$:**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) = \ln(1+x+y)^4.$$

❿ **Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = x^2 g(y),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xy^2 \ln y.$$

Solution

❶ 1) Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction. Alors, il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \int_0^x g(t,y)dt + \gamma(y).$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}h(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\int_0^x \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)dt+\gamma'(y)=\int_0^x \frac{\partial h}{\partial x}(t,y)dt+\gamma'(y)\\&=h(x,y)-h(0,y)+\gamma'(y).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $y\in\mathbb{R}$: $\gamma'(y)=\int_0^y h(0,t)dt+$ cste. Par conséquent toutes les fonctions f cherchées sont de la forme

$$f(x,y)=\int_0^x g(t,y)dt+\int_0^y h(0,t)dt+\text{ cste.}$$

2) Oui, d'après le théorème de Schwarz.

❷ En posant pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$g(x,y)=3y^2-y^3+2x\operatorname{Arctg}x \text{ et } h(x,y)=6xy-3xy^2+\frac{2y}{1+y^2}$$

et en constatant que $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=6y-3y^2$, on peut écrire, grâce à l'exercice précédent, que

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\int_0^x g(t,y)dt+\int_0^y h(0,t)dt+\text{ cste}\\&=3xy^2-xy^3-x+\left(x^2+1\right)\operatorname{Arctg}x+\ln\left(1+y^2\right)+\text{ cste.}\end{aligned}$$

❸ Supposons que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v)=f\left(x=\frac{u+v}{2b},y=\frac{u-v}{2a}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\frac{1}{2ab}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2b},\frac{u-v}{2a}\right)+b\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2b},\frac{u-v}{2a}\right)\right)=0,$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à u, que $F(u,v)=g(v)$ où $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. Par conséquent toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y)=g(bx-ay) \text{ avec } g\in\mathbf{C}^1.$$

❹ Supposons que $f:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F:]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(r,\theta)=f(x=r\cos\theta,y=r\sin\theta).$$

Alors, pour tout $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta)&=-(r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\\&=aF(r,\theta),\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à θ, que $F(r,\theta) = g(r)e^{a\theta}$ où g :$]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$.
Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{a \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}} \qquad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1.$$

❺ Supposons que $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire F :$]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par

$$F(r,\theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta).$$

Alors, pour tout $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$:

$$r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + (r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = 0,$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à r, que $F(r,\theta) = g(\theta)$ où g :$]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$.
Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g\left(\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\right) \qquad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1,$$

ou plus simplement

$$f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{avec } h \in \mathbf{C}^1.$$

D'après le théorème d'Euler, f est homogène de degré 0 . Remarque : Comme la relation d'Euler est une condition nécessaire et suffisante, il découle de cet exercice que toutes les fonctions homogènes f de degré 0 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $h \in \mathbf{C}^1$.
❻ Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f\left(x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{-u+v}{2}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{-u+v}{2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{-u+v}{2}\right)\right) = 0,$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à u, que $F(u,v) = g(v)$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$. Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g(x+y) \quad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1.$$

❼ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \Longleftrightarrow h'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}}.$$

Ainsi, puisque pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \int^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t^4}} = \frac{1}{4}\int^x \frac{4t^3}{t^4\sqrt{1+t^4}}dt = \frac{1}{4}\int^{x^4} \frac{ds}{s\sqrt{1+s}} \\ &= \frac{1}{2}\int^{\sqrt{1+x^4}} \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Bigg|^{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}+1} + \text{ cste}, \end{aligned}$$

on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}+1} + \text{ cste} \qquad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1.$$

❽ Pour tout $x, y > 0$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\frac{y}{x}h'\left(\frac{y}{x}\right) = -2\ln\frac{y}{x} \Longleftrightarrow h'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}.$$

Ainsi, puisque pour tout $t > 0$:

$$h(t) = \int^t \frac{\ln s}{s}ds = \frac{1}{2}\ln^2 s\Big|^t = \frac{1}{2}\ln^2 t + \text{ cste},$$

on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g(xy) + \frac{1}{2}\ln^2\frac{y}{x} + \text{ cste} \qquad \text{avec } g \in \mathbf{C}^1.$$

❾ Puisque pour tout $(x,y) \in E$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) &= 2\frac{(x+y)f'(x+y) - f(x+y)}{(x+y)^2} \\ &= 4\ln(1+x+y), \end{aligned}$$

on obtient que pour tout $t > 0$:

$$f'(t) - \frac{1}{t}f(t) = 2t\ln(1+t) \text{ ou encore } f(t) = ct - t^2 + t(t+1)\ln(1+t),$$

où c est une constante.

❿ Pour tout $x, y > 0$:

$$\begin{aligned} & x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xg(y) + 2xyg'(y) = 2xy^2\ln y \\ & \Longleftrightarrow g'(y) + \frac{1}{y}g(y) = y\ln y. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $y > 0$: $g(y) = \frac{c}{y} - \frac{y^2}{9}(1 - 3\ln y)$, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = x^2 g(y) = c\frac{x^2}{y} - \frac{x^2y^2}{9}(1 - 3\ln y),$$

où c est une constante.

<u>Exercice</u> 2.11.

❶ **Trouver toutes les fonctions** $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **de classe** C^2 **de sorte que la fonction** $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h(x),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2}.$$

❷ **Trouver toutes les fonctions** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **de classe** C^2 **qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - 4x^3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

❸ **Trouver toutes les fonctions** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **de classe** C^2 **de sorte que la fonction** $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y) = y^3 g(x),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &+ y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\\ &+ y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = y^3 \sin 5x.\end{aligned}$$

❹ **Trouver toutes les fonctions** $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ **de classe** C^2 **de sorte que la fonction** $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y) = \frac{1}{x}g(xy)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &- x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\\ &= -xf(x,y) + x^2y^2.\end{aligned}$$

❺ **Soit** $\lambda > 0$. **En effectuant le changement de variables** $u = \lambda x + y$ **et** $v = -\lambda x + y$, **trouver toutes les fonctions** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **de classe** C^2 **qui vérifient l'équation d'onde**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

❻ **Soient** a, b **et** c **trois constantes vérifiant** $a \neq 0$ **et** $b^2 - ac > 0$. **En posant**

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et en effectuant le changement de variables $u = \alpha x + y$ et $v = \beta x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

❼ En effectuant le changement de variables $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

❽ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, homogène de degré α.
1) Montrer que pour tout $(x, y) \in E$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha-1)f(x,y).$$

2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, homogènes de degré 0.
3) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, homogènes de degré 1.
❾ Trouver les deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient les conditions initiales $g(0) = h(0) = 1$, $g'(0) = h'(0) = 0$ et $g''(0) = 1$ et telles que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = g(x)h(y)$ est harmonique.
❿ Trouver deux fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient les conditions initiales

$$g(1) = h(0) = 0 \text{ et } g(e) = h(1) = 1$$

et telles que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = g(x)h(y)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Solution

❶ Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x^2} \Longleftrightarrow g'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x}.$$

Ainsi, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g(t) = -\frac{t^2}{2}+$ cste, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h(x) = -\frac{y^2}{2x^2} + h(x) \quad \text{avec } h \in \mathbf{C}^1.$$

❷ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - 4x^3 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 4x^3 f(x,y)\right) = 0 \\ \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 4x^3 f(x,y) = g(x),\end{aligned}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ quelconque. Par conséquent toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = e^{x^4} h(y) + e^{x^4} \int_0^x e^{-t^4} g(t)dt \quad \text{avec } h \in \mathbf{C}^2.$$

❸ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\ &\qquad = y^3 g''(x) + 3y^3 g'(x) + 6y^3 g(x) = y^3 \sin 5x \\ &\qquad \iff g''(x) + 3g'(x) + 6g(x) = \sin 5x.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{15}}{2} x + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{15}}{2} x - \frac{1}{586}(15\cos 5x + 19 \sin 5x),$$

on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$\begin{aligned}f(x,y) =& c_1 y^3 e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{15}}{2} x \\ &+ c_2 y^3 e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{15}}{2} x - \frac{y^3}{586}(15\cos 5x + 19\sin 5x),\end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont deux constantes.

❹ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}&x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ &\qquad = -g(xy) + xyg'(xy) - xyg''(xy) = -g(xy) + x^2y^2 \\ &\quad \iff g''(xy) - g'(xy) = -xy.\end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $t > 0$: $g(t) = c_1 e^t + \frac{t^2}{2} + t + c_2$ où c_1, c_2 sont deux constantes, on obtient que toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y) = \frac{1}{x} g(xy) = \frac{c_1}{x} e^{xy} + \frac{xy^2}{2} + y + \frac{c_2}{x}.$$

❺ Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v) = f\left(x = \frac{u-v}{2\lambda}, y = \frac{u+v}{2}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}(u,v)=-\frac{1}{4\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u-v}{2\lambda},\frac{u+v}{2}\right)-\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u-v}{2\lambda},\frac{u+v}{2}\right)\right)=0,$$

ce qui donne, en intégrant d'abord par rapport à u puis par rapport à v, que
$F(u,v)=g(u)+h(v)$ où $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^2$.
Par conséquent toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y)=g(\lambda x+y)+h(-\lambda x+y)\quad \text{avec } g,h\in\mathbf{C}^2.$$

❻ Supposons que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v)=f\left(x=\frac{u-v}{\alpha-\beta},y=\frac{-\beta u+\alpha v}{\alpha-\beta}\right).$$

Alors, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}(u,v)\\&=-\frac{a}{4\left(b^2-ac\right)}\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u-v}{\alpha-\beta},\frac{-\beta u+\alpha v}{\alpha-\beta}\right)\right.\\&\quad\left.+2b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{u-v}{\alpha-\beta},\frac{-\beta u+\alpha v}{\alpha-\beta}\right)+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u-v}{\alpha-\beta},\frac{-\beta u+\alpha v}{\alpha-\beta}\right)\right)=0,\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant d'abord par rapport à u puis par rapport à v, que
$F(u,v)=g(u)+h(v)$, où $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^2$.
Par conséquent toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y)=g(\alpha x+y)+h(\beta x+y)\quad \text{avec } g,h\in\mathbf{C}^2.$$

❼ Supposons que $f:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soit une telle fonction et considérons la fonction auxiliaire $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(u,v)=f(x=u,y=uv).$$

Alors, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&u^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v)=u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv)+2u^2v\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u,uv)+u^2v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,uv)=0\\&\iff\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u,v)=0,\end{aligned}$$

ce qui donne, en intégrant deux fois par rapport à u, que $F(u,v)=ug(v)+h(v)$, où $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathbf{C}^2$. Par conséquent toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ cherchées sont de la forme

$$f(x,y)=xg\left(\frac{y}{x}\right)+h\left(\frac{y}{x}\right)\quad \text{avec } g,h\in\mathbf{C}^2.$$

❽ 1) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et $\gamma:]\,0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par $\gamma(t)=f(tx,ty)=$

$t^\alpha f(x,y)$. Ainsi, pour tout $t>0$:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= x\frac{\partial f}{\partial x}f(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}f(tx,ty) = \alpha t^{\alpha-1}f(x,y)\\ \gamma''(t) &= x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(tx,ty) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}f(tx,ty) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f(tx,ty)\\ &= \alpha(\alpha-1)f(x,y),\end{aligned}$$

ce qui donne, en prenant $t=1$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}f(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f(x,y) = \alpha(\alpha-1)f(x,y).$$

2a) En utilisant 1) et l'exercice précédent, on obtient que toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$, homogène de degré 0 sont de la forme

$$f(x,y) = h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{avec } g\in\mathbf{C}^2.$$

2b) En utilisant 1) et l'exercice précédent, on obtient que toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathbf{C}^2$, homogène de degré 1 sont de la forme

$$f(x,y) = xg\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{avec } g\in\mathbf{C}^2.$$

❾ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\Delta f(x,y) = g''(x)h(y) + g(x)h''(y) = 0$, on a, grâce aux conditions initiales, que

$$g''(x) - g(x) = 0 \text{ et } h''(y) + h(y) = 0 \text{ ou encore } g(x) = \operatorname{ch} x \text{ et } h(y) = \cos y.$$

❿ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\\ &= \left(g''(x) + \frac{1}{x}g'(x)\right)h(y) + \frac{1}{x^2}g(x)h''(y) = 0,\end{aligned}$$

il suffit de prendre $g''(x) + \frac{1}{x}g'(x) = 0$ et $h''(y) = 0$. Ainsi, en tenant compte des conditions initiales, les deux fonctions $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par $g(x) = \ln x$ et $h(y) = y$ répondent à la question.

Exercice 2.12.

❶ **(Laplacien en coordonnées polaires)**
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$g(r,\theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta).$$
Vérifier que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:
$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta).$$

❷ **En utilisant l'exercice précédent, trouver les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $f_2 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = f_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + f_2\left(\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}\right),$$
soit harmonique.

❸ **Montrer que l'équation**
$$x^2 + 2e^y + \sin xy - 2 = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❹ **Montrer que l'équation**
$$e^{xy} + y^2 - x - 2 = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❺ **Montrer que l'équation**
$$1 - y^2 + x^2 y e^y = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

❻ **Montrer que l'équation**
$$x^3 + y^3 - x^2 y - 1 = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

❼ **Montrer que l'équation**
$$x^2 - 2x - y - \cos\pi y^2 + \ln\frac{1+y^4}{2} + e^{x(y-1)} = 0,$$
définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(1) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 1.

❽ **Montrer que l'équation**
$$\cos\left(x^2 + y\right) + \sin(x+y) + e^{x^3 y} = 2,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❾ **Montrer que l'équation**
$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$$
définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = \phi(x)$ en 1.

❿ **Soinet A un ouvert, $(a,b) \in A$ avec $a \neq 0$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, homogène de degré α telle que**
$$f(a,b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$
Donner explicitement la fonction implicite $y = \phi(x)$ que f définit au voisinage du point a et qui vérifie $\phi(a) = b$.

Solution

❶ Puisque pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) =& \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin 2\theta\\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^2\theta,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) =& -r\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^2\theta\\
&- r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin 2\theta - r\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\\
&+ r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos 2\theta,
\end{aligned}$$

on a $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$.

❷ Puisque pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $g(r,\theta) = f_1(r) + f_2(\theta)$, la fonction f est harmonique sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f_1''(r) + \frac{1}{r}f_1'(r) + \frac{1}{r^2}f_2''(\theta) = 0 \Longleftrightarrow r^2 f_1''(r) + r f_1'(r) = \alpha \text{ et } f_2''(\theta) = -\alpha,$$

où α est une constante. Par conséquent toutes les fonctions $f_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ sont de la forme

$$f_1(r) = a\ln r + \frac{\alpha}{2}\ln^2 r + b \text{ et } f_2(\theta) = -\frac{\alpha}{2}\theta^2 + c\theta + d,$$

où a, b, c et d sont quatre constantes.

❸ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 2e^y + \sin xy - 2$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2e^y + x\cos xy.$$

Ainsi, puisque $f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 0$ et pour tout $|x| < \delta$: $f(x, \phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y\cos xy \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - y^2\sin xy.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = -1 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❹ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = e^{xy} + y^2 - x - 2$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2y.$$

Ainsi, puisque $f(0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $|x| < \delta$: $f(x, \phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} - 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy}.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = -\frac{1}{2} < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.
❺ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 1 - y^2 + x^2ye^y$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + x^2e^y + x^2ye^y.$$

Ainsi, puisque $f(0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'ill existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $|x| < \delta$: $f(x,\phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xye^y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2ye^y.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = e > 0$, ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.
❻ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3+y^3-x^2y-1$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - x^2.$$

Ainsi, puisque $f(0,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 3 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et pour tout $|x| < \delta$: $f(x,\phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2xy \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 2y.$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = \frac{2}{3} > 0$; ce qui entraine que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.
❼ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x^2 - 2x - y - \cos \pi y^2 + \ln \frac{1+y^4}{2} + e^{x(y-1)}.$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1 + 2\pi y \sin \pi y^2 + \dfrac{4y^3}{1+y^4} + xe^{x(y-1)}$.
Ainsi, puisque $f(1,1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]1-\delta, 1+\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1) = 1$ et pour tout $|x-1| < \delta$: $f(x,\phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 + (y-1)e^{x(y-1)} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + (y-1)^2e^{x(y-1)}$$

Par conséquent $\phi'(1) = 0$ et $\phi''(1) = -1 < 0$, ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 1.
❽ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \cos\left(x^2+y\right) + \sin(x+y) + e^{x^3y} - 2.$$

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin\left(x^2+y\right) + \cos(x+y) + x^3e^{x^3y}$.
Ainsi, puisque $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous

permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $|x| < \delta$: $f(x, \phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\,2x\sin\left(x^2+y\right)+\cos(x+y)+3x^2ye^{x^3y},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -\,2\sin\left(x^2+y\right)-4x^2\cos\left(x^2+y\right)\\
&\qquad -\sin(x+y)+6xye^{x^3y}+9x^4y^2e^{x^3y}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = -3 < 0$; ce qui entraîne que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❾ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \ln x + e^{\frac{y}{x}} - 1$.

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{e^{\frac{y}{x}}}{x}$.

Ainsi, puisque $f(1, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]1-\delta, 1+\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(1) = 0$ et pour tout $|x-1| < \delta$: $f(x, \phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},$$

ce qui entraîne que $\phi'(1) = -1$. Par conséquent l'équation de la tangente à la courbe $y = \phi(x)$ en 1 est $y = \phi'(1)(x-1) = -x+1$.

❿ D'une part, puisque $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\phi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ telle que $\phi(a) = b$ et pour tout $|x-a| < \delta$: $f(x, \phi(x)) = 0$. De plus, $\phi \in \mathbf{C}^1$ et pour tout $|x-a| < \delta$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x)) + \phi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x)) = 0.$$

D'autre part, la fonction f étant homogène de degré α, on a, d'après la relation d'Euler, que pour tout $(x, y) \in A$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y),$$

ce qui entraîne que pour tout $|x-a| < \delta$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x)) + \phi(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x)) = 0.$$

Considérons à présent, la fonction auxiliaire $g :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi(x)).$$

Ainsi, puisque cette fonction est continue et $ag(a) \neq 0$, il existe un nombre $0 < \beta \leq \delta$ tel que pour tout $|x-a| < \beta$: $xg(x) \neq 0$. Par conséquent pour tout $|x-a| < \beta$:

$$\phi'(x) - \frac{1}{x}\phi(x) = 0 \text{ et } \phi(a) = b \text{ ou encore } \phi(x) = \frac{b}{a}x.$$

<u>Exercice</u> 2.13. **Déterminer les extrémums locaux des fonction suivantes :**

❶ $f(x,y) = e^{x^2+y^2-2x+2y}$.

❷ $f(x,y) = x^3 + y^3 - e^{x+y}$.

❸ $f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$.

❹ $f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$.
Le maximum local obtenu est-il global ?

❺
$f(x,y) = x^2 + x\sin y - \frac{1}{4}\cos y + 5$.

❻ $f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$.
Montrer que $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -3$.

❼ $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin y$.

❽ $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)}$.

❾ $f(x,y) = (x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

❿ $f(x,y) = ye^{-\left(x^2+y\right)}$.
Le maximum local obtenu est-il global ?

Solution

❶ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)e^{x^2+y^2-2x+y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y+1)e^{x^2+y^2-2x+y}, \end{cases}$

l'unique point stationnaire de la fonction f est $(1,-1)$.
Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\left(1+2(x-1)^2\right) e^{x^2+y^2-2x+y} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4(x-1)(y+1)e^{x^2+y^2-2x+y} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\left(1+2(y+1)^2\right) e^{x^2+y^2-2x+y}. \end{cases}$$

Pour $(1,-1)$: $s^2 - rt = -\frac{4}{e^2} < 0$ et $r = \frac{2}{e} > 0$. Par conséquent la fonction f admet un minimum local en $(1,-1)$.

❷ Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - e^{x+y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - e^{x+y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\ \\ 3x^2 - e^{x+y} = 0. \end{cases}$$

Ainsi,
1) $x = -y$. Alors, $3x^2 - 1 = 0$ ou encore $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2) $x = y$. Alors $3x^2 - e^{2x} = 0$; désignons par a l'unique solution de cette équation. De plus, $a < 0$.
Par conséquent la fonction f admet trois points stationnaires, à savoir :

$$P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), Q = (a,a).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x - e^{x+y} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -e^{x+y} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y - e^{x+y}, \end{cases}$$

1) Pour P_1 et P_2 : $s^2 - rt = 12 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces deux points.
3) Pour Q : $s^2 - rt = 36a^2(a-1) < 0$ et $r = 3a(2-a) < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

❸ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3 + y^2 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy, \end{cases}$
la fonction f admet quatre points stationnaires, à savoir :

$$P_1 = (0, -\sqrt{3}), P_2 = (0, \sqrt{3}), Q_1 = (-1, 0) \text{ et } Q_2 = (1, 0).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x. \end{cases}$$

1) Pour P_1 et P_2 : $s^2 - rt = 12 > 0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces deux points.
2) Pour Q_1 : $s^2 - rt = -12 < 0$ et $r = -6 < 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un maximum local en ce point.
3) Pour Q_1 : $s^2 - rt = -12 < 0$ et $r = 6 > 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ce point.

❹ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y(12 - 2x - y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x(12 - x - 2y), \end{cases}$
la fonction f admet quatre points stationnaires, à savoir :

$$O = (0, 0), \quad P_1 = (0, 12), P_2 = (12, 0) \text{ et } Q = (4, 4).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 12 - 2x \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2x. \end{cases}$$

1) Pour O, P_1 et P_2 : $s^2 - rt = 144 > 0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces trois points.
2) Pour Q : $s^2 - rt = -48 < 0$ et $r = -8 < 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un maximum local en ce point.
Ce maximum local n'est pas un maximum global car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, -1) = +\infty$.

❺ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \sin y \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y + \frac{1}{4}\sin y, \end{cases}$
les points stationnaires de la fonction f sont

$$P_k = (0, k\pi), Q_k = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ et } R_k = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right),$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos y \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x\sin y + \dfrac{1}{4}\cos y. \end{cases}$$

1) Pour P_k : $s^2 - rt > 0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces points.
2) Pour Q_k et R_k : $s^2 - rt = -\frac{3}{4} < 0$ et $r = 2 > 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ces points.

❻ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin x - \cos x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + \cos x, \end{cases}$
les points stationnaires de la fonction f sont $P_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y\cos x + \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin x \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2. \end{cases}$$

1) k pair. Pour P_k : $s^2 - rt = -1 < 0$ et $r = 1 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ces points.
2) k impair. Pour P_k : $s^2 - rt = 3 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces points.
$\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -3$ car $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -3$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(y + \frac{\cos x}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(9 - \sin^2 x + 4\sin x\right) \\ &\geq -\frac{1}{4}\left(9 - \sin^2 x + 4\sin x\right) \leq -3. \end{aligned}$$

❼ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x+y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y) + \cos y, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont

$$Q_{k,p} = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + p\pi\right) \text{ avec } k, p \in \mathbb{Z}.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\cos(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin y. \end{cases}$$

1) Si k est pair et $p \in \mathbb{Z}$: $s^2 - rt = 1 > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local aux points $Q_{k,p}$.
2) Si k est impair et p pair : $s^2 - rt = -1 < 0$ et $r = -1 < 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un maximum local aux points $Q_{k,p}$.
3) Si k et p impairs : $s^2 - rt = -1 < 0$ et $r = 1 > 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local aux points $Q_{k,p}$.

❽ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x - x^2 - y^2)\, e^{-(x+y)} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y - x^2 - y^2)\, e^{-(x+y)}, \end{cases}$

la fonction f admet deux points stationnaires : $O = (0,0)$ et $P = (1,1)$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(2 - 4x + x^2 + y^2\right) e^{-(x+y)} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(-2x - 2y + x^2 + y^2\right) e^{-(x+y)} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(2 - 4y + x^2 + y^2\right) e^{-(x+y)}. \end{cases}$$

1) Pour O : $s^2 - rt = -4 < 0$ et $r = 2 > 0$, ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.
2) Pour P : $s^2 - rt = 4e^{-4} > 0$, ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.
❾ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 - 2x(x+y))e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1 - 2y(x+y))e^{-\left(x^2+y^2\right)}, \end{cases}$$

la fonction f admet deux points stationnaires, à savoir :

$$P = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ et } Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2\left(3x + y - 2x^2(x+y)\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2(x + y - 2xy(x+y))e^{-\left(x^2+y^2\right)} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\left(x + 3y - 2y^2(x+y)\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}. \end{cases}$$

1) Pour P : $s^2 - rt = -\frac{8}{e} < 0$ et $r = \frac{3}{\sqrt{e}} > 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ce point.
2) Pour Q : $s^2 - rt = -\frac{8}{e} < 0$ et $r = -\frac{3}{\sqrt{e}} < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point.

➉ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xye^{-\left(x^2+y\right)} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-y)e^{-\left(x^2+y\right)}, \end{cases}$

l'unique point stationnaire de la fonction f est $P = (0,1)$.
Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y\left(2x^2 - 1\right) e^{-\left(x^2+y\right.} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x(y-1)e^{-\left(x^2+y\right)} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (y-2)e^{-\left(x^2+y\right)}. \end{cases}$$

Pour $(0,1)$: $s^2 - rt = -\frac{2}{e^2} < 0$ et $r = -\frac{2}{e} < 0$. Par conséquent la fonction f admet un maximum local en ce point. Ici, le maximum local est global. En effet, puisque $\max\limits_{y \in \mathbb{R}} ye^{-y} = \frac{1}{e}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} : 0 < e^{-x^2} \leq 1$, on a

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} ye^{-\left(x^2+y\right)} = \frac{1}{e} = f(0,1).$$

Exercice 2.14. Déterminer les extrémums locaux des fonction suivantes :

$\boxed{1}$ $f(x,y) = x + y^2 - \operatorname{sh}(x+y)$.

$\boxed{2}$ $f(x,y) = x + y - \operatorname{sh}(x+y)$.

$\boxed{3}$ $f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)^4 - (x-1)^2 - y^2$. Le maximum local obtenu est-il global ? Même question pour le minimum.

$\boxed{4}$ $f(x,y) = 16e^{xy} + 16x^2 + y^2$.

$\boxed{5}$ $f(x,y) = e^{x^2} + \cos(x+y) + \sin(x+y)$.

$\boxed{6}$ $f(x,y) = 2x^3 + (x-y)^2 - 6y$.

$\boxed{7}$ $f(x,y) = -xy - e^{-xy} + \cos x$.

$\boxed{8}$ $f(x,y) = x^2 + \frac{9}{5}xy + y^2 + \operatorname{Arctg} xy$.

$\boxed{9}$ $\boldsymbol{f(x,y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$,
avec $\boldsymbol{x, y > 0}$.

$\boxed{10}$ $\boldsymbol{f(x,y) = x^2y(4-x-y)}$.

$\boxed{11}$
$\boldsymbol{f(x,y) = 1+6x^2-3\left(1-(x-y)^2\right)^8}$.

$\boxed{\text{Solution}}$

$\boxed{1}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \operatorname{ch}(x+y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - \operatorname{ch}(x+y), \end{cases}$
l'unique point stationnaire de la fonction f est $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 - \operatorname{sh}(x+y). \end{cases}$$

Pour $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, en constatant que pour tout $\delta > 0$:

$$f\left(-\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}-\delta\right) = -\frac{1}{4} + \delta^2 > -\frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

et

$$f\left(-\frac{1}{2}+\delta, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + (\delta - \operatorname{sh}\delta) < -\frac{1}{4} = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

on peut affirmer que la fonction f n'admet pas d'extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\boxed{2}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \operatorname{ch}(x+y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \operatorname{ch}(x+y), \end{cases}$
les points stationnaires de la fonction f sont de la forme $P_x = (x, -x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\operatorname{sh}(x+y). \end{cases}$$

Pour tous les points P_x : $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, en constatant que pour tout $\delta > 0$:

$$f(x+\delta, -x) = \delta - \operatorname{sh}\delta < 0 \text{ et } f(x-\delta, -x) = -\delta + \operatorname{sh}\delta > 0,$$

on peut affirmer que la fonction f n'admet pas d'extremum local aux points P_x.
$\boxed{3}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{8x}{1+x^2+y^2} - 2(x-1) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\left(\frac{4}{1+x^2+y^2} - 1\right), \end{cases}$$

la fonction f admet trois points stationnaires, à savoir :

$$P_1 = (-1, 0), \quad P_2 = (1 - \sqrt{2}, 0) \text{ et } P_3 = (1 + \sqrt{2}, 0).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{8\left(1 - x^2 + y^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} - 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\dfrac{16xy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{8\left(1 + x^2 - y^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} - 2. \end{cases}$$

1) Pour $P_1 : s^2 - rt = 4 > 0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.
2) Pour $P_2 : s^2 - rt = -\frac{8\sqrt{2}(3\sqrt{2}-4)}{(2-\sqrt{2})^3} < 0$ et $r = \frac{12\sqrt{2}-16}{(2-\sqrt{2})^2} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point. P_2 n'est pas un minimum global. En effet,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x, 0) = \lim_{x \to -\infty} \left(\left(1 + x^2\right) \left(\frac{4 \ln\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2} - 1 \right) + 2x \right) = -\infty.$$

3) Pour $P_3 : s^2 - rt = -\frac{8\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)}{(2+\sqrt{2})^3} < 0$ et $r = -\frac{12\sqrt{2}+16}{(2+\sqrt{2})^2} < 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un maximum local en ce point. P_3 est un maximum global. Pour cela, posons $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ et considérons la fonction auxiliaire $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = 4\ln\left(1 + t^2\right) - \left(1 + t^2\right) + 2t$.
Puisque pour tout $t > 0 : g'(t) = \dfrac{-2(t+1)(t-(1-\sqrt{2}))(t-(1+\sqrt{2}))}{1+t^2}$, on a $\max_{t>0} g(t) = g(1 + \sqrt{2})$. Finalement, il suffit de remarquer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) \leq g(t) \leq g(1 + \sqrt{2}) = f(1 + \sqrt{2}, 0).$$

$\boxed{4}$ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 16ye^{xy} + 32x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 16xe^{xy} + 2y \end{cases}$

la fonction f admet trois points stationnaires, à savoir :

$$O = (0, 0), P = \left(-\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}, 2\sqrt{\ln 2}\right) \text{ et } Q = \left(\frac{\sqrt{\ln 2}}{2}, -2\sqrt{\ln 2}\right).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 16y^2 e^{xy} + 32 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 16(1+xy)e^{xy} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 16x^2 e^{xy} + 2. \end{cases}$$

1) Pour $O = (0,0)$: $s^2 - rt = 192 > 0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.
2) Pour P et Q : $s^2 - rt = -256 \ln 2 < 0$ et $r = 32(1 + \ln 2) > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ces deux points.
$\boxed{5}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2} - \sin(x+y) + \cos(x+ \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y) + \cos(x+y), \end{cases}$$

les points stationnaires de la fonction f sont $P_k = \left(0, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\left(1 + 2x^2\right)e^{x^2} - \cos(x+y) - \sin(x+y) \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin(x+y) \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin(x+y). \end{cases}$$

1) Pour P_k avec k pair : $s^2 - rt = 2\sqrt{2} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ces points.
2) Pour P_k avec k impair : $s^2 - rt = -2\sqrt{2} < 0$ et $r = 2 + \sqrt{2} > 0$; ce qui entraîne que la fonction f admet un minimum local en ce point.
$\boxed{6}$ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 2(x-y) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) - 6, \end{cases}$
la fonction f admet deux points stationnaires : $P = (-1,2)$ et $Q = (1,4)$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x + 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2 \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2. \end{cases}$$

1) Pour $P = (-1,2)$: $s^2 - rt = 24 > 0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.

2) Pour $Q=(1,4)$: $s^2-rt=-24<0$ et $r=14>0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ces points.

$\boxed{7}$ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left(-1+e^{-xy}\right)-\sin x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(-1+e^{-xy}\right), \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont $P_y=(0,y)$ avec $y\in\mathbb{R}$ et $Q_k=(k\pi,0)$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2e^{-xy}-\cos x \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = -1+(1-xy)e^{-xy} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2e^{-xy}. \end{cases}$$

1) Pour tous les points P_y : $s^2-rt=0$. A priori, on ne peut rien dire.
Néanmoins, désignons par $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t)=-t-e^{-t}$.
Puisque pour tout $t\in\mathbb{R}$: $g'(t)=-1+e^{-t}$, on a

$$\max_{t\in\mathbb{R}^2} g(t)=g(0)=-1.$$

Ainsi, en remarquant que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)\leq \max_{t\in\mathbb{R}^2} g(t)+1=f(0,y)=0,$$

on peut affirmer que la fonction f atteint son maximum global aux points P_y.
2) Pour Q_k avec $k\neq 0$ pair : $s^2-rt=-k^2\pi^2<0$ et $r=-1<0$; ce qui entraine que la fonction f admet un maximum local (ici global) en ces points.
3) Pour Q_k avec k impair : $s^2-rt=k^2\pi^2$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas extremum local en ces points.
$\boxed{8}$ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y\left(\frac{9}{5}+\frac{1}{1+x^2y^2}\right) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(\frac{9}{5}+\frac{1}{1+x^2y^2}\right)+2y \end{cases}$$

la fonction f admet trois points stationnaires :

$$O=(0,0), P=(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ et } Q=(\sqrt{2},-\sqrt{2}).$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2-\dfrac{2xy^3}{\left(1+x^2y^2\right)^2} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{9}{5}+\dfrac{1}{1+x^2y^2}-\dfrac{2x^2y^2}{\left(1+x^2y^2\right)^2} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2-\dfrac{2x^3y}{\left(1+x^2y^2\right)^2}. \end{cases}$$

1) Pour $O=(0,0)$: $s^2-rt=\frac{96}{25}>0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.
2) Pour P et Q : $s^2-rt=-\frac{64}{25}<0$ et $r=\frac{58}{25}>0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ces points.

$\boxed{9}$ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y-\frac{1}{x^2} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+\frac{1}{y^2}, \end{cases}$

l'unique point stationnaire de la fonction f est $P=(-1,1)$.
Nature du point stationnaire.

$$\begin{cases} r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{2}{x^3} \\ s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=1 \\ t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\dfrac{2}{y^3}. \end{cases}$$

Pour P : $s^2-rt=-3<0$ et $r=-2<0$; ce qui entraine que la fonction f admet un maximum local en ce point.

$\boxed{10}$ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy\left(4-\frac{3}{2}x-y\right) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2(4-x-2y) \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont $P=(4,0), Q=(2,1)$ et $R_y=(0,y)$ avec $y\in\mathbb{R}$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y(4-3x-y) \\ s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2x\left(4-\dfrac{3}{2}x-2y\right) \\ t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-2x^2. \end{cases}$$

1) Pour $P=(4,0)$: $s^2-rt=256>0$; ce qui entraine que la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.
2) Pour $Q=(2,1)$: $s^2-rt=-32<0$ et $r=-6<0$; ce qui entraine que la fonction f admet un maximum local en ces points.
3) Pour tous les points R_y : $s^2-rt=0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, en constatant que pour tout $y\in\mathbb{R}$: $f(0,y)=0$, on obtient, en étudiant le signe de $f(x,y)$ au voisinage de l'axe Oy, que

- si $y\notin[0,4]$, la fonction f admet un maximum local en R_y ;
- si $y\in]0,4[$, la fonction f admet un minimum local en R_y ;
- si $y=0$ ou 4 , la fonction n'admet pas d'extremum local en R_y.

$\boxed{11}$ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=12x+48(x-y)\left(1-(x-y)^2\right)^7 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-48(x-y)\left(1-(x-y)^2\right)^7, \end{cases}$$

la fonction f admet trois points stationnaires : $O=(0,0)$, $P=(0,-1)$ et $Q=(0,1)$.
Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12 + 48\left(1-(x-y)^2\right)^7 - 672(x-y)^2\left(1-(x-y)^2\right)^6 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -48\left(1-(x-y)^2\right)^7 + 672(x-y)^2\left(1-(x-y)^2\right)^6 \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 48\left(1-(x-y)^2\right)^7 - 672(x-y)^2\left(1-(x-y)^2\right)^6. \end{cases}$$

1) Pour le $O=(0,0)$: $s^2 - rt = -576 < 0$ et $r = 60 > 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ce point.
2) Pour P et Q : $s^2 - rt = 0$. A priori, on ne peut rien dire. Néanmoins, puisque $f(0,-1) = f(0,1) = 1$ et pour tout $\delta > 0$:

$$f(\delta, -1+\delta) = f(\delta, 1+\delta) = 1 + 6\delta^2 > 1,$$

et

$$f(0,-1-\delta) = f(0, 1+\delta) = 1 - 3\delta^8(2+\delta)^8 < 1,$$

on peut affirmer que la fonction f n'admet pas d'extremum local aux points P et Q.

Exercice 2.15.

❶ Soit $\lambda > 0$. Etudier, en fonction de λ, la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + \lambda y^2.$$

Pour $\lambda \geq \frac{1}{4}$, montrer que

$$f(0,0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

❷ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1+\alpha^2 x^2 + y^2},$$

possède un minimum local en $(0,0)$.

Trouver les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par.

❸ $f(x,y) = (x+y) + \sin(x+y) + \cos(x+y)$.

❹ $f(x,y) = \left|2\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right|$.

❺ Soient E un ouvert, $(a,b) \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 admettant un maximum local en (a,b). Montrer que pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2uv\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \leq 0.$$

❻ Trouver les extrema de la fonction $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+3x^2+y^2}.$$

❼ Trouver les extrema de la fonction $f : [-2,0] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

❽ **Trouver les extrema de la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y).$$

❾ **Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{\pi}{2}, |y| \leq \cos x\right\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2.$$

Solution

❿ Puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + 2\lambda y, \end{cases}$

les points stationnaires de la fonction f sont :

$$O = (0,0),$$
$$P_\lambda = \left(\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln(2\sqrt{\lambda})}, -\frac{\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln(2\sqrt{\lambda})}}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ avec } 0 < \lambda < \frac{1}{4},$$
$$Q_\lambda = \left(-\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln(2\sqrt{\lambda})}, \frac{\sqrt{-\sqrt{\lambda}\ln(2\sqrt{\lambda})}}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ avec } 0 < \lambda < \frac{1}{4}.$$

Nature des points stationnaires.

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy} + 2 \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+xy)e^{xy} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy} + 2\lambda. \end{cases}$$

1) Pour le $O = (0,0)$: $s^2 - rt = 1 - 4\lambda$ et $r = 2 > 0$; ce qui entraîne que

- Si $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, la fonction f n'admet pas d'extremum local en ce point.
- Si $\lambda \geq \frac{1}{4}$, la fonction f admet un minimum global en ce point. En effet, en posant $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \sqrt{2}, |y| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right\}$, on sait, f étant continue et E compact, qu'il existe $(a,b) \in E$ pour lequel

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y) \leq f(0,0) = 1.$$

Ainsi, en remarquant que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash E$: $f(x,y) > 2$, on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} f(x,y).$$

D'où $\nabla f(a,b) = (0,0)$ car $f \in \mathbf{C}^1$. Or pour $\lambda \geq \frac{1}{4}$, l'unique point stationnaire de la fonction f est $(0,0)$. D'où $a = b = 0$.

2) Pour P_λ et Q_λ avec $0 < \lambda < \frac{1}{4}$:

$$s^2 - rt = 16\lambda \ln(2\sqrt{\lambda}) < 0 \text{ et } r = 2(1 - \ln(2\sqrt{\lambda})) > 0;$$

ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ces points.

❷ Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y + \frac{2\alpha^2 x}{(1+\alpha^2 x^2 + y^2)^2} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y + \frac{2y}{(1+\alpha^2 x^2 + y^2)^2}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + \dfrac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2 x^2 + y^2)^2} - \dfrac{8\alpha^4 x^2}{(1 + \alpha^2 x^2 + y^2)^3} \\ s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 - \dfrac{8\alpha^2 xy}{(1 + \alpha^2 x^2 + y^2)^3} \\ t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + \dfrac{2}{(1 + \alpha^2 x^2 + y^2)^2} - \dfrac{8y^2}{(1 + \alpha^2 x^2 + y^2)^3}, \end{cases}$$

on obtient que pour $O = (0, 0)$: $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, $s^2 - rt = -7 - 8\alpha^2 < 0$ et $r = 2\left(1 + \alpha^2\right) > 0$; ce qui entraine que la fonction f admet un minimum local en ce point.

❸ Si l'on pose $t = x + y$, ce problème revient à chercher les extrema locaux de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = t + \sin t + \cos t = t + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right).$$

Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g'(t) = 1 + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$, les points stationnaires de la fonction g sont

$$t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ et } t = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Comme de plus $g''(t) = -\sin t - \cos t$, on a

1) Pour $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $g''\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 < 0$, la fonction g admet un maximum local en ces points.
2) Pour $t = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: $g''\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 > 0$, la fonction g admet un minimum local en ces points.

En conclusion, la fonction f admet un maximum local en tout point des droites d'équation $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ tandis qu'elle admet un minimum local en tout point des droites d'équation $x + y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❹ Posons $t = x^2 + y^2$ et considérons la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = |2\sqrt{t} - t| = \begin{cases} 2\sqrt{t} - t & \text{si } 0 \leq t \leq 4 \\ -2\sqrt{t} + t & \text{si } t > 4. \end{cases}$$

D'une part, on constate que $g(0) = g(4) = \min_{t \geq 0} g(t) = 0$. D'autre part, puisque

$$g'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 & \text{si } 0 < t < 4 \\ -\frac{1}{\sqrt{t}} + 1 & \text{si } t > 4, \end{cases}$$

la fonction g admet un unique point stationnaire, à savoir : $t = 1$. Comme de plus pour $t \in \left]0, 4\right[$: $g''(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t^3}} < 0$, elle admet, en ce point, un maximum local.
En conclusion, la fonction f admet un minimum global en $(0, 0)$ et en tout point situé sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$, tandis qu'elle admet un maximum local en tout point situé sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
❺ Pour simplifier l'écriture, posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Pour commencer, on va supposer que $s^2 - rt \neq 0$. Alors, puisque la fonction f admet un maximum local en (a, b), on doit avoir : $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$; ce qui entraine que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$ru^2 + 2suv + tv^2 = r\left(\left(u + \frac{s}{r}v\right)^2 - \frac{v^2}{r^2}\left(s^2 - rt\right)\right) \leq 0.$$

Supposons maintenant que $s^2 - rt = 0$. Si $r = t = 0$, il n'y a rien à démontrer. Faisons donc l'hypothèse supplémentaire que $r \neq 0$ (le cas $t \neq 0$ se traitant de la même manière) et considérons la fonction auxiliaire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t, b)$. Cette fonction est de classe $\mathbf{C}^2$ car f l'est. Puisque g admet un maximum local en a et que $g''(a) = r \neq 0$, on doit avoir $r < 0$. Par conséquent pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$ru^2 + 2suv + tv^2 = r\left(u + \frac{s}{r}v\right)^2 \leq 0.$$

❻ Posons $E = [0, 1] \times [0, 1]$. Puisque pour tout $(x, y) \in E : f(x, y) \geq 0$, on peut écrire, sans autre, que

$$\min_{(x,y)\in E} f(x, y) = 0.$$

On pourra noter que ce minimum est atteint aux points de la forme $(0, y)$ ou $(x, 0)$ avec $0 \leq x, y \leq 1$. La fonction f atteint son maximum, car elle continue sur un compact. En remarquant que, pour tout $(x, y) \in \overset{\circ}{E}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y\left(1 - 3x^2 + y^2\right)}{\left(1 - 3x^2 + y^2 r\right)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x\left(1 + 3x^2 - y^2\right)}{\left(1 - 3x^2 + y^2 r\right)^2} \end{array}\right. \Rightarrow \nabla f(x, y) \neq (0, 0),$$

le maximum cherché se trouve sur ∂E.

1) Sur $\{0\} \times [0, 1]$, la fonction f est identiquement nulle.
2) Sur $[0, 1] \times \{0\}$, la fonction f est identiquement nulle.
3) Sur $\{1\} \times [0, 1]$, la fonction f, qui s'écrit $f(1, y) = \frac{y}{4+y^2}$, atteint son maximum en $y = 1$ et ce dernier vaut $\frac{1}{5}$.
4) Sur $[0, 1] \times \{1\}$, la fonction f, qui s'écrit $f(x, 1) = \frac{x}{2+3x^2}$, atteint son maximum en $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et ce dernier vaut $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

En conclusion, $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

❼ Posons $E = [-2,0] \times [0,1]$. La fonction f atteint ses extrema, car elle est continue sur un compact. Puisque, pour tout $(x,y) \in \overset{\overset{\circ}{A}}{E}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y + 3 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 2, \end{cases}$$

$\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est l'unique point stationnaire de f et $f\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$. Etudions à présent la fonction sur ∂E.

1) Sur $\{0\} \times [0,1]$, la fonction f s'écrit $f(x,1) = (y-1)^2$. Par conséquent

$$\min_{0\leq y\leq 1} f(0,y) = f(0,1) = 0 \text{ et } \max_{0\leq y\leq 1} f(0,y) = f(0,0) = 1.$$

2) Sur $[-2,0] \times \{1\}$, la fonction f s'écrit $f(x,1) = x^2 + 2x$. Par conséquent

$$\min_{-2\leq x\leq 0} f(x,1) = f(-1,1) = -1 \text{ et } \max_{-2\leq x\leq 0} f(x,1) = f(-2,1) = f(0,1) = 0.$$

3) Sur $\{-2\} \times [0,1]$, la fonction f s'écrit $f(-2,y) = y^2 - 1$. Par conséquent

$$\min_{0\leq y\leq 1} f(-2,y) = f(-2,0) = -1 \text{ et } \max_{0\leq y\leq 1} f(-2,y) = f(-2,1) = 0.$$

4) Sur $[-2,0] \times \{0\}$, la fonction f s'écrit $f(x,0) = x^2 + 3x + 1$. Par conséquent

$$\min_{-2\leq x\leq 0} f(x,0) = f\left(-\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{5}{4} \text{ et } \max_{-2\leq x\leq 0} f(x,0) = f(0,0) = 1.$$

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = -\frac{4}{3}$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = 1$.

❽ Posons $E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction f atteint ses extrema, car elle est continue sur un compact. Puisque, pour tout $(x,y) \in \overset{\circ}{E}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x + \cos(x+y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + \cos(x+y), \end{cases}$$

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ est l'unique point stationnaire de f et $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$. Etudions à présent la fonction sur ∂E.

1) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \{0\}$, la fonction f s'écrit $f(x,0) = 2\sin x$. Par conséquent

$$\min_{0\leq x\leq \frac{\pi}{2}} f(x,0) = f(0,0) = 0 \text{ et } \max_{0\leq x\leq \frac{\pi}{2}} f(x,0) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2.$$

2) Sur $\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction f s'écrit $f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 1 + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right)$. Par conséquent

$$\min_{0\leq y\leq \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2,$$

$$\max_{0\leq y\leq \frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

3) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, la fonction f s'écrit $f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. Par conséquent

$$\min_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2,$$
$$\max_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

4) Sur $\{0\} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction f s'écrit $f(0, y) = 2\sin y$. Par conséquent

$$\min_{0 \le y \le \frac{\pi}{2}} f(0, y) = f(0, 0) = 0 \text{ et } \max_{0 \le y \le \frac{\pi}{2}} f(0, y) = f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = 0$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

❾ La fonction f atteint ses extrema, car elle est continue sur un compact. Puisque, pour tout $(x, y) \in \dot{E}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y\sin x - \cos x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + \cos x, \end{cases}$$

la fonction n'admet pas de point stationnaire. Etudions à présent la fonction sur ∂E.

1) Sur $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \frac{\pi}{2}, y = \cos x\right\}$, la fonction s'écrit $f(x, \cos x) = -2\sin^2 x - \sin x$. Par conséquent

$$\min_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, \cos x) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -3,$$
$$\max_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, \cos x) = f\left(-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

2) Sur $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le \frac{\pi}{2}, y = -\cos x\right\}$, la fonction s'écrit $f(x, \cos x) = -\sin x - 2$. Par conséquent

$$\min_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, -\cos x) = f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -3,$$
$$\max_{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}} f(x, -\cos x) = f\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = -1.$$

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = -3$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = \frac{1}{8}$.

Exercice 2.16.

❶ Soit $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le \frac{3\pi}{4}\right\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin(x - y) + \cos(x + y).$$

❷ Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + \sin(x + y).$$

Trouver le minimum des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par.

❸ $f(x, y) = (1 - x + y)^2 + (1 + x + y)^2 + (2 + 2x + y)^2$.

❹ $f(x,y)=x^2+y^2+(x+y-2)^2$.
❺ $f(x,y)=|x|+|y|+|x+y-2|$.
❻ Soient $A=(7,1), B=(x,-x), C=(y,y)$ et $D=(8,4)$. Minimiser la somme des distances de A à B, de B à C et de C à D.
❼ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ 1) Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $g_\alpha(x)=f(x,\alpha x)$ admet un minimum local en 0.
2) Peut-on en déduire que la fonction f admet un minimum local en $(0,0)$?
❽ Soit $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2=25\}$. Trouver le minimum de la fonction $f:E\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+y^2+xy$.
❾ Trouver les extrema de la fonction $f:\overline{B((0,0),1)}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\frac{x+y}{1+x^2+y^2}.$$

❿ Soit $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4\le x^2+y^2\le 9, 0\le x\le y\}$. Trouver les extrema de la fonction $f:E\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\frac{y^2}{x+y}.n$$

Solution

❶ E est l'intérieur avec ses côtés du carré de sommets $A=\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $B=\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$, $C=\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$ et $D=\left(0,-\frac{3\pi}{4}\right)$. La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Puisque, pour tout $(x,y)\in\overset{\circ}{E}$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x-y)-\sin(x+y)\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\cos(x-y)-\sin(x+y),\end{cases}$$

la fonction admet deux points stationnaires, à savoir : $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$. De plus, $f\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=0$ et $f\left(\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\right)=2$. Etudions à présent la fonction sur son bord ∂E.

1) Sur le segment AB, la fonction s'écrit $f(x,-x+\frac{3\pi}{4})=\sin(2x-\frac{3\pi}{4})-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Par conséquent

$$\min_{0\le x\le\frac{3\pi}{4}} f\left(x,-x+\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right)=-1-\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\max_{0\le x\le\frac{3\pi}{4}} f\left(x,-x+\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(\frac{5\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2) Sur le segment BC, la fonction s'écrit $f(x,x+\frac{3\pi}{4})=\cos(2x+\frac{3\pi}{4})-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Par conséquent

$$\min_{-\frac{3\pi}{4}\le x\le 0} f\left(x,x+\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)=0,$$
$$\max_{-\frac{3\pi}{4}\le x\le 0} f\left(x,x+\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3) Sur le segment CD, la fonction s'écrit $f(x, -x-\frac{3\pi}{4}) = \sin(2x+\frac{3\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par conséquent

$$\min_{-\frac{3\pi}{4}\leq x\leq 0} f\left(x, -x-\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right) = -1-\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\max_{-\frac{3\pi}{4}\leq x\leq 0} f\left(x, -x-\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4) Sur le segment DA, la fonction s'écrit $f\left(x, x-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par conséquent

$$\min_{0\leq x\leq\frac{3\pi}{4}} f\left(x, x-\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(0, -\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) = 0,$$
$$\max_{0\leq x\leq\frac{3\pi}{4}} f\left(x, x-\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}\right) = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = -1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = 2$.

❷ Pour commencer, montrons l'existence de ces extrema. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = [0, 2\pi]\times[0, 2\pi]$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum et son maximum sur E. Autrement dit, il existe $(a,b), (c,d)\in E$ pour lesquels

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y) \text{ et } f(c,d) = \max_{(x,y)\in E} f(x,y).$$

Soit à présent $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. On sait qu'il existe un unique couple (u_1, v_1) de $[0,2\pi\,[\times[0,2\pi\,[$ et un unique couple (k_1,k_2) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $u = u_1+2k_1\pi$ et $v = v_1+2k_2\pi$. Par conséquent $f(a,b)\leq f(u,v) = f(u_1,v_1)\leq f(c,d)$. On a ainsi démontré que

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ et } f(c,d) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, on doit avoir $\nabla f(a,b) = \nabla f(c,d) = (0,0)$. Finalement, puisque les solutions dans E du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin x+\cos(x+y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y+\cos(x+y) = 0, \end{cases}$$

sont $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ et que de plus

$$f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = 0, f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ et } f\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

on peut conclure que $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

❸ Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = [-6,6]\times[-6,6]$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0,0)\in E, f(0,0) = 6$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash E : f(x,y) > 6$, on peut aussi écrire

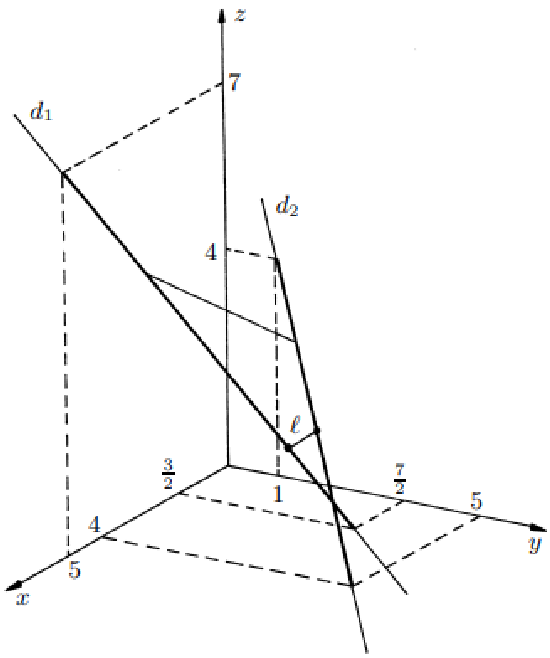
$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y).$$

La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, ce minimum est atteint en un de ses points stationnaires. Finalement, puisque l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(3x+y+2) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(2x+3y+4) = 0, \end{cases}$$

est $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}\right)$, on peut conclure que $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f\left(-\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}\right) = \frac{2}{7}$. Remarque : Géométriquement, ce problème revient à trouver la plus courte distance ℓ entre les deux droites gauches

$$d_1 = \{(2-t, 3+t, 1-2t) : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad d_2 = \{(1-t, 2-t, 3+t) : t \in \mathbb{R}\}.$$



❹ Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = \overline{B((0,0),2)}$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0,0) \in E, f(0,0) = 4$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash E$: $f(x,y) > 4$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y).$$

La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, ce minimum est atteint en un de ses points stationnaires. Finalement, puisque l'unique solution du système

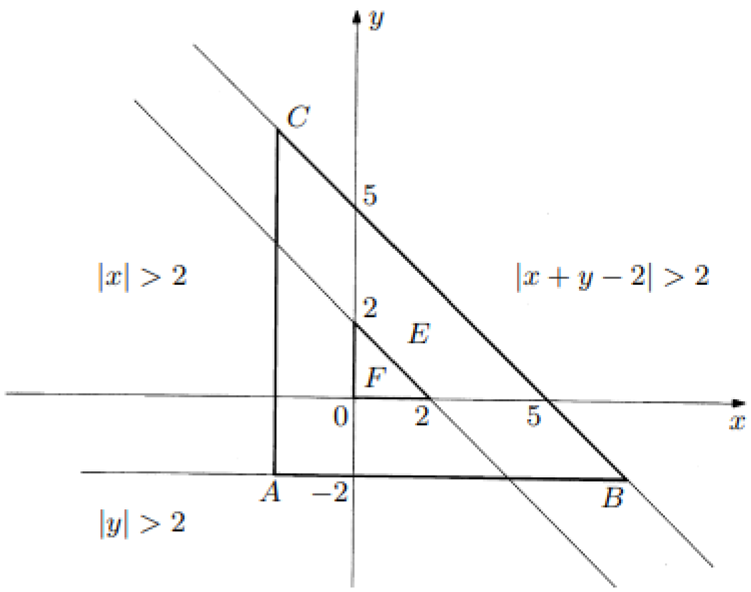
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(2x+y-2) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+2y-2) = 0 \end{cases}$$

est $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, on peut conclure que $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

❺ Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, désignons par E l'intérieur avec ses côtés du triangle rectangle de sommets $A = (-2,-2), B = (7,-2)$ et $C = (-2,7)$.

Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0,0) \in E$, $f(0,0) = 2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash E$: $f(x,y) > 2$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y).$$



Recherche de ce minimum.

1) Soit F l'intérieur du triangle rectangle délimité par les deux axes et la droite d'équation $x + y - 2 = 0$. Alors,

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) \in F.$$

De plus, dans F : $f(x,y) = 2$.

2) Sur l'axe Ox, la fonction f s'écrit $f(x,0) = |x| + |x-2|$. Par conséquent

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x,0) = f(t,0) = 2 \text{ avec } t \in [0,2].$$

3) Sur l'axe Oy, la fonction f s'écrit $f(0,y) = |y| + |y-2|$. Par conséquent

$$\min_{y\in\mathbb{R}} f(0,y) = f(0,t) = 2 \quad \text{avec } t \in [0,2].$$

4) Sur la droite d d'équation $x + y - 2 = 0$, la fonction f s'écrit $f(x, 2-x) = |x| + |2-x|$. Par conséquent

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x, 2-x) = f(t, 2-t) = 2 \quad \text{avec } t \in [0,2].$$

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 2$.

❻ Ce problème revient à trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sqrt{2}\left(\sqrt{x^2 - 6x + 25} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 - 12y + 40}\right).$$

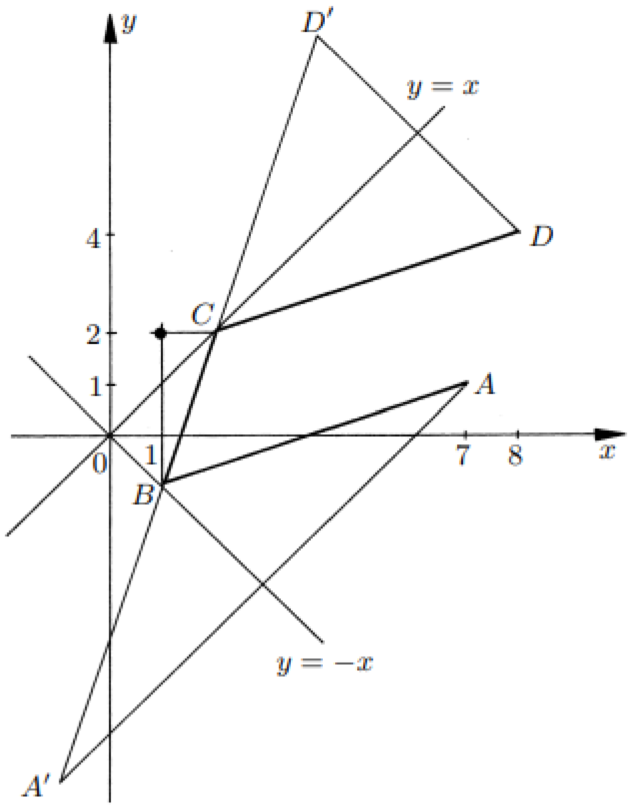
Pour commencer, montrons l'existence de ce minimum. Pour cela, considérons le sous-ensemble $E = \overline{B((0,0),12)}$. Puisqu'il est compact et que la fonction f est continue, elle atteint son minimum sur E. D'autre part, en constatant que $(0,0) \in E$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash E : f(x,y) > f(0,0)$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y).$$

La fonction f étant de classe $\mathbf{C}^1$, ce minimum est atteint en un de ses points stationnaires. Finalement, puisque l'unique solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{2}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+25}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{2}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y-6}{\sqrt{y^2-12y+40}}\right) = 0, \end{cases}$$

est $(1,2)$, on a $B = (1,-1)$ et $C = (2,2)$.



❼ 1) En effet, puisque pour tout $x \in \mathbb{R} : g_\alpha(x) = x^2(\alpha - x)(\alpha - 2x)$, la fonction g_α admet un minimum local en 0.
2) Non, car pour tout $x \neq 0 : f\left(x, \dfrac{3x^2}{2}\right) < f(0,0) = 0 < f\left(x, \dfrac{x^2}{2}\right)$.
❽ Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(t) = f(x = 5\operatorname{ch} t, y = 5\operatorname{sh} t) = \frac{25}{4}\left(3e^{2t} + e^{-2t}\right).$$

Ainsi, puisque pour tout $t \in \mathbb{R} : g'(t) = \frac{25}{2}e^{-2t}\left(3e^{4t} - 1\right)$, on a

$$\min_{t\in\mathbb{R}} g(t) = g\left(-\frac{\ln 3}{4}\right) = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

Finalement, en constatant que pour tout $(x,y) \in E$: $f(x,y) = f(-x,-y)$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = \min_{t\in\mathbb{R}} g(t) = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

❾ Soit $g : E = [0,1] \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(r,\theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) = \sqrt{2}\frac{r}{1+r^2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

Ainsi, en remarquant que sur $[0,1]$ la fonction $h(r) = \frac{r}{1+r^2}$ est strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \min_{(r,\theta)\in E} g(r,\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \max_{(r,\theta)\in E} g(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

❿ Soit $g : D = [2,3] \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la fonction auxiliaire définie par

$$g(r,\theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) = r\frac{\sin\theta}{1+\operatorname{cotg}\theta}.$$

Ainsi, en remarquant que sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $h(\theta) = \frac{\sin\theta}{1+\operatorname{cotg}\theta}$ est strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = \min_{(r,\theta)\in D} g(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \max_{(x,y)\in E} f(x,y) = \max_{(r,\theta)\in D} g(r,\theta) = 3.$$

Exercice 2.17.

1 Soit $f : \overline{B((0,0),2)} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \lim_{t\to 0}(\cos tx + y\sin tx)^{\frac{1}{2}}$$

1) Montrer que $f(x,y) = e^{xy}$.
2) Trouver les extrema de la fonction f.
2 Trouver les extrema de la fonction $f : \overline{B((2,0),2)} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \left|2\sqrt{x^2+y^2} - \left(x^2+y^2\right)\right|.$$

3 Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4x \leq 0\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln(1+x-y) + e^{-\frac{1}{1+x-y}}$$

4 Trouver les extrema de la fonction $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy(x-y)$$

sous la condition $x + y = 8$.
5 Trouver les extrema de la fonction $f : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \cos^2 x\sin^2 y + \sin^2 x\cos^2 y$$

sous la condition $\sin x \sin y = \frac{1}{2}$.

$\boxed{6}$ $f(x,y) = x+2y$. $\boxed{7}$ $f(x,y) = x^2-y^2+xy$. $\boxed{8}$ $f(x,y) = 4x^2+(x-y)^2-4xy+1$.

$\boxed{9}$ $f(x,y) = x(1+y)+\ln\sqrt{2+x^2+y^2}$. $\boxed{10}$ $f(x,y) = \operatorname{Arctg}(x^6+y^6+x^2+y^2+1)$.

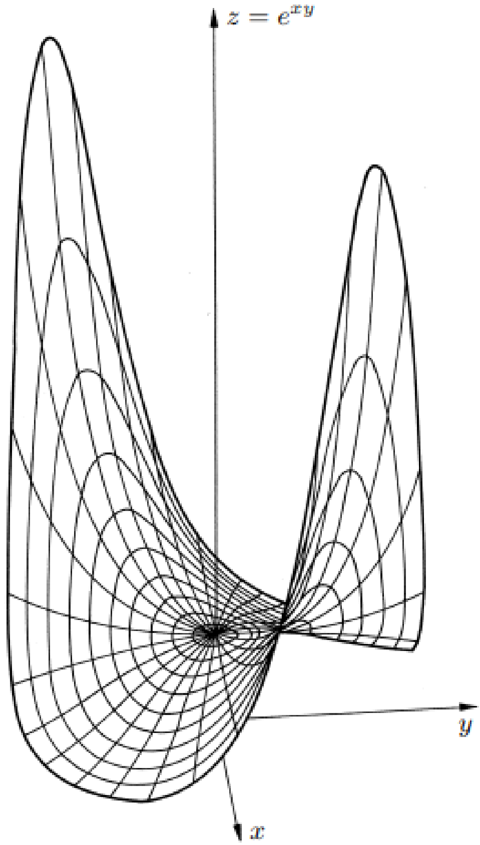
$\boxed{11}$ $f(x,y) = \ln\sqrt{2+x^4+y^4}$. $\boxed{12}$ $f(x,y) = \operatorname{Arctg} xy$.

Solution

$\boxed{1}$ 1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Ainsi, en constatant que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos tx + y\sin tx)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-x\sin tx + xy\cos tx}{\cos tx + y\sin tx} = xy,$$

on obtient bien que $f(x,y) = \lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(\cos tx+y\sin tx)}{t}} = e^{xy}$.



2) La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

- Si $(a,b) \in B((0,0),2)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = \left(be^{ab}, ae^{ab}\right) = (0,0), \Longleftrightarrow a = b = 0$$

et $f(0,0) = 1$.

- Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B((0,0),2)$ et considérons la fonction auxiliaire $g : [0,2\pi[\to \mathbb{R}$ définie par $g(\theta) = f(x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta) = e^{2\sin 2\theta}$. Alors,

$$\min_{(x,y)\in\partial B((0,0),2)} f(x,y) = \min_{0\le\theta<2\pi} g(\theta) = e^{-2},$$

$$\max_{(x,y)\in\partial B((0,0),2)} f(x,y) = \max_{0\le\theta<2\pi} g(\theta) = e^{2}.$$

Finalement, $\min\limits_{(x,y)\in\overline{B((0,0),2)}} f(x,y) = e^{-2}$ et $\max\limits_{(x,y)\in\overline{B((0,0),2)}} f(x,y) = e^{2}$.

$\boxed{2}$ En remarquant que $\left\{t=\sqrt{x^2+y^2} : (x,y)\in\overline{B((2,0),2)}\right\} = [0,4]$, ce problème revient tout simplement à trouver les extrema de la fonction $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} 2t-t^2 & \text{si } 0\le t<2 \\ t^2-2t & \text{si } 2\le t\le 4. \end{cases}$$

D'où

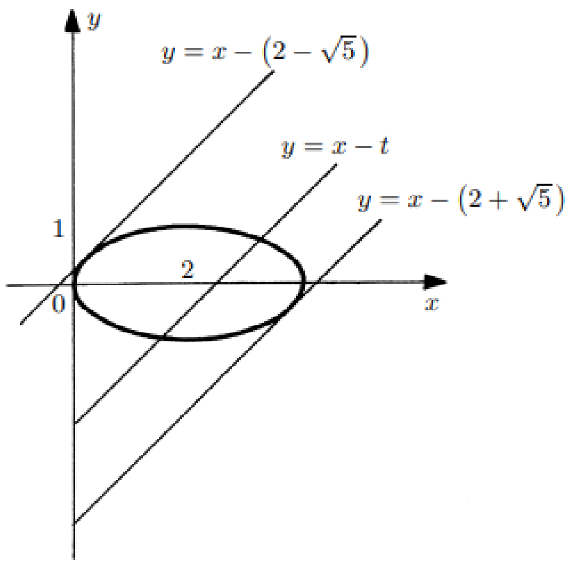
$$\min_{(x,y)\in\overline{B((2,0),2)}} f(x,y) = \min_{0\le t\le 4} g(t) = 0,$$
$$\max_{(x,y)\in\bar{B}((2,0),2)} f(x,y) = \max_{0\le t\le 4} g(t) = 8.$$

$\boxed{3}$ Pour tout $t\in\mathbb{R}$, désignons par d_t la droite d'équation $y=x-t$. Ainsi, puisque

$$E\cap d_t\neq\emptyset \iff -t^2+4t+1\ge 0 \iff 2-\sqrt{5}\le t\le 2+\sqrt{5},$$

et la fonction $g(t)=\ln(1+t)+e^{-\frac{1}{1+t}}$ strictement croissante sur $]-1,+\infty[$, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = g(2-\sqrt{5}) = \ln(3-\sqrt{5}) + e^{-\frac{1}{3-\sqrt{5}}},$$
$$\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = g(2+\sqrt{5}) = \ln(3+\sqrt{5}) + e^{-\frac{1}{3+\sqrt{5}}}.$$



$\boxed{4}$ Posons $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=8, x,y>0\}$. Alors, les extrema de la fonction f sur E sont les mêmes que ceux de la fonction $g :]0,8[\to\mathbb{R}$ définie par $g(t)=f(t,8-t)=2t(8-t)(t-4)$. Par conséquent

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = g\left(4-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{256}{3\sqrt{3}},$$
$$\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = g\left(4+\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{256}{3\sqrt{3}}.$$

$\boxed{5}$ Posons $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sin x\sin y=\frac{1}{2}, 0\le x,y\le\pi\right\}$. Alors, en constatant que la condition $\sin x\sin y=\frac{1}{2}$ avec $0\le x,y\le\pi$ est équivalente à $y=\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2\sin x}$ ou $\pi-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2\sin x}$

avec $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$, les extrema de la fonction f sur E sont les mêmes que ceux de la fonction $g : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{cotg}^2 t - 1\right) + \sin^2 t.$$

Par conséquent $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = \frac{1}{2}$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = \frac{3}{4}$.

$\boxed{6}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. En constatant que $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$, on a $(a,b) \in \partial B((0,0),1)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ainsi, puisque $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda a = 0 \\ \\ 2 + 2\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 2a.$$

Par conséquent

$$\min_{(x,y)\in B((0,0),1)} f(x,y) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5},$$
$$\max_{(x,y)\in \overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}.$$

$\boxed{7}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in B((0,0),1)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (2a + b, a - 2b) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0,$$

et $f(0,0) = 0$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B((0,0),1)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$.
D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)a + b = 0 \\ \\ a + 2(-1+\lambda)b = 0, \end{cases}$$

ce qui entraine, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(1+\lambda) & 1 \\ 1 & 2(-1+\lambda) \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

- $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. Alors, $b = (\sqrt{5} - 2)a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}}\right) \text{ et } f(a,b) = \frac{-10 + 5\sqrt{5}}{10 - 4\sqrt{5}}.$$

- $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Alors, $b = -(\sqrt{5} + 2)a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}, \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5}}}\right) \text{ et } f(a,b) = -\frac{10 + 5\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = -\frac{10+5\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} \text{ et } \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{-10+5\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}.$$

$\boxed{8}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b)\in B((0,0),1)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (10a-6b, -6a+2b) = (0,0) \Longleftrightarrow a=b=0.$$

$f(0,0)=0$.

2) Supposons à présent que $(a,b)\in\partial B((0,0),1)$ et posons $g(x,y)=x^2+y^2-1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b)\neq(0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f+\lambda g)(a,b)=(0,0)$.
D'où

$$\begin{cases} 2(\lambda+5)a-6b=0 \\ -6a+2(\lambda+1)b=0, \end{cases}$$

ce qui entraine, puisque $(a,b)\neq(0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(\lambda+5) & -6 \\ -6 & 2(\lambda+1) \end{pmatrix} = 4\lambda^2+24\lambda-16=0 \Longleftrightarrow \lambda=-3\pm\sqrt{13}$$

- $\lambda=-3-\sqrt{13}$. Alors, $b=\frac{2-\sqrt{13}}{3}a$. Ainsi, puisque $g(a,b)=0$, on a

$$(a,b)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}}, \frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt{26-4\sqrt{13}}}\right) \text{ et } f(a,b)=\frac{27+14\sqrt{13}}{26-4\sqrt{13}}.$$

- $\lambda=-3+\sqrt{13}$. Alors, $b=\frac{2+\sqrt{13}}{3}a$. Ainsi, puisque $g(a,b)=0$, on a

$$(a,b)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{26+4\sqrt{13}}}, \frac{2+\sqrt{13}}{\sqrt{26+4\sqrt{13}}}\right) \text{ et } f(a,b)=\frac{27-14\sqrt{13}}{26+4\sqrt{13}}.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{27-14\sqrt{13}}{26+4\sqrt{13}} \text{ et } \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{27+14\sqrt{13}}{26-4\sqrt{13}}.$$

$\boxed{9}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema.
Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) $(a,b)\notin B((0,0),1)$ car

$$\nabla f(a,b) = \left(1+b+\frac{a}{2+a^2+b^2}, a+\frac{b}{2+a^2+b^2}\right) \neq (0,0).$$

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $\nabla f(a,b)=\mathbf{0}$. Alors, $a^2=b(b+1)$. Comme de plus $a^2+b^2<1$, on aurait $0\leq|a|,b<1$; ce qui entraînerait que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 1+b+\frac{a}{2+a^2+b^2} > \frac{1}{2}.$$

D'où contradiction.

2) Par conséquent $(a,b) \in \partial B((0,0),1)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla\left(f_1 + \lambda g\right)(a,b) = (0,0)$ avec $f_1(x,y) = x(1+y) + \frac{\ln 3}{2}$ ($f = f_1$ sur $\partial B((0,0),1)$). D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 2\lambda a + b = 0 \\ \\ a + 2\lambda b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow a^2 = b(1+b).$$

Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $(a,b) = (0,-1)$ ou $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et

$$f_1(0,1) = \frac{\ln 3}{2}, \quad f_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2},$$
$$f_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2}.$$

En conclusion,

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2} \text{ et } \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\ln 3}{2}.$$

$\boxed{10}$ 1) Pour commencer, on va trouver les extrema de la fonction auxiliaire $h : \overline{B((0,0),1)} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = x^6 + y^6 + x^2 + y^2 + 1$. Cette fonction étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

$$\nabla h(a,b) = \left(2a\left(1 + 3a^4\right), 2b\left(1 + 3b^4\right)\right) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0,$$

et $h(0,0) = 1$.
2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B((0,0),1)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla\left(h_1 + \lambda g\right)(a,b) = (0,0)$ avec $h_1(x,y) = x^6 + y^6 + 2$ ($h = h_1$ sur $\partial B((0,0),1)$). D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 2a\left(3a^4 + \lambda\right) = 0 \\ \\ 2b\left(3b^4 + \lambda\right) = 0. \end{array}\right.$$

Ainsi,

- $ab = 0$. Alors, puisque $g(a,b) = 0$, on a $(a,b) = (0,\pm 1)$ ou $(\pm 1, 0)$ et $h(a,b) = h_1(a,b) = 3$.
- $ab \neq 0$. Alors, $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ et $h(a,b) = h_1(a,b) = \frac{9}{4}$.

Finalement, puisque la fonction Arctg est une fonction strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \text{Arctg}1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \text{Arctg}3.$$

$\boxed{11}$ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in B((0,0),1)$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{2a^3}{2 + a^4 + b^4}, \frac{2b^3}{2 + a^4 + b^4}\right) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0,$$

et $f(0,0) = \frac{\ln 2}{2}$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B((0,0),1)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$.
D'où

$$\begin{cases} 2a\left(\dfrac{a^2}{2+a^4+b^4} + \lambda\right) = 0 \\ \\ 2b\left(\dfrac{b^2}{2+a^4+b^4} + \lambda\right) = 0. \end{cases}$$

Ainsi,

- $ab = 0$. Alors, puisque $g(a,b) = 0$, on a $(a,b) = (0,\pm 1)$ ou $(\pm 1, 0)$ et $f(a,b) = \frac{\ln 3}{2}$.
- $ab \neq 0$. Alors, $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$ et $f(a,b) = \frac{\ln \frac{5}{2}}{2}$.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{\ln 2}{2}$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \frac{\ln 3}{2}$.

$\boxed{12}$ 1) Pour commencer, on va trouver les extrema de la fonction auxiliaire $h : \overline{B((0,0),1)} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = xy$. Cette fonction étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points.
Alors,

$$\nabla h(a,b) = (b,a) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0,$$

et $h(0,0) = 1$.
2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial B((0,0),1)$ et posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(h + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2\lambda a + b = 0 \\ \\ a + 2\lambda b = 0, \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$

- $\lambda = -\frac{1}{2}$. Alors, $b = a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

et $h(a,b) = \frac{1}{2}$.
- $\lambda = \frac{1}{2}$. Alors, $b = -a$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$(a,b) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

et $h(a,b) = -\frac{1}{2}$.

Finalement, puisque la fonction Arctg est une fonction strictement croissante, on peut écrire

$$\min_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = -\operatorname{Arctg}\frac{1}{2} \text{ et } \max_{(x,y)\in\overline{B((0,0),1)}} f(x,y) = \operatorname{Arctg}\frac{1}{2}.$$

<u>Exercice</u> 2.18.

❶ **Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 + 2x - 1 \le 0\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = -x + y + 2.$$

❷ **Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + (y-1)^2 \le 1\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = 3x^2 + y^2.$$

❸ **Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 4\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

❹ **Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \le 1\right\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = x + x^2 + y^2.$$

❺ **Trouver le minimum de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = x^2 + 6y^2$$
sous la condition $x^2 + 3\sqrt{2}xy \ge 1$.

❻ **Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = \int_x^y te^{-t^2}dt$$
sous la condition $e^{x^2} + e^{y^2} = 8$.

Solution

❶ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) $(a,b) \notin \overset{\circ}{E}$ car $\nabla f(a,b) = (-1,1) \neq (0,0)$.
2) Par conséquent $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où
$$\begin{cases} -1 + 2\lambda(a+1) = 0 \\ \\ 1 + 4\lambda b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + 1 = -2b;$$
ce qui entraîne, puisque $g(a,b) = 0$, que
$$(a,b) = \left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ ou } \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
et
$$f\left(-1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 + \sqrt{3} \text{ et } f\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 - \sqrt{3}.$$

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = 3 - \sqrt{3}$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = 3 + \sqrt{3}$.

❷ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) $(a,b) \notin \overset{\circ}{E}$ car $\nabla f(a,b) = (6a, 2b) \neq (0,0)$.
2) Par conséquent $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = 9x^2 + (y-1)^2 - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où
$$\begin{cases} 6a(1 + 3\lambda) = 0 \\ \\ 2b + 2\lambda(b-1) = 0 \end{cases}$$

- $\lambda = \frac{-1}{3}$. Alors, $b = -\frac{1}{2}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $9a^2 = -\frac{5}{4}$; ce qui est impossible. Ce cas est donc à rejeter.
- $\lambda \neq -\frac{1}{3}$. Alors, $a = 0$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $b = 0$ ou 2.

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,0) = 0$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,2) = 4$.

❸ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si $(a,b) \in \overset{\circ}{E}$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (2a+b, a+4b) = (0,0) \Longleftrightarrow a = b = 0,$$

et $f(0,0) = 0$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla\left(f_1 + \lambda g\right)(a,b) = (0,0)$ avec $f_1(x,y) = 4 + xy$ ($f_1 = f$ sur ∂E). D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 2\lambda a + b = 0 \\ \\ a + 4\lambda b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow a^2 = 2b^2.$$

Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $(a,b) = \pm(-\sqrt{2}, 1)$ ou $\pm(\sqrt{2}, 1)$ et $f_1(a,b) = 4 \pm \sqrt{2}$.

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = 0$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = 4 + \sqrt{2}$.

❹ La fonction f étant continue sur un compact, elle atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points. Alors,

1) Si$(a,b) \in \overset{\circ}{E}$, on doit avoir

$$\nabla f(a,b) = (1+2a, 2b) = (0,0) \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = 0,$$

et $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

2) Supposons à présent que $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1$.
Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{25}\right) a = 0 \\ \\ 2b\left(1 + \frac{\lambda}{16}\right) = 0. \end{array}\right.$$

- $b = 0$. Alors, puisque $g(a,b) = 0$, on a $|x| = 5$. D'où $f(-5,0) = 20$ et $f(5,0) = 30$.
- $b \neq 0$. Alors, $\lambda = -16$ et $a = -\frac{25}{18}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a

$$b^2 = 16\left(1 - \frac{25}{18^2}\right) \text{ et } f(a,b) = -\frac{25}{18} + \frac{25^2}{18^2} + 16\left(1 - \frac{25}{18^2}\right).$$

En conclusion, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = -\dfrac{1}{4}$ et $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = 30$.

❺ Posons $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3\sqrt{2}xy \geq 1\right\}$ et montrons que la restriction de la fonction f

à E atteint son minimum. Pour cela, posons $E_1 = E \cap \overline{B((0,0),1)}$. Puisque E_1 est compact et f continue, il existe $(a,b) \in E_1$ pour lequel on a

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E_1} f(x,y).$$

Ainsi, en constatant que $f(a,b) \leq f(1,0) = 1$ car $(1,0) \in E_1$ tandis que pour tout $(x,y) \in E\backslash E_1 : f(x,y) \geq x^2 + y^2 > 1$, on peut écrire

$$f(a,b) = \min_{(x,y)\in E} f(x,y).$$

1) $(a,b) \notin \overset{\circ}{E}$ car $\nabla f(a,b) = (2a, 12b) \neq (0,0)$.
2) Par conséquent $(a,b) \in \partial E$ et posons $g(x,y) = x^2 + 3\sqrt{2}xy - 1$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)a + 3\sqrt{2}\lambda b = 0 \\ \\ 3\sqrt{2}\lambda a + 12b = 0, \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $(a,b) \neq (0,0)$, que

$$\det\begin{pmatrix} 2(1+\lambda) & 3\sqrt{2}\lambda \\ 3\sqrt{2}\lambda & 12 \end{pmatrix} = -18\lambda^2 + 24\lambda + 24 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \text{ ou } 2.$$

- $\lambda = -\frac{2}{3}$. Alors, $b = \frac{a}{3\sqrt{2}}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $2a^2 = 1$ et $f(a,b) = \frac{2}{3}$.
- $\lambda = 2$. Alors, $b = -\frac{a}{\sqrt{2}}$. Ainsi, puisque $g(a,b) = 0$, on a $-2a^2 = 1$; ce qui est impossible. Ce cas est donc à exclure.

En conclusion, $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = \frac{2}{3}$.

❻ Pour commencer, notons que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \int_x^y te^{-t^2}dt = -\left.\frac{e^{-t^2}}{2}\right|_x^y = \frac{1}{2}\left(e^{-x^2} - e^{-y^2}\right),$$

et posons $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{x^2} + e^{y^2} = 8\right\}$. Puisque f est continue sur le compact E, sa restriction à E atteint ses extrema. Désignons par (a,b) un de ces points et posons $g(x,y) = e^{x^2} + e^{y^2} - 8$. Ainsi, en constatant que $\nabla g(a,b) \neq (0,0)$, on sait, d'après le théorème de Lagrange, qu'il existe un scalaire λ de sorte que $\nabla(f + \lambda g)(a,b) = (0,0)$. D'où

$$\begin{cases} -a\left(e^{-a^2} - 2\lambda e a^2\right) = 0 \\ \\ b\left(e^{-b^2} + 2\lambda e b^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0;$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(a,0) = -\frac{3}{7} \text{ et } \max_{(x,y)\in E} f(x,y) = f(0,b) = \frac{3}{7}.$$

Chapitre 3

Intégrales impropres

Exercice 3.1. **Calculer**

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1} t\ln t dt.$

❷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$

❸ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+6t+10}.$

❹ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{3t-1}{t\left(4t^2+1\right)}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

❻ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}.$

❼ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{t}{\sqrt{t-1}}dt.$

❽ $\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}.$

❿ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt[3]{\left(1+t^2\right)^2}}dt.$

Solution

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1} t\ln t dt = \frac{t^2}{2}\ln t\Big|_{0+}^{1} - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} t dt = -\frac{1}{4}.$

❷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctg} t\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$

❸ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+6t+10} = \operatorname{Arctg}(t+3)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$

❹ $\forall x>1:$

$$\int_{1}^{x} \frac{3t-1}{t\left(4t^2+1\right)}dt = 3\int_{1}^{x}\frac{dt}{4t^2+1} - \int_{1}^{x}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_{1}^{x}\frac{8t}{4t^2+1}dt$$
$$= \frac{3}{2}\operatorname{Arctg}(2t)\Big|_{1}^{x} + \ln\left(\frac{\sqrt{4t^2+1}}{t}\right)\Bigg|_{1}^{x}$$
$$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{3t-1}{t\left(4t^2+1\right)}dt = \ln\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} 2\right).$$

❺ $\displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin} t\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}.$

❻ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = 2\sqrt{t-1}\Big|_{3}^{2} = 2.$

❼ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{t}{\sqrt{t-1}}dt = \int_{1+}^{2}\left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{(t-1)^3}}{3} + \sqrt{t-1}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

❽ $$\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2+1} = 2\,\mathrm{Arcsin}\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

❾ $$\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2+1} = 2\,\mathrm{Arcsin}\, s\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

❿ $$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt[3]{(1+t^2)^2}}dt = \frac{3}{2}\sqrt[3]{1+t^2}\Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

Exercice 3.2. Calculer

❶ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$.

❷ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$.

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{(t+2)\sqrt{3t-t^2}}$.

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t(1-t)}}$.

❺ $\displaystyle\int_{1+}^{2-} \frac{t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}dt$.

❻ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}$.

❼ $\displaystyle\int_1^{e-} \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$.

❽ $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1-} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$.

❾ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$.

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln t\,dt$.

Solution

❶ $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+s^2}} = \ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

❷ $$\int_1^{tx} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{s^2+s+1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= \ln\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{s^2+s+1}\right)\Bigg|_0^1 = \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

❸ $$\int_{0+}^{1} \frac{dx}{(t+2)\sqrt{tt-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^2-\left(s-\frac{7}{20}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{20s-7}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{9}\right).$$

❹ $$\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t(1-t)}} = \int_{1+}^{2} \frac{dx}{\sqrt{s-1}} = 2\sqrt{s-1}\Big|_1^2 = 2.$$

❺ $$\int_{1+}^{2-} \frac{t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}dt = \int_{1+}^{2-} \frac{\left(t-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2}}dt$$

$$= \left(-\sqrt{(t-1)(2-t)}+\frac{3}{2}\,\mathrm{Arcsin}(2t-3)\right)\Bigg|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

❻ $$\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = 2\,\mathrm{Arctg}\, s\Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

❼ $\displaystyle\int_1^{e-} \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}} = \int_0^{1-} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \operatorname{Arctg} s\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

❽ $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1-} \frac{\ln t}{\sqrt{1-l}}dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(1-s^2\right)ds$

$$= 2\left(s\ln\left(1-s^2\right)\big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(1-s^2\right)-1}{1-s^2}ds\right)$$

$$= \ln\frac{3}{4} - 2 + 2\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -2 + \ln\frac{27}{4}.$$

❾ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} se^{-s}ds = 2\left(-se^{-s}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-s}ds\right) = 2.$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \ln t dt = t(\ln t - 1)\Big|_{0+}^1 = -1.$

Exercice 3.3. Calculer

❶ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt.$

❷ $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2e^{-t}dt.$

❸ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht}.$

❹ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{Arctgt}{1+t^2}dt.$

❺ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctge } t}{t^2}dt.$

❻ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{4+tg^2t}.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$

❽ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}.$

❾ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^4+1}dt.$

❿ $\displaystyle\int_0^{t+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt.$

Solution

❶ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt = -\frac{\ln t}{t}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$

❷ $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = -\ t^2e^{-t}\big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-1}dt$

$$= -2te^{-t}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 2.$$

❸ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+\left(e^t\right)^2}dt 2\operatorname{Arctg} e^t\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

❹ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{1+t^2}dt = \frac{\operatorname{Arctg}^2 t}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}.$

❺ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^2}dt = -\ \frac{\operatorname{Arctg} t}{t}\Bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)}$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

❻ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{4+\operatorname{tg}^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\left(4+s^2\right)\left(1+s^2\right)} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+s^2} - \frac{1}{4+s^2}\right)ds$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{Arctg} s - \frac{\operatorname{Arctg}\frac{s}{2}}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{12}.$$

❼ 1) $\forall t \geq 1 : 0 \leq \dfrac{\ln t}{1+t^2} = \dfrac{2\ln\sqrt{t}}{1+t^2} < \dfrac{2}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt = -\lim_{x\to 0+} \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln s}{1+s^2}ds = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln s}{1+s^2}ds.$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = \int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0.$

❽ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}t-1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}t+1)\right)\Bigg|_0^{+\infty}$
$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

❾ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^4+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(t^2)^2+1}dt$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} s\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$

❿ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{s^2}+1}\frac{-1}{s^2}ds = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

<u>Exercice</u> 3.4. Calculer

❶ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{t^4+1}dt.$

❷ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^4 t + \sin^4 t}.$

❸ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\cos^4 t - \sin^4 t}.$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt.$

❺ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n},\ n \geq 2.$

❻ $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1}dt}{\displaystyle\int_0^z \frac{3t^3+4t}{t^4+1}dt}.$

Solution

❶ Diverge car $\lim\limits_{1\to+\infty} t\frac{t^3}{t^4+1} = 1.$

❷ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \int_0^{+\infty} \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t\,(1+\operatorname{tg}^4 t)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1+s^2}{1+s^4}ds = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

❸ Diverge, En effet,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\cos^4 t - \sin^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\cos 2t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin 2t}{\cos 2t}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}-} = +\infty.$$

❹ Puisque pour tout $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$: $\ln(\sin t) = \ln\frac{\sin t}{t} + \ln t$, l'intégrale généralisée $\int_0^2 \ln(\sin t)dt$ converge. De plus,

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt = \int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\cos s)ds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt &= \frac{1}{2}\left(\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\cos t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) dt = \frac{1}{4}\int_{0+}^{\pi-} \ln\left(\frac{\sin r}{2}\right) dr \\
&= \frac{1}{4}\int_{0+}^{\pi-} \ln(\sin r)dr - \frac{\pi \ln 2}{4} \\
&= \frac{1}{2}\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin r)dr - \frac{\pi \ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\sin t)dt = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$

❺ En faisant le chagement de variable $t = \operatorname{tg} s$ et en utilisant l'exercice 6.137, on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \cos^{2(n-1)} s ds = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

❻

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} t\frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1} = 2 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} t\frac{3t^3+4t}{t^4+1}dt = 3 \\
&\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1}dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{3t^3+4t}{t^4+1}dt = +\infty.
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1}dt}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t^3+4t}{t^4+1}dt} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^4+1}}{\dfrac{3x^3+4x}{x^6+1}} = \frac{2}{3}.$

Exercice 3.5.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{3+}^{4} \frac{dt}{\sqrt{\ln(t-2)}}.$ ❷ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \cos\frac{1}{t}dt.$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)}dt.$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t\ln t}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt{t}}{t\ln t}dt.$ ❻ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh}t}{\sqrt{\operatorname{Argth}t}}dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{e^t-1}.$

Solution

❶ $\displaystyle\lim_{t\to 3+} \sqrt{t-3}\frac{1}{\sqrt{\ln(t-2)}} = 1 \Rightarrow \int_{3+}^{4} \frac{dt}{\sqrt{\ln(t-2)}}$ converge.

❷ $\forall t \in [0,1] : \left|\cos \frac{1}{t}\right| < 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{t} \cos \frac{1}{t} dt$ converge.

❸ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)} = \frac{-1}{\sin 1} \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{th\,(t-t^2)}{t\sin(t-1)} dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \frac{th\,(t-t^2)}{t\sin(t-1)} = -1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{t\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)} dt$ converge.

❹ $\displaystyle\lim_{t\to 1-} (1-t)\frac{\sin t}{t\ln t} = -\sin 1 \Rightarrow \int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t\ln t} dt$ diverge.

❺ $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\frac{\sin\sqrt{t}}{t\ln t} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt{t}}{t\ln t} dt$ converge.

❻ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1} \sqrt{1-t}\frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} = \operatorname{sh} 1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt[t]{\ln\frac{1}{t}}} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\ln\frac{1}{t}}} dt$ converge.

❼ $\forall t \in [0,1] : 0 < \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$ converge.

❽ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \sqrt{1-t}\frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} = 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} dt$ converge.

❾ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{sh}t}{\sqrt{\operatorname{Argth}t}} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sh}t}{\sqrt{\operatorname{Argth}t}} dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \frac{\operatorname{sh}t}{\sqrt{\operatorname{Argth}t}} = 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\operatorname{sh}t}{\sqrt{\operatorname{Argth}t}} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth}t}} dt$ converge.

❿ $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t\frac{1}{e^t-1} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{1}{e^t-1} dt$ diverge.

<u>Exercice</u> 3.6.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$ ❷ $\displaystyle\int_{2+}^{3} \frac{\ln(t-1)}{t-2} dt.$

❸ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}.$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}} dt$ ❻ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{1-e^{\cos t}}.$

❼ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}\,dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t}\,dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{tg} t}{t}\,dt.$

Solution

❶ Converge, car pour tout $t \in]0,1]$: $\ln(\sin t) = \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \ln t$.

❷ $\displaystyle\lim_{t\to 2_+} \frac{\ln(t-1)}{t-2} = 1 \Rightarrow \int_{2+}^{3} \frac{\ln(t-1)}{t-2}\,dt$ converge.

❸ $\displaystyle\lim_{t\to 1+} \sqrt{t-1}\frac{1}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$ converge.

❹ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{t-t^5}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \sqrt{1-t}\frac{1}{\sqrt{t-t^5}} = \frac{1}{2} \to \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}$ converge.

❺ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \sqrt{1-t}\frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}} = \sin 1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}$ converge.

❻ $\displaystyle\lim_{t\to \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{1}{1-e^{\cos t}} = -1 \Rightarrow \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{1-e^{\cos t}}$ diverge.

❼ $\displaystyle\forall t \geq 1 : \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}} \geq \frac{1}{t} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}\,dt$ diverge.

❽ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{\ln(1+t)} = 1 \to \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}\,dt$ converge.

❾ $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

❿ $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1, \int_{0+}^{l} \frac{\operatorname{tg} t}{t}\,dt$ converge.

Exercice 3.7.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt.$ ❷ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}dt.$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$ ❹ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin\frac{1}{t}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\sin\frac{1}{t}dt.$ ❻ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin e^{-t}dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-t}\ln t dt.$

❾ $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}.$ ❿ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$

Solution

❶ $\forall t \in]0,1] : \left|\sin\frac{1}{\sqrt{t}}\right| < \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge.

❷ 1) $\forall t \in]0,1] : \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}\right| < \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}\right| < \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}dt$ converge.

❸ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ converge.

❹ $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} t\sin\frac{1}{t} = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \sin\frac{1}{t}dt$ diverge.

❺ $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} t\sin\frac{1}{t} = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} t\sin\frac{1}{t}dt$ diverge.

❻ $\forall t \geq 1 : \left|\frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\right| < \frac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}dt$ converge.

❼ $\forall t \geq 0 : 0 < \sin e^{-t} < e^{-t} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin e^{-t}dt$ converge.

❽ $\forall t \geq 1 : 0 < e^{-t}\ln t < \frac{6}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$ converge.

❾ $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t} = \left.\frac{-1}{\ln t}\right|_{4}^{+\infty} = \frac{1}{2\ln 2}.$

❿ $\forall t \geq 1 : 0 < \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) < \frac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{f^2}\right)dt$ converge.

<u>Exercice</u> 3.8.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln t}{(1+\ln^2 t)\sqrt{t^2+1}}dt.$

❷ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t+\sin t}dt.$

❸ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t^2-1}dt.$

❹ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+5}}.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt..$

❻ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{sht}}.$

❽ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t^2 dt$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}dt.$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t}dt.$

$\boxed{\text{Solution}}$

❶ Puisque

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{\ln t}}{\left(1+\frac{1}{\ln^2 t}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = 1.$$

$$\exists\alpha > 1 \text{ tel que } \forall t \geq \alpha : \frac{1+\frac{1}{\ln t}}{\left(1+\frac{1}{\ln^2 t}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} > \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $t \geq \alpha$: $\dfrac{1+\ln t}{(1+\ln^2 t)\sqrt{t^2+1}} > \frac{1}{2t\ln t}$. Par conséquent l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln t}{(1+\ln^2 t)\sqrt{t^2+1}}dt \text{ diverge .}$$

❷ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t-\sin t}{t+\sin t} = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t+\sin t}dt$ diverge.

❸ $\displaystyle\forall t > 1 : \left|\frac{\sqrt{t}\sin t}{t^2-1}\right| \leq \frac{\sqrt{t}}{t^2-1} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t^2-1}dt$ converge.

❹ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{1}{t+\sqrt{t^2+5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+5}}$ diverge.

❺ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0_+} \sqrt{t}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall t \geq 1 : 0 < \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-1t} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

❻ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}} = 0 = \int_{0+}^1 \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall t \geq 1 : 0 < \frac{t}{\sqrt{e^t-1}} < \frac{\sqrt{6!}}{t^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}dt$ convenge.

❼ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{\text{sht}}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^1 \frac{dt}{\sqrt{\text{sht}}}$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{1}{\sqrt{\text{sh}t}} < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^t - 1}} < \dfrac{4\sqrt{3}}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{\sqrt{\text{sh}}}$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\alpha} \dfrac{dt}{\sqrt{\text{sh}t}}$ converge.

❽ $\forall t \geq 1 : 0 < \left|\frac{\cos t^2}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t^2} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t^2 dt = -\left.\dfrac{\cos t^2}{2t}\right|_1^{+\infty} - \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t^2}{2t^2} dt$ converge.

❾ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}} \dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{2} \dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln 1 + t)} dt$ converge.

2) $\forall t \geq 2 : \left|\dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)}\right| < \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+t)} dt$ converge.

❿ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \dfrac{\sin(1-\text{ch}t)}{t\,\text{sh}\,t} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \dfrac{\sin(1-\text{ch}t)}{t\,\text{sh}\,t} dt$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \left|\dfrac{\sin(1-\text{ch}\,t)}{t\,\text{sh}\,t}\right| < \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(1-\text{ch}\,t)}{t\,\text{sh}\,t} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\sin(1-\text{ch}\,t)}{t\,\text{sh}\,t} dt$ converge.

Exercice 3.9.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \dfrac{t^2+8}{t^4-t^2} dt.$ ❷ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\text{ch}\,t\sqrt{\text{lnt}}} dt.$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{\text{sh}\,t}} dt.$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}} dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\ln(\text{ch}\,t)}{\text{sh}\,t} dt.$ ❻ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,t^2\right) dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\text{Arctg}^3 t}{t^3} \ln(\text{ch}\,t) dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{\text{Arctg}^3 t}{t\ln(cht)} dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}} dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \dfrac{dt}{\sqrt{t^4-1}}.$

Solution

❶ $\displaystyle\lim_{t\to 1+} (t-1)\dfrac{t^2+8}{t^4-t^2} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \dfrac{t^2+8}{t^4-t^2} dt$ diverge.

❷ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 1+} \sqrt{t-1}\dfrac{\sin t}{\text{ch}\,t\sqrt{\ln t}} = \dfrac{\sin 1}{\text{ch}\,1} \Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{2} \dfrac{\sin t}{\text{ch}\,t\sqrt{\ln t}} dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\text{ch}\,t\sqrt{\ln t}} dt$ converge (criterre de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\text{ch}\,t\sqrt{\ln t}} dt$ converge.

❸ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0_+} \sqrt{t}\dfrac{\sin t}{\sqrt{\text{sh}\,t}} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \dfrac{\sin t}{\sqrt{\text{sh}\,t}} dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet). D'où

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}dt \text{ converge.}$$

❹ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{t} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}dt$ converge.

2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}dt$ converge (critère de Abel-Dirichlet).

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}dt$ converge.

❺ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\sin t}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : \ln(\operatorname{ch} t) = \ln\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right) < t$ et $\operatorname{sh} t = \frac{e^t-e^{-t}}{2} > \frac{e^t-1}{2} > \frac{t^3}{12}$

$$\Rightarrow \forall t \geq 1 : 0 < \frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t} < \frac{12}{t^2} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}dt$ converge.

❻ $\displaystyle\lim_{t\to +\infty} t^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} t^2\right) = \lim_{t\to +\infty} \frac{\operatorname{Arctg} \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctat}^2\right) dt \text{ converge.}$$

❼ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3} \ln(\operatorname{ch} t) = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3} \ln(\operatorname{ch} t)dt$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : \ln(\mathrm{ch}t) = \ln\left(\dfrac{e^2+e^{-t}}{2}\right) < t$

$$\forall t \geq 1 : 0 < \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3} \ln(\operatorname{ch} t) < \frac{\pi^3}{8t^2}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3} \ln(\mathrm{ch}t)dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3} \ln(\mathrm{ch}f)dt$ converge.

❽ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)} = 2 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\operatorname{ch} t)}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : \ln(\operatorname{ch} t) = \ln\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right) > t - \ln 2$

$$\Rightarrow \forall t \geq 1 : 0 < \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\mathrm{ch}t)} < \frac{\pi^3}{8t(t-\ln 2)} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(\mathrm{ch}t)}dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln\left(\mathrm{ch}t\right)}dt$ converge.

❾ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 1+} \sqrt{t}\frac{e^{-1}}{\sqrt{\ln(1+t)}} = 1 = \int_{0+}^{2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall t \geq 2 > 0 < \frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}} < e^{-t} \Rightarrow \int_{2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}dt$ converge.

❿ 1) $\lim\limits_{t\to 1+} \sqrt{t-1}\frac{1}{\sqrt{t^4-1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\dfrac{1}{\sqrt{t^4-1}} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$ converge.

D'où $\int_{1+}^{+\infty} \frac{d}{t^4-1}$ converge.

<u>Exercice</u> 3.10.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh} t}dt.$ ❷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\cos t^4 dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{te^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t + t^2\operatorname{ch}^2 t}dt.$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t dt$ ❻ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}}.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-2t}\operatorname{sh} t}{\ln(1+\operatorname{th}\sqrt[3]{t})}dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{t-e^{\cos t}+e}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\ln(1+\sqrt{t})}e^{-t\operatorname{ch}}dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-\sqrt{t}}dt.$

Solution

❶ 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh} t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{2} \frac{\sin t^2}{\ln(l+t)\operatorname{sh} t}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 2 : 0 < \left|\dfrac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh} t}\right| < \dfrac{1}{\operatorname{sh} t} \Rightarrow \displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh} t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh} t}dt$ converge.

❷ $\forall t \geq 1 : 0 < \left|\dfrac{\sin t^4}{t^3}\right| \leq \dfrac{1}{t^3} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t^4}{t^3}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\cos t^4 dt = \left.\frac{\sin t^4}{4t^2}\right|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t^4}{t^3}dt$ converge.

❸ 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{te^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t + t^2\operatorname{ch} t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{te^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t + t^2\operatorname{ch} t}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{te^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t + t^2\operatorname{ch} t} < \dfrac{e}{\operatorname{ch} t} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{te^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t + t^2\operatorname{ch} t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{te^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t + t^2\operatorname{ch} t}dt$ converge.

❹ 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \sqrt{t}\dfrac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}di$ converge.

2) $\forall t \geq 1 : \operatorname{ch} t > \dfrac{e^t}{2} > \dfrac{t^3}{12}$

$\Rightarrow \forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t} < \dfrac{144}{t^3} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}dt$ converge.

❺ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t=\sqrt{\ln 2}\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{2}\dfrac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t dt$ converge.

2) $\forall t\geq 2:\left|\dfrac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t\right|\leq\dfrac{t}{e^t-1}<\dfrac{3!}{t^2}$

$\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t dt$ converge.

❻ 1) $\lim\limits_{x\to 0_+}x^x=\lim\limits_{x\to 0+}e^{x\ln x}=1$

$\Rightarrow\lim\limits_{t\to 1+}\dfrac{1}{(\ln t)^{\ln t}}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{1+}^{2}\dfrac{dt}{(\ln t)^{\ln t}}$ converge.

2) $\forall s\geq e^2:\left(\dfrac{e}{s}\right)^s\leq e^{-s}\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\dfrac{dt}{(\ln t)^{\ln t}}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\left(\dfrac{e}{s}\right)^s ds$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{\ln t}^{+\infty}\dfrac{dt}{(\ln t)^{\ln t}}$ converge.

❼ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{e^{-2t\,\mathrm{sh}\,t}\ln(1+\mathrm{th}\sqrt[3]{t})\ln t}{0}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\dfrac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\,t}{\ln(1+\mathrm{th}\sqrt[3]{t})}dt$ converge.

2) $\forall t\geq 1:\left|\dfrac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\,t}{\ln(1+\mathrm{th}\sqrt[3]{t})}\right|<\dfrac{e^{-t}}{\ln(1+\mathrm{th}\,1)}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\dfrac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\,t}{\ln(1+\mathrm{th}\sqrt[3]{t})}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\dfrac{e^{-2t}\,\mathrm{sh}\,t}{\ln(1+\mathrm{sh}\sqrt[3]{t})}dt$ converge.

❽ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t^2e^{-1}}{t-e^{\cos t}+c}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\dfrac{t^2e^{-t}}{t-e^{\cos 1}+e}dt$ converge.

2) $\forall t\geq 1:0<\dfrac{t^2e^{-1}}{t-e^{\cos t}+e}\leq te^{-t}<\dfrac{3!}{t^2}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\dfrac{t^2e^{-t}}{t-e^{\cos t}+e}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\dfrac{t^2e^{-t}}{t-e^{\cos t}+e}dt$ converge.

❾ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}t^{\frac{3}{4}}\dfrac{\ln t}{\ln(1+\sqrt{t})}e^{-\,\mathrm{sh}\,t}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{4}\dfrac{\ln t}{\ln(1+\sqrt{t})}e^{-\,\mathrm{sh}\,t}dt$ converge.

2) $\forall t\geq 4:0<\dfrac{\ln t}{\ln(1+\sqrt{t})}e^{-\,\mathrm{sh}\,t}<te^{-t}<\dfrac{3!}{t^2}$

$\Rightarrow\displaystyle\int_{4}^{+\infty}\dfrac{\ln t}{\ln(1+\sqrt{t})}e^{-\,\mathrm{sh}\,t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{01}^{\mathrm{ta}}\dfrac{\ln t}{\ln(1+\sqrt{t})}e^{-\mathrm{sht}}\,dt$ converge.

❿ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t}{t}e^{-\sqrt{t}}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\dfrac{\sin t}{t}e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

2) $\forall t>1:\left|\dfrac{\sin t}{t}e^{-\sqrt{t}}\right|\leq e^{-\sqrt{t}}<\dfrac{4!}{t^2}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

<u>Exercice</u> 3.11.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{tht} e^{-t} dt$

❷ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1} dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}} dt$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}} dt$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1-\cos t^2}{t^4} dt$

❻ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}} dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)} e^{-\sqrt{t}} dt.$

❽ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\ln(1-t)} dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\ln(2-t)} dt.$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^4 t}{(1-t)^2} dt.$

Solution

❶ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0_+} \sqrt{t}\frac{\ln(1+\sqrt{t})}{1\mathrm{lt}t} e^{-t} = 1 \Leftrightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{tht} e^{-t} dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall t \geq 1 : 0 < \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{\operatorname{th} t} e^{-t} < \frac{te^{-t}}{\operatorname{th} 1} < \frac{3!}{t^2 \operatorname{th} 1}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{\operatorname{th} t} - e^{-t} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{\operatorname{th} t} e^{-t} dt$ converge.

❷ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 1+} \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \int_{1+}^{2} \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1} dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall t \geq 2 : 0 < \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1} < \frac{\sqrt{t}}{t^2-1} \Rightarrow \int_{2}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1} dt$ converge.

❸ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \sqrt{1-t}\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sin 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.

❹ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}} dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall t \geq 1 : \left|\frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}\right| \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}} dt$ converge.

❺ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{1-\cos t^2}{t^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{1-\cos t^2}{t^4} dt$ converge.

2) $\displaystyle\forall t \geq 1 : 0 \leq \frac{1-\cos t^2}{t^4} \leq \frac{2}{t^4} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{1-\cos t^2}{t^4} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1-\cos t^2}{t^4} dt$ converge.

❻ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\sqrt{t}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{\text{Arctgt}}}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\text{Arctgt}}}$ tt converge.

2) $\forall t\geq 1; 0<\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{\text{Aretg}\, t}}\leq\dfrac{2e^{-t}}{\sqrt{\pi}}\Rightarrow\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\text{Aretgt}}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\text{Arctgt}}}dt$ converge.

❼ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t}{\ln(1+t)}e^{-\sqrt{t}}=1\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{2}\frac{\sin t}{\ln(1+t)}e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

2) $\forall t\geq 2:\left|\dfrac{\sin t}{\ln(1+t)}e^{-\sqrt{t}}\right|\leq e^{-\sqrt{t}}\leq\dfrac{4!}{t^2}$

$\Rightarrow\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\ln(1+t)}e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\ln(1+t)}e^{-\sqrt{t}}dt$ converge.

❽ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\sin t}{\ln(1-t)}=-1\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin t}{\ln(1-t)}dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-}\dfrac{\sin t}{\ln(1-t)}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-}\frac{\sin t}{\ln(1-t)}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{\sin t}{\ln(1-t)}dt$ converge.

❾ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\sqrt{t}\dfrac{\ln t}{\ln(2-t)}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln t}{\ln(2-t)}dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln t}{\ln(2-t)}=-1\Rightarrow\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-}\frac{\ln t}{\ln(2-t)}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{\ln t}{\ln(2-t)}dt$ converge.

❿ 1) $\lim\limits_{t\to 0+}\sqrt{t}\dfrac{\ln^4 t}{(1-t)^2}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}dt$ converge.

2) $\lim\limits_{t\to 1-}\dfrac{\ln^4 t}{(1-t)^2}=0\Rightarrow\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1-}\frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}dt$ converge.

Exercice 3.12.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$\boxed{1}\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}e^{-\sqrt{t}}\ln(\text{sh}\, t)dt.$ $\qquad\boxed{2}\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\text{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}dt.$

$\boxed{3}\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{te^{-\text{sh}\, t}}{\ln(1+\sqrt{t})}\sin\frac{1}{t}dt.$ $\qquad\boxed{4}\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\,\text{Arctg}\sqrt{t}}dt.$

$\boxed{5}\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\cos t\ln(\text{tg}\, t)dt.$ $\qquad\boxed{6}\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}e^{-\text{sh}\, t}dt.$

$\boxed{7}\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sin t}{t(1+t\ln t)}dt$ $\qquad\boxed{8}\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{(1-\cos(\sin t))\sin t}{\sqrt{t^3}}dt.$

$\boxed{9}\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t})}dt.$ $\qquad\boxed{10}\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{\ln(1-\sqrt{t})}{\ln(1-t)}dt$

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\textbf{Arctg}\, t}{\sqrt{\textbf{sh}\, t}\,\textbf{ln}(1+\sqrt{t})}dt$

$\boxed{\text{S o l u t i o n}}$

$\boxed{1}$ 1) $\displaystyle\int_{0+}^{t} e^{-\sqrt{t}} \ln(\operatorname{sh} t)dt$ converge, car pour tout $t > 0$:

$$\ln(\operatorname{sh} t) = \ln\left(\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right) + \ln t.$$

2) $\forall t \geq 1 : 0 < e^{-\sqrt{t}} \ln(\operatorname{sh} t) < te^{-\sqrt{t}} < \frac{6!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{t} e^{-\sqrt{t}} \ln(\operatorname{sh} t)dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0,}^{+\infty} e^{-v} \ln(\operatorname{sh} t)dt$ converge.

$\boxed{2}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{2} \frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 2 : 0 < \dfrac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}} < \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{\infty} \frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}dt$ converge.

$\boxed{3}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{te^{-\operatorname{sh} t}}{\ln(1+\sqrt{t})} \sin\frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{4} \frac{te^{-\operatorname{sh} t}}{\ln(1+\sqrt{t})} \sin\frac{1}{t}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 4 : \left|\dfrac{te^{-\operatorname{sh} t}}{\ln(1+\sqrt{t})} \sin\dfrac{1}{t}\right| < te^{-t} < \dfrac{3!}{t^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{te^{-\operatorname{sh} t}}{\ln(1+\sqrt{t})} \sin\frac{1}{t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{te^{-\operatorname{sh} t}}{\ln(1+\sqrt{t})} \sin\frac{1}{t}dt$ converge.

$\boxed{4}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{2} \frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}dt$ converge.

2) $\forall t \geq 2 : \left|\dfrac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}\right| < \dfrac{e^{-t}}{\operatorname{Arctg}\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}dt$ converge.

$\boxed{5}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{\ln(\operatorname{tg} t)}{\ln t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1+\operatorname{tg}^2 t}{\frac{\operatorname{tg} t}{t}} = 1$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t}\cos t\ln(\operatorname{tg} t) = \lim_{t\to 0+} \cos t(\sqrt{t}\ln t)\frac{\ln(\operatorname{tg} t)}{\ln t} = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{0+} \cos t\ln(\operatorname{tg} t)dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \cos t\ln(\operatorname{tg} t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\ln(\operatorname{tg} t)}{\frac{1}{\cos t}} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\cos t}{\sin^2 t} = 0$

$$\Rightarrow \int_{1}^{\frac{\pi}{2}-} \cos t \ln(\operatorname{tg} t) dt \text{ converge.}$$

D'où $\Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \cos t \ln(\operatorname{tg} t) dt$ converge.

$\boxed{6}$ 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin t^2}{t \ln\sqrt{1+t}} e^{-\operatorname{sh} t} = 2 \Rightarrow \int_{0+}^{2} \frac{\sin t^2}{t \ln\sqrt{1+t}} e^{-\operatorname{sh} t} dt$ converge.

2) $\forall t \geq 2 : \displaystyle\left| \frac{\sin t^2}{t \ln\sqrt{1+t}} e^{-\operatorname{sh} t} \right| \leq e^{-\operatorname{sht}} \leq e^{-t}$

$$\Rightarrow \int_{2}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{t \ln\sqrt{1+t}} e^{-\operatorname{sh} t} dt \text{ converge.}$$

D'où $\Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{t \ln\sqrt{1+t}} e^{-\operatorname{sh} t} dt$ converge.

$\boxed{7}$ 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)} = 1 \Rightarrow \int_{0+}^{3} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)} dt$ converge.

2) $\forall t \geq 3 : \displaystyle\left| \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)} \right| < \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_{3}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)} dt$ converge :

$\boxed{8}$ 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \sqrt{t} \frac{(1-\cos(\sin t))\sin t}{\sqrt{t^3}} = \lim_{x\to 0+} (1-\cos(\sin t)) \frac{\sin t}{t} = 0$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{(1-\cos(\sin t))\sin t}{\sqrt{t^3}} dt \text{ converge.}$$

2) $\forall t \geq 1 : \displaystyle\left| \frac{(1-\cos(\sin t))\sin t}{\sqrt{t^3}} \right| \leq \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{(1-\cos(\sin t))\sin t}{\sqrt{t^3}} dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{(1-\cos(\sin t))\sin t}{\sqrt{t^3}} dt$ converge.

$\boxed{9}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}} \frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t})} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t})} dt$ converge.

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t})} = \lim_{t\to 1-} \frac{2}{\pi\sqrt{t}\cos(\pi\sqrt{t})} = -\frac{2}{\pi}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t}t)} dt \text{ converge.}$$

D'où $\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t})} dt$ converge.

$\boxed{10}$ 1) $\displaystyle\lim_{t\to 0+} \sqrt{t} \frac{\ln(1-\sqrt{t})}{\ln(1-t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{\ln(1-\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \frac{t}{\ln(1-t)}$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-\sqrt{2})}{\ln(1-t)} dt < +\infty.$$

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-} \frac{\ln(1-\sqrt{t})}{\ln(1-t)} = \lim_{t\to 1-} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{t}(1-\sqrt{t})}}{\frac{-1}{1-t}} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 1-} \frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\ln(1-\sqrt{t})}{\ln(1-t)} dt < +\infty.$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln(1-\sqrt{t})}{\ln(1-t)} dt < +\infty.$

$\boxed{11}$ 1) $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\ln(1+\sqrt{t})} = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{t}\sqrt{\dfrac{t}{\operatorname{sh} t}}\dfrac{\sqrt{t}}{\ln(1+\sqrt{t})} = 1$

$$\Rightarrow \int_{0+}^{4} \frac{\text{Arctgt}}{\sqrt{\operatorname{st} t}\ln(1+\sqrt{t})}dt \text{ converge.}$$

Rappel : $\forall t > 0 \operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} > \dfrac{e^t - 1}{2} > \dfrac{t^4}{48}$.

$$\forall t \geq 4 : 0 < \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\ln(1+\sqrt{t})} < \frac{\pi}{2\sqrt{\operatorname{sh} t}} < \frac{2\sqrt{3}\pi}{t^2}$$

$$\Rightarrow \int_{4}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\ln(1+\sqrt{t})}dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\ln(1+\sqrt{t})}dt$ converge.

Exercice 3.13.

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$.

❷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

❸ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}dt$.

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1} t^\alpha \ln t dt$.

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}dt$.

❻ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}dt$.

❼ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}e^{-t}dt$.

❽ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t(-\ln t)^\alpha}dt$.

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}dt$.

Solution

❶ Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^\alpha \dfrac{1}{t^\alpha} = 1$, on a $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

❷ Puisque $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\alpha \dfrac{1}{t^a} = 1$, on a $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

❸ $\lim\limits_{t\to +\infty} t^{1-\alpha}\dfrac{t^\alpha}{1+t} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}dt$ diverge pour tout $\alpha > 0$.

❹ $\lim\limits_{t\to 0+} t^\alpha \ln t = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} t^\alpha \ln t dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

❺ 1) $0 < \alpha < 1$. $\lim\limits_{t\to 0+} t^{\frac{a+1}{2}}\dfrac{\ln t}{t^a} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{t^a}dt$ converge.

2) $\alpha \geq 1, \forall t \in]0, \dfrac{1}{2}[: -\dfrac{\ln t}{t^\alpha} > \dfrac{\ln 2}{t^\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}dt$ diverge.

❻ 1) $0 < \alpha \leq 1, \forall t \geq 3 : \dfrac{\ln t}{t^\alpha} > \dfrac{1}{t^a} \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a}dt$ diverge.

2) $a > 1$, $\lim_{t\to\infty} t^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{\ln t}{t^a} = 0 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a} dt$ converge.

❼ 1) Puisque $\lim_{t\to 1+} (t-1)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^a}} e^{-1} = \frac{1}{e}$, on a

$$\int_{1+}^{2} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}} e^{-1} dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 4.$$

2) $\forall t \geq 2 : 0 < \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}} e^{-t} < te^{-t} < \frac{3!}{t^2} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}} e^{-t} dt$ converge.

D'où $\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{1t-10}} e^{-t} dt$ converge $0 < \alpha < 4$.

❽ 1) $\lim_{t\to 0+t} \frac{\sin t}{t(-\ln t)^0} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t(-\ln t)^a} dt$ converge.

2) Puisque $\lim_{t\to 1-} (1-t)^a \frac{\sin t}{t(-\ln t)^a} = \sin 1$, on a

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\sin t}{t(-\ln t)^\alpha} dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

D'où $\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t(-\ln t)^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < a < 1$.

❾ Puisque $\lim_{t\to 0+} t^{\alpha-1} \frac{\sin t}{t^\alpha} = 1$, on a $\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$.

❿ 1) Puisque $\lim_{t\to 0+} t^{\frac{3}{4}-\alpha} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} = 1$, on a $\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} dt$ converge.

2) Puisque $\lim_{t\to 1-} \sqrt[4]{1-t} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} = 1$, on a $\int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} dt$ converge.

D'où $\int_{0+}^{1} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}$ dt converge pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 3.14.

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{\sqrt[3]{1+t^\alpha}} dt$

❷ $\int_{0+}^{1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)} dt$

❸ $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^\alpha dt.$

❹ $\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

❺ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(\cos^2 t - \frac{1}{2})^\alpha}$

❻ $\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\sin\sqrt{t})} dt$

❼ $\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)} dt$

❽ $\int_{0+}^{1} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^\alpha dt$

❾ $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln(\ln t))^\alpha}$

❿ $\int_{0+}^{1-} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t} dt$

Solution

❶ Puisque $\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{\alpha}{3}-1}\dfrac{1+t}{\sqrt[3]{1+t^\alpha}} = 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{\sqrt[3]{1+t^\alpha}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 6.$$

❷ $0 < \alpha < 1$.

$$\lim_{t\to0+}(t-\alpha)\frac{\sqrt[3]{1-\alpha}}{\sqrt{t}(t-\alpha)} = \frac{\sqrt[3]{1-a}}{\sqrt{\alpha}} \neq 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)}dt \text{ diverge.}$$

$$\alpha = 1, 1)\ \lim_{t\to0+} \sqrt{t}\frac{\sqrt[3]{1-t}}{t+(t-1)} = -1 \Rightarrow \int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)}dt \text{ couverge.}$$

$$2)\ \lim_{t\to1-}(1-t)^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t(t-1)}} = -1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)}dt \text{ converge.}$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-1)}dt$ converge.

$$a > 1\ \lim_{t\to0+} \sqrt{t}\frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)} = -\frac{1}{\alpha} \Rightarrow \int_{0+}^{l} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-a)}dt \text{ converge.}$$

❸ $\forall t \geq 1 : 0 < e^{-t}t^\alpha < \dfrac{[\alpha]+3)!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{\infty} e^{-t}t^\alpha dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

❹ 1) Puisque $\lim_{t\to0+} t^{a^+}\dfrac{e^{-t}}{t^a} = 1$, on a $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{e^{-t}}{t^a} \leq e^{-t} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t^n}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^a}dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < a < 1$.

❺ Puisque $\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\pi}{4}-t\right)^\alpha \dfrac{1}{\left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right)^\alpha} = 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right)^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1.$$

❻ 1) Puisque $\lim_{t\to0+} t^\alpha \dfrac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\sin\sqrt{t})} = \dfrac{1}{2}$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\sin\sqrt{t})}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\sin\sqrt{t})} < \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\sin\sqrt{t})}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\sin\sqrt{t})}dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$.

❼ 1) Puisque $\lim_{t\to0+} t^a \dfrac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{e^{\operatorname{tin} t}}{t^a\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)}dt \text{ cunverge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1.$$

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{e^{\sin t}}{t^a\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)} < \dfrac{e}{\operatorname{ch}^2 t} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{t-\infty} \frac{e^{\sin t}}{t^a\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{tin} t}}{t^a\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)} dt$ cunverge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

❽ $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\alpha = 0 \Rightarrow \int_{0+}^{1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\alpha dt$ converge pour tout $\alpha>0$.

❾ $\alpha=1$. $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dt}{t\ln t(\ln(\ln t))} = \ln(\ln(\ln t))\Big|_3^{+\infty} = +\infty$ diverge

$\alpha\neq 1$. $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\frac{dt}{t\ln + (\ln(\ln +1)^\alpha} = \frac{(\ln(\ln t))^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_3^{+\infty}$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1$.

❿ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^\alpha\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t} = e^{-\alpha}$, on a

$$\int_{0+}^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

2) $\displaystyle\lim_{t\to 1-}\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t} = 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1-}\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

Exercice 3.15.

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha>0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt$ $\qquad$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{t^\alpha e^{\sin t}}{\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t}dt$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}e^{-t^2}}{2+\sin t}dt.$ $\qquad$ $\boxed{4}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt.$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{(t^2-1)^\alpha}dt.$ $\qquad$ $\boxed{6}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\sin\frac{1}{t^\alpha}dt.$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int_{0+}^{1}\ln\left(\sin t^\alpha\right)dt.$ $\qquad$ $\boxed{8}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt.$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty}\frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}e^{-t}dt$ $\qquad$ $\boxed{10}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{dt}{\ln^\alpha(1+t)}.$

$\boxed{11}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln\left(1+t^\alpha\right)}{1+t-e^t}dt$ $\qquad$ $\boxed{12}$ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{t-[t]}{t^\alpha}dt.$

Solution

$\boxed{1}$ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^\alpha\frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1}\frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

2) $\displaystyle\forall t\geq 1: 0<\frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}<\frac{e^{-t}}{\operatorname{sh}^\alpha t} \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

$\boxed{2}$ $\displaystyle\forall t\geq 1: 0<\frac{t^\alpha e^{\sin t}}{\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t} < 2e\frac{t^n}{\varepsilon^t} < \frac{2e([\alpha]+3)!}{t^2}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{\sin t}}{\sqrt{t}+\mathrm{ch}^2 t}dt \text{ converge.}$$

$\boxed{3}$ $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{t^{\alpha-1}e^{-t^2}}{2+\sin t} < t^{\alpha-1}e^{-t} < \dfrac{([\alpha]+2)!}{t^2}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t^2}}{2+\sin t}dt \text{ converge.}$$

$\boxed{4}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{2\alpha-2}\dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{3}{2}.$$

2a) $\alpha > \dfrac{1}{2}, \forall t \geq 1 : 0 \leq \dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} \leq \dfrac{1}{t^{2\alpha}} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ converge.

2b) $\alpha = \dfrac{1}{2}, \forall 1 \geq 1 : \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1-\cos 2t}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}dt$ comverge (critere de Abet-Dirichlet)

$$\Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}dt \text{ diverge.}$$

2c) $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}\forall t \geq 1 : \dfrac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} \geq \dfrac{\sin^2 t}{t} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ diverge.

Finalement, $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ converge $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$.

$\boxed{5}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 1+} (t-1)^{\alpha-1}\dfrac{\mathrm{Arctg}(t-1)}{(t^2-1)^\alpha} = \dfrac{1}{2^\alpha}$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{\mathrm{Arctg}(t-1)}{(t^2-1)^\alpha}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2.$$

2) Puisque $\lim\limits_{t\to +\infty} t^{2\alpha}\dfrac{\mathrm{Arctg}(t-1)}{(t^2-1)^\alpha} = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctg}(t-1)}{(t^2-1)^\alpha}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.$$

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctg}(t-1)}{(t^2-1)^\alpha}dt$ converge $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 2$.

$\boxed{6}$ 1) $\forall t \in]0,1] : \left|\sin \dfrac{1}{t^\alpha}\right| \leq 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0+}^{1} \sin\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge.

2) Puisque $\lim\limits_{t\to +\infty} t^\alpha \sin\dfrac{1}{t^\alpha} = 1,$ on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge $\Leftrightarrow a > 1$.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \sin\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

$\boxed{7}$ Converge pour tout $\alpha > 0$ car

$$\forall t \in]0,1] : \ln(\sin t^\alpha) = \ln\left(\frac{\sin t^\alpha}{t^\alpha}\right) + \alpha \ln t.$$

$\boxed{8}$ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to 0+} t^{\alpha-1}\dfrac{\ln(1+\mathrm{Arctg}\, t)}{\mathrm{sh}^\alpha t} = 1$, on a

$$\int_{\alpha+}^{1} \frac{\ln(1+\mathrm{Arctg}\, t)}{\mathrm{sh}^\alpha t}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2.$$

2) $\forall t \geq 1 : 0 < \dfrac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t} < \dfrac{\operatorname{Arctg} t}{\operatorname{sh}^\alpha t} < \dfrac{2^{\alpha-1}\pi\left(\left(\left[\frac{2}{\alpha}\right]+1\right)!\right)^\alpha}{t^{\alpha\left(\left[\frac{2}{\alpha}\right]+1\right)}}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt$ converse.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt$ converse $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$.

$\boxed{9}$ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1+}(t-1)^{\alpha-1}\frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}e^{-t} = \frac{1}{2}$, on a

$$\int_{1+}^{2} \frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}e^{-t}dt \text{ comverge } \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2.$$

2) $\forall t \geq 2 : 0\dfrac{\ln t}{(1-t)^\alpha}e^{-t} \geq te^{-t} < \dfrac{3!}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}e^{-t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}e^{-t}dt$ converge pour tout $0 < \alpha < 2$.

$\boxed{10}$ $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\frac{1}{\ln^\alpha(1+t)} = +\infty \Rightarrow \int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\ln^\alpha(1+t)}$ diverge.

$\boxed{11}$ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{-\alpha+2}\frac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t} = -2$, on arx

$$\int_{0+}^{1} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}dt \text{ converge } \alpha > 1.$$

2) $\forall t \geq 1 \left|\dfrac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}\right| < \dfrac{t^\alpha}{e^t-1-t} < \dfrac{([\alpha]+3)!}{t^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}dt$ converge.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{1+t-e^t}dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

$\boxed{12}$ 1) $\alpha = 1$. Puisque pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^n \frac{t-[t]}{t}dt \geq \sim_{k=1}^{n-1} \int_{k+\frac{1}{4}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{t-[t]}{t}dt \geq \frac{1}{4} \sim_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k+2} \text{ et } \sim_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k+2} = +\infty,$$

l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t}dt$ diverge.

2) $0 < \alpha < 1. \forall t \geq 1 : \dfrac{t-[t]}{t^\alpha} \geq \dfrac{t-[t]}{t} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^\alpha}dt$ diverge.

3) $\alpha > 1. \forall t \geq 1 : \dfrac{t-[t]}{t^\alpha} \geq \dfrac{1}{t^\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^\alpha}dt$ converge.

Exercice 3.16.

Discuter, en fonction deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta}$. ❷ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\alpha e^{-t}}{1+\beta e^t}dt$

❸ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t}dt$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}dt$

❺ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{\alpha}}dt$ ❻ $\displaystyle\int_{-1+}^{1-} \frac{|t|^{\alpha}\cos t}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{\beta}}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{-1+\infty}^{+\infty} \frac{|t|^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{a+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{t^{2a}\left(1+t^3\right)^{\beta}}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}(1+\sqrt{t})^{\beta}}dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{(1+\alpha)t}}{e^{t}+\beta e^{-t}}dt.$

Solution

❶ Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{\alpha}\frac{1}{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}} = 1$ et $\displaystyle\lim_{t\to 1-} (1-t)^{\beta}\frac{1}{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{t^{\alpha}(1-t)^{\beta}} \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha,\beta<1.$$

❷ 1) $\beta = 0.\forall t \geq 0 : 1+\alpha e^{-t} > 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(1+\alpha e^{-t}\right)dt$ diverge pour tout $\alpha > 0$.

2) $\beta \neq 0.\forall t \geq 0 : 0 < \dfrac{1+\alpha e^{-t}}{1+\beta e^{t}} < \dfrac{1+\alpha}{\beta}e^{-t} \Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1+\alpha e^{-t}}{1+\beta e^{-t}}dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

❸ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1+} (t-1)^{\alpha}\frac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t} = 1$, on a

$$\int_{1+}^{3} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<1 \text{ et } \beta>0.$$

2a) $0<\beta<1.\forall t \geq 3 : 0 < \dfrac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t} < t^{\beta-2} \Rightarrow \displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t}$ dt converge pour tout $\alpha > 0$.

2b) $\beta \geq 1$ et $0<\alpha<1, \forall t \geq 3 : \dfrac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t} > \dfrac{1}{t\ln t} \Rightarrow \displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t}dt$ diverge.

En résumé $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^{\alpha} t}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha,\beta<1$.

❹ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0+} t^{a}\frac{(1+t)^{a}-t^{a}}{t^{a}} = 1$, on a

$$\int_{0+}^{1} \frac{(1+t)^{a}-t^{a}}{t^{a}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha>0 \text{ et } 0<\beta<1.$$

2) $\forall t \geq 1 : (1+t)^{\alpha}-t^{\alpha} = t^{\alpha}\left(\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{\alpha}-1\right) = t^{\alpha-1}\left(\alpha + t\mathcal{R}_1\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$ avec

$$\lim_{t\to+\infty} t\mathcal{R}_1\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{\beta-\alpha+1}\frac{(1+t)^{\alpha}-t^{\alpha}}{t^{\beta}} = \alpha.$$

Par conséquent $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{(1+t)^{\alpha}}{t^{\beta}}dt$ converge $\Leftrightarrow \beta>\alpha>0$.

D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{(1+t)^{\alpha}-t^{\alpha}}{t^{\beta}}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<\beta<1$.

❺ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to 1+} (t-1)^{\alpha-1}\frac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{\alpha}} = 1$, on a

$$\int_{1+}^{2} \frac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{a}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<2 \text{ et } \beta>0.$$

2a) $0<\alpha+\beta\leq 1$. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+\beta}\dfrac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{\alpha}}=+\infty \Rightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{\alpha}}dt$ diverge.
2b) $\alpha+\beta>1$. Posons $\mu=\frac{\alpha+\beta-1}{2}>0$, Alors,

$$\gamma=\alpha+\beta-\mu>1 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} t^{\gamma}\frac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{\alpha}}=0;$$

ce qui entraine que $\int_2^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{\alpha}}dt$ converge.
En résumé, $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{\beta}(t-1)^{\alpha}}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<2$ et $\alpha+\beta>1$.
❻ Puisque

$$\lim_{t\to1+}(1+t)^{\frac{\beta}{2}}\frac{|t|^{\alpha}\cos t}{(\sqrt{1-t^2})^{\beta}}=\lim_{t\to1-}(1+t)^{\frac{\beta}{2}}\frac{|t|^{\alpha}\cos t}{(\sqrt{1-t^2})^{\beta}}=\frac{\cos 1}{2^{\frac{\beta}{2}}},$$

on a $\displaystyle\int_{-1+}^{1+}\frac{|t|^{\alpha}\cos t}{(\sqrt{1-t^2})^{\beta}}dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha>0$ et $0<\beta<2$.
❼ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\beta}\dfrac{|t|^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}=1$, on a

$$\int_{-1+}^{0}\frac{|t|^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha>0 \text{ et } 0<\beta<1.$$

2) Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\beta-\alpha}\dfrac{|t|^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}=1$, on a

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{|t|^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \beta>1+\alpha.$$

D'où $\displaystyle\int_{-1+}^{+\infty}\frac{|t|^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}dt$ diverge.
❽ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to0+} t^{2\alpha}\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}(1+t^3)^{\beta}}=1$, on a

$$\int_{0+}^{1}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}(1+t^3)^{\beta}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2} \text{ et } \beta>0.$$

2) $\forall t\geq 1: 0<\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}(1+t^3)^{\beta}}<e^{-\sqrt{t}}<\dfrac{4!}{t^2}\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}(1+t^3)^{\beta}}dt$ converge.
D'où $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{2\alpha}(1+t^3)^{\beta}}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2}$ et $\beta>0$.
❾ 1) Puisque $\lim\limits_{t\to0+} t^{\alpha-1}\dfrac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}(1+\sqrt{t})^{\beta}}=1$, on a

$$\int_{0+}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}(1+\sqrt{t})^{\beta}}dt \text{ converge } \Leftrightarrow 0<\alpha<2 \text{ et } \beta>0.$$

2) Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha+\frac{\beta}{2}}\frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}(1+\sqrt{t})^{\beta}}=\frac{\pi}{2}$, on a

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctg} t}{t^{\alpha}(1+\sqrt{t})}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha+\frac{\beta}{2}>1.$$

D'où $\int_1^{0+} \frac{\text{Arctg}\, t}{t^\alpha(1+\sqrt{t})}dt$ converge $\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2$ et $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$.

❿ $\forall t > 0$: $\dfrac{e^{(1+\alpha)t}}{e^t + \beta e^{-t}} > \dfrac{e^t}{e^t+\beta e^{-t}} = \dfrac{1}{1+\beta e^{-2t}}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{1+\beta e^{-2t}} = 1$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\beta e^{-2t}}dt$ diverge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

Exercice 3.17.

Discuter, en fonction deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos\beta t dt.$ ❷ $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\beta \sin t^\alpha dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sin^\alpha t\sqrt{(1-t^2)^\beta}}$ ❹ $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2-4)^{\alpha\beta}}.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^\alpha + \text{th}^\beta t}dt.$ ❻ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} t^\alpha \ln\beta\frac{1}{t}dt.$ ❽ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t^\alpha\ln^\beta t}{e^t}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln^\alpha t}{e^{\beta t}(t-1)}dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}}.$

Solution

❶ $\forall t > 0$: $\left|e^{-\alpha t}\cos\beta t\right| \leq e^{-\alpha t} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos\beta t dt$ converge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

❷ En faisant le changement de variable $s = t^\alpha$, on obtient pour $x \in]1, +\infty[$:

$$\int_1^x t^\beta \sin t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha}\int_1^{x^\alpha} s^\gamma \sin s ds \text{ où } \gamma = \frac{\beta+1}{\alpha} - 1.$$

1) $-1 < \gamma < 0$. $\int_1^{+\infty} s^\gamma \sin s ds$ converge (critère de Abel-Dirichlet).
D'où

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} t^\beta \sin t^\alpha dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x t^\beta \sin t^\alpha dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\int_1^{x^\alpha} s^\gamma \sin s ds = \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} s^\gamma\sin s ds.\end{aligned}$$

2) $\gamma = 0$. $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x t^\beta \sin t^\alpha dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\int_1^{x^\alpha}\sin s ds$
$= \frac{-1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}(\cos x^\alpha - \cos 1)$ n'existe pas $\Rightarrow \int_1^{+\infty} t^\beta \sin t^\alpha dt$ diverge.

3) $\gamma > 0$. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^{x^\alpha} s^\gamma \sin s ds$ n'existe pas, Pour cola, raisonnons $\int_1^{x^\alpha} s^\gamma \sin s ds$ pour $x > 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Ainsi, il existe $a > 1$ tel que pour tout $x \geq a$: $|f(x) - \ell| \leq 1$. Par conséquent pour tout $u, v \geq a$:

$$|f(x) - f(v)| \leq |f(u) - \ell| + |f(v) - \ell| \leq 2;$$

ce qui entraine que pour tout entier $k \geq [a^\alpha] + 1$:

$$\begin{aligned}2 &\geq \left|f\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\right) - f\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\pi}{6}+2k\pi}\right)\right| = \int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi} s^\gamma \sin s ds \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{\pi}{2}+2k\pi} s^\gamma ds \geq \frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)^\gamma.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)^{\gamma} = +\infty$, ce résultat est impossible. D'où contradiction. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} t^{\beta}\sin t^{\alpha}dt$ est donc divergente.

❸ Puisque

$$\lim_{t\to0+} t^{\alpha}\frac{1}{\sin^{\alpha} t\sqrt{(1-t^2)^{\beta}}} = 1 \text{ et } \lim_{t\to1-}(1-t)^{\frac{\beta}{2}}\frac{1}{\sin^{\alpha} t\sqrt{(1-t^2)^{\beta}}} = \frac{1}{2^{\frac{\beta}{2}}\sin^{\alpha}1},$$

on a $\displaystyle\int_{0+}^{1-}\frac{1}{\sin^{\alpha} t\sqrt{(1-t^2)^{\beta}}}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$ et $0<\beta<2$.

❹ 1) Puisque $\lim_{t\to2+}(t-2)^{\alpha\beta}\frac{e^{-t}}{(t^2-4)^{\alpha\beta}} = \frac{e^{-2}}{4^{\alpha\beta}}$, on a

$$\int_{2+}^{3}\frac{e^{-1}}{(t^2-4)^{i+1})}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha\beta<1.$$

2) Puisque $\lim_{t\to+\infty} t^{2\alpha\beta}\frac{1}{(t^2-4)^{\alpha\beta}} = 1$, on a

$$\int_{2+}^{3}\frac{e^{-t}}{(t^2-4)^{\alpha\beta}}dt \text{ cotrerge } \to \alpha\beta>\frac{1}{2}.$$

D'où $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(t^2-4)^{\alpha\beta}}dt$ converge $\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\alpha\beta<1$.

❺ la) $\alpha\geq\beta$, Puisque

$$\lim_{t\to0+} t^{\beta}\frac{e^{\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\text{th}^{\beta}t} = \lim_{t\to0+}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha-\beta}+\left(\frac{\text{th}t}{t}\right)^{\beta}} = \begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } \alpha=\beta\\ 1 & \text{si } \alpha\neq\beta,\end{cases}$$

on a $\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{e^{\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\text{th}^{\beta}t}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\beta<1$.

1b) $\beta>\alpha$. Puisque $\displaystyle\lim_{t\to0+} t^{\alpha}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\text{th}^{\beta}t} = \lim_{t\to0+}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{1+t^{\beta-\alpha}\left(\frac{\text{th}t}{t}\right)^{\beta}} = 1$,

on a $\displaystyle\int_{0+}^{1}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\text{th}^{\beta}t}dt$ converge $\Leftrightarrow 0<\alpha<1$.

2) $\displaystyle\forall t\geq1 : 0<\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\text{th}^{\beta}t}<e^{-\sqrt{t}}<\frac{4!}{t^2}\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\text{th}^{\beta}t}dt$ converge pour tout $\alpha,\beta>0$.

En résumé, $\text{th}^{\beta}\int_{0+}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\text{th}^{\beta}t}dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha\geq\beta$ et $0<\beta<1$ ou $0<\alpha<1$ et $\beta>\alpha$.

❻ 1) Puisque $\displaystyle\lim_{t\to1+}(t-1)^{\beta}\frac{1}{t^{\alpha}\ln^{\beta}t} = 1$, on a

$$\int_{1+}^{3}\frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta}t} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha>0 \text{ et } 0<\beta<1.$$

2a) $0<\alpha<1$ et $\beta>0$. En constatant que $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{1-\alpha}}{\ln^{\beta}t} = +\infty$, il existe $\alpha>3$ tel que pour tout $t>\alpha$: $\frac{t^{1-\alpha}}{\ln^{\beta}t}>1$. Par conséquent pour tout $t>\alpha$:

$$\frac{1}{t^{\alpha}\ln^{\beta}t} = \frac{t^{1-\alpha}}{t\ln^{\beta}t} > \frac{1}{t};$$

ce qui entraine que $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta dt}$ diverge.

2b) $\alpha = 1$. Puisque pour tout $x > 3$: $\int_1^x \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \int_{\ln 3}^{\ln x} \frac{ds}{s^\beta}$, on a

$$\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^A t} \text{ converge } \leftrightarrow \beta > 1.$$

2a) $\alpha > 1, \forall t \geq 3 : 0 < \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} < \frac{1}{t^\alpha} \Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$ converge pour tout $\beta > 0$.

Ea résumé, $\int_{1+}^{+\infty} \frac{de}{t^\alpha \ln^\beta t}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ et $0 < \beta < 1$.

❼ $\lim_{t \to 0+} t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \int_{0+}^1 t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t} dt$ converge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

❽ $\forall t \geq 2 : 0 < \frac{t^\alpha \ln^\beta t}{e^t} < \frac{t^{\alpha+\beta}}{e^t} < \frac{([\alpha+\beta]+3)!}{t^2}$

$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln^\beta t}{e^t} dt$ converge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

❾ $\lim_{t \to 1+} (t-1)^{1-\alpha} \frac{\ln^\alpha t}{e^{\beta t}(t-1)} = \frac{1}{e^\beta}$ et

$\forall t \leq 2 : 0 < \frac{\ln^\alpha t}{e^{\beta t}(t-1)} < \frac{1}{e^\beta} < \frac{([\alpha]+3)!}{\beta^{[\alpha]+3} t^2}$

$\Rightarrow \int_{1+}^{+\infty} \frac{1}{e^\beta} < \frac{t^\alpha}{e^{\beta t}(t-1)} dt$ converge pour tout $\alpha, \beta > 0$.

❿ 1) $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$. Puisque $\lim_{t \to 0+} t^\alpha \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}} = 0$, l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{1}{2}}$ converge.

2) $\alpha = 1$. En constatant que pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$: $\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t \ln^\beta \frac{1}{t}} = \int_{\ln 2}^{-\ln x} \frac{ds}{s^\beta}$, on a

$$\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t \ln^\beta \frac{1}{t}} \text{ ecaverge } \leftrightarrow \beta > 1.$$

3) $\alpha > 1$ et $\beta > 0$. Puisque $\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{1}{t}} = +\infty$, il existe $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ tel que pois tout $t \in]0, \alpha[$: $\frac{1}{t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{1}{2}} > 1$. Par conséquent pour tout $0 < t < \alpha$:

$$\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}} = \frac{1}{t} \frac{1}{t^{x-1} \ln^\beta \frac{1}{t}} > \frac{1}{t};$$

ce qui entraine que l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta \frac{1}{t}}$ diverge.

Exercice 3.18.

Discuter, en fonction de l'entier $n > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$\boxed{1}$ $\int_{0+}^1 \left(\frac{\sin t^n}{\ln t^n}\right)^n dt.$

$\boxed{2}$ $\int_{1+}^{2-} \frac{2-t}{(-t^2+3t-2)^n} dt$

$\boxed{3}$ $\int_{1+}^{+\infty} \frac{e^{-\sin t} \ln^n t}{(t-1)^n} dt.$

$\boxed{4}$ $\int_{0+}^{+\infty} \frac{(t^n - [t^n))^n}{\ln(e^{t^n} - 1)} dt.$

$\boxed{5}$ **Calculer** $\lim\limits_{x\to1+}\int_{1+}^{x-}\dfrac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}$.

$\boxed{6}$ **Calculer** $\lim\limits_{x\to0+} e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(x+tgt)dt}$.

$\boxed{7}$ **Calculer** $\lim\limits_{x\to0+}\int_{0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}dt$.

$\boxed{8}$ **Calculer** $\lim\limits_{x\to0} x^3\int_{0+}^{1}\dfrac{t\ln t}{t^2+x^2}dt$.

$\boxed{9}$ **Calculer** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\int_{0}^{x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}}dt$.

$\boxed{10}$ **Calculer** $\lim\limits_{x\to0} x^2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2t}dt$.

$\boxed{11}$ **Calculer** $\lim\limits_{x\to0+}\int_{0}^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt$.

$\boxed{12}$ **Calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{0+}^{1-}\dfrac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}dt$.

Solution

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{t\to0+}\left(\dfrac{\sin t^n}{\ln t^n}\right)^n=0\Rightarrow\int_{0+}^{1}\left(\dfrac{\sin t^n}{\ln t^n}\right)^n dt$ converge pour tout $n>0$.

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{1\to1+}(t-1)^n\dfrac{2-t}{(-t^2+3t-2)^n}=1\Rightarrow\int_{1+}^{2-}\dfrac{2-t}{(-t^2+3t-2)^n}dt$ diverge pour tout $n>0$.

$\boxed{3}$ 1) $\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{e^{-\sin t}\ln^n t}{(t-1)^n}=e^{-\sin 1}\Rightarrow\int_{1+}^{3}\dfrac{e^{-\sin t}\ln^n t}{(t-1)^n}dt$ converge pour tout $n>0$.

2a) $n=1.t\geq3:\dfrac{e^{-\sin t}\ln t}{t-1}>e^{-1}\dfrac{\ln t}{t}\Rightarrow\int_{3}^{+\infty}\dfrac{e^{-\sin t}\ln t}{t-1}dt$ diverge.

2b) $n>1.\ \lim\limits_{t\to+\infty}t^{n-\frac{1}{n}}\dfrac{e^{-\sin t}\ln nt}{(t-1)^n}=0\Rightarrow\int_{3}^{+\infty}\dfrac{e^{-\sin t}\ln t}{t-1}dt$ converge.

En résumé, $\int_{1+}^{+\infty}\dfrac{e^{-\sin t}\ln t}{t-1}dt$ converge $\Leftrightarrow n>1$.

$\boxed{4}$ 1) $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{(t^n-[t^n])^n}{\ln(e^{t^n}-1)}=0\Rightarrow\int_{0+}^{1}\dfrac{(t^n-[t^n])^n}{\ln(e^{t^n}-1)}dt$ converge pour tout $n>0$.

2a) $n=1.\forall t>1:\dfrac{t-[t]}{\ln(e^t-1)}>\dfrac{t-[t]}{t}\Rightarrow\int_{1}^{+\infty}\dfrac{t-[t]}{\ln(e^t-1)}$ dt diverge.

2b) $n>1$.

$$\forall t>1:0<\frac{(t^n-[t^n])^n}{\ln(e^{t^n}-1)}\leq\frac{1}{\ln(e^{t^n}-1)}\text{ et }\lim_{t\to+\infty}t^n\frac{1}{\ln(e^{t^n}-1)}=1$$

$$\Rightarrow\int_{1}^{+\infty}\frac{(t^n-[t^n])^n}{\ln(e^{t^n}-1)}dt\text{ converge.}$$

En résumé, $\int_{0+}^{+\infty}\dfrac{(t^n-[t^n])^n}{\ln(e^{tn}-1)}dt$ converge $\Leftrightarrow n>1$.

$\boxed{5}$ Puisque $\forall x>1:\int_{1+}^{x-}\dfrac{dt}{\sqrt{(t-1)(x-t)}}=\text{Arcsin}\,\dfrac{t-\frac{x+1}{2}}{\frac{x-1}{2}}\Bigg|_{1+}^{x-}=\pi$,

on a $\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}\leq\int_{1+}^{x-}\dfrac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}\leq\pi$.

D'où $\lim\limits_{x\to1+}\int_{1+}^{x-}\dfrac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}=\pi$.

$\boxed{6}$ Pour commencer, on constate que l'intégrale généralisée $\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(\operatorname{tg}t)dt$ converge. En effet,

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(\operatorname{tg}t)dt=\int_{0+}^{+\infty}\frac{\ln s}{1+s^2}ds$$

et cette dernière converge, car $\lim\limits_{s\to 0+} \sqrt{s}\frac{\ln s}{1+s^2} = 0$ et pour tout $s \geq 1$:

$$0 \leq \frac{\ln s}{1+s^2} = \frac{2\ln\sqrt{s}}{1+s^2} < \frac{2}{s^{\frac{\pi}{2}-}}.$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in]0,1[$:

$$e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(x\,\mathrm{tg}\, t)dt} = x^{\frac{\pi}{2}} e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\mathrm{tg}\, t)dt},$$

on a $\lim_{x\to 0+} e^{\int_0^{\frac{1}{2}-} \ln(x\,\mathrm{tg}\, t)dt} = 0$.

$\boxed{7}$ Puisque pour tout $x \in 10,1[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}dt = \int_0^{\sin x} \frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}dt + \int_{\sin x}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}dt$$
$$< \sin x + \int_{\sin x}^{+\infty} \frac{2\sin^2 x}{t^2}dt = 3\sin x,$$

on a $\lim\limits_{t\to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}dt = 0$.

$\boxed{8}$ Puisque pour tout $|x| \in]0,1[$ et $t \in]0,1[$: $\left|\frac{t\ln t}{t^2+x^2}\right| \leq \frac{-\ln t}{x^2}$, on obtient que pour tout $|x|_in]0,1[$:

$$\left|x^3 \int_{0+}^1 \frac{t\ln t}{t^2+x^2}dt\right| \leq |x| t(1-\ln t)|_{0+}^1 = |x|.$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \int_{0+}^1 \frac{t\ln t}{t^2+x^2}dt = 0$.

$\boxed{9}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^{x^2} t^{-\frac{t^2}{x^2}}dt = \lim\limits_{x\to 0} \int_0^x e^{-s^2}ds = 0$.

$\boxed{10}$ $\forall x \neq 1 =$

$$x^2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}dt = -\left. e^{-x^2 t}\right|_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}dt = 1.$$

$\boxed{11}$ $\forall x > t$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt = -\left.\frac{1}{x}e^{-xt}\sin t\right|_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t dt$

$$= -\left.\frac{1}{x^2}e^{-xt}\cos t\right|_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt$$
$$\Rightarrow \forall x > 0 : \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt = 1$.

$\boxed{12}$ En remarquant que pour tout $0 < t < 1 : 0 < \frac{t^n}{\sqrt{(1-t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1-t)}}$,

l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ converge pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, puisque

$$\lim_{x\to 1-} \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}},$$

il existe $a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que

$$\int_a^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(t-t)}} = \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} - \int_{\frac{1}{2}}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, il existe $n_\varepsilon \in N^*$ tel que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$0 < a^n \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\int_{0+}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t}(1-t)} \right)^{-1}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \int_{0+}^{1-} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}} dt &\leq \int_{0+}^{a} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}} dt + \int_a^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \\ &\leq a^n \int_{0+}^{a} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{0+}^{1-} \frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}} dt = 0.$

❶ *Montrer que l'intégrale généralisée*

$$\int_1^{+\infty c} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Est convergente. Est-elle absolument convergente ?

❷ *Montrer que l'intégrale généralisée*

$$\int_1^{+\infty} t^2 \sin t^4 dt.$$

Est convergente. Est-elle absolument convergente ?

<u>Exercice</u> 3.19.

❸ Paradoxe du peintre

1) Calculer l'aire de

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

2) Calculer la surface latérale obtenue par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x \geq 1$.

3) Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x \geq 1$.

❹ Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^4 \int_0^{+\infty} e^{-x^4 t} dt$$

❺ Soient $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} f(t) dt$$

converge. Montrer que la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{a+}^{x} f(t)dt & \text{si } x \in]a,b] \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue.

❻ Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\ln t}{t^2} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \ln t & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées

$$\int_{0+}^{1} f(t)dt \text{ et } \int_{1}^{+\infty} f(t)dt$$

divergent.

2) Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(t)dt$$

❼ Soient $f, g :]0,1[\to \mathbb{R}$ les deux fonctions continues définies respectivement par

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}+x}^{\frac{\pi}{2}-x} \operatorname{tg} t dt$$

et

$$g(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}+2x}^{\frac{\pi}{2}-x} \operatorname{tg} t dt.$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+}^{0} \operatorname{tg} t dt \text{ et } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} t dt$$

divergent.

2) Calculer

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \to 0_+} g(x).$$

❽ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique telle que son intégrale généralisée

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$$

converge. Montrer que $f = 0$.

❾ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{s \to 0+} s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + s^2} dt = \pi f(x).$$

⓾ Soit $\alpha > 0$.
1) Montrer que
$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\alpha^2 + t^2} dt = \frac{\pi \ln \alpha}{2\alpha}$$
2) En déduire que
$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\alpha \operatorname{tg} t) dt = \frac{\pi \ln \alpha}{2}$$

Solution

❶ 1) D'après le critère de Abel-Dirichlet, L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
2) Non. En effet, pour tout entier $n > 2$:
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt > \int_1^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt > \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \\ > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi}.\end{aligned}$$
et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (la série harmonique diverge).

❷ 1) $\forall t \geq 1 : \left|\frac{\cos t^4}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos t^4}{t^2} dt$ converge
$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} t^2 \sin t^4 dt = -\left.\frac{\cos t^4}{dt}\right|_1^{+\infty} - \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t^4}{t^2} dt \text{ converge.}$$
2) Non. Eu effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge. Alors, pour tout entier $n > 0$:
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} |t^2 \sin t^4| dt > \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k = \sqrt[4]{\frac{\pi}{6}+2k\pi}}^{b_k = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}} t^2 \sin t^4 dt > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} t^2 dt \\ > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 (b_k - a_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 (b_k^4 - a_k^4)}{b_k^3 + a_k b_k^2 + a_k^2 b_k + a_k^3} \\ > \frac{\pi}{24} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{b_k^3} > \frac{\pi}{24 \sqrt[4]{(4x)^3}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{3}{4}}};\end{aligned}$$
ce qui est impossible car $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{4}}} = +\infty$. D'où contradiction.

❸ 1) $A = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t|_1^{+\infty} = +\infty$.
2) $S_{\text{butende}} = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}} dt = +\infty$.
3) $V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = -\left.\frac{\pi}{t}\right|_1^{+\infty} = \pi$.
Paradoxe du peintre : Il est possible de peindre une surface infinie avec une quantité finie de

peinture !

❹ Puisque $f(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbf{R}^*$:

$$f(x)=x^4\int_0^{+\infty}e^{-x^4t}dt=-\left.e^{-x^4t}\right|_0^{+\infty}=1,$$

ln fonction est discontinue en 0 et continue ailleurs.

❺ La fonction g étant continue sur $]a,b]$, montrons qu'elle est aussi continue à droite en a. En effet, soit $\varepsilon>0$. Puisque

$$\lim_{x\to a+}\int_x^b f(t)dt=\int_{a+}^b f(t)dt,$$

il existe un nombre $0<\delta<\frac{b-a}{2}$ tel que pour tout $0<x-a\leq\delta$:

$$\left|\int_{a+}^b f(t)dt-\int_x^b f(t)dt\right|\leq\varepsilon;$$

ce qui entraine $|g(x)-g(a)|=\left|\int_{a+}^x f(t)dt\right|=\left|\int_{a+}^b f(t)dt-\int_a^b f(t)dt\right|\leq\varepsilon.$

❻ 1a) $\forall t\in\left]0,\frac{1}{t}\right[:-\dfrac{\ln t}{t^2}>\dfrac{1}{t^2}\Rightarrow\displaystyle\int_{0+}^1\frac{\ln t}{t^2}dt$ diverge.

1b) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty\to\int_1^{+\infty}\ln t dt$ diverge.

2a) $\forall x>1:\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x^2}f(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln t}{t^2}dt+\int_{\frac{1}{2}}^x\ln t dt=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt=0.$

2b)$\forall x>1:\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x^2}f(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^x f(t)dt+\int_x^{x^2}f(t)dt=\int_x^{x^2}\ln t dt\geq\left(x^2-x\right)\ln x$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{x^2}f(t)dt=+\infty$$

❼ 1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}+}^0\operatorname{tg}t dt=-\left.\ln\cos t\right|_{-\frac{\pi}{2}+}^0=-\infty,$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg}t dt=-\left.\ln\cos t\right|_0^{-\frac{\pi}{2}}=+\infty.$

2) $\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}g(x)=\ln 2.$

❽ Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\delta>0$ pour lequel $f(a)\neq0$. Il découle de la continuité de f, l'existence d'un nombre $\delta>0$ tel que pour tout $x\in[a,a+\delta]$: $f(x)f(a)>0$; ce qui entraine, entre autres, que $\int_a^{a+\delta}f(t)dt\neq0$. D'autre part, puisque l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ converge et

$$\int_a^{+\infty}f(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\int_a^{a+nT}f(t)dt=\lim_{n\to+\infty}n\int_0^T f(t)dt$$

où $T>0$ est une période de la fonction f, on doit obligatoirement avoir $\int_0^T f(t)dt=0$. Il en résulte immédiatement que $\int_a^{+\infty}f(t)dt=0$ et que pour tout entier $n\geq1$:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+\delta+nT}f(t)dt&=\int_a^{a+\delta}f(t)dt+\int_{a+\delta}^{a+\delta+nT}f(t)dt\\&=\int_a^{a+\delta}f(t)dt+n\int_0^T f(t)dt=\int_a^{a+\delta}f(t)dt.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$0 = \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{a\to+\infty} \int_a^{s+\delta+nT} f(t)dt = \int_a^{a+\delta} f(t)dt \neq 0.$$

D'où contradiction.

❾ Soit $x \in R$ fixé. Pour commencer, remarquons que puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $s > 0$:

$$\left|\frac{s}{(x-t)^2+s^2} f(t)\right| \leq \frac{Ms}{(x-t)^2+s^2}$$

avec $M = 1 + \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}$, l'intégrale généraliser $\int_{-\infty}^{+\infty} = \frac{s}{(x-t)^2+s^2} f(t)dt$ est absolument convergente quel que soit $s > 0$.

Sait $\varepsilon > 0$. Il découle de la continuité de f, qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $|t-x| \leq \alpha : |f(t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme $\lim\limits_{s\to0+} \mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{s} = \frac{\pi}{2}$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < s \leq \delta : 0 < \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\frac{\alpha}{s} \leq \frac{\varepsilon}{8M}$.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{(x-t)^2+s^2} f(t)dt - f(x)\right| \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{(x-t)^2+s^2}(f(t)-f(x))dt\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{(x-t)^2+s^2}|f(t)-f(x)|dt \\
&\leq \frac{2M}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\alpha} \frac{s}{(x-t)^2+s^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{s}{(x-t)^2+s^2}|f(t)-f(x)|dt \\
&+ \frac{2M}{\pi}\int_{x+\alpha}^{+\infty} \frac{s}{(x-1)^2+s^2}dt \\
&\leq \frac{4M}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{\alpha}{s}\right) + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{s}{(x-l)^2+s^2}dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{(x-t)^2+s^2}dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to0+} s\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+s^2}dt = \pi f(x).$

❿ Puisque $\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt &= \frac{1}{\alpha}\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln \alpha s}{1+s^2}ds \\
&= \frac{\ln\alpha}{\alpha}\int_{0+}^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} + \frac{1}{\alpha}\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln s}{1+s^2}ds = \frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha}.
\end{aligned}$$

2) En effectuant le changement de variable $t = \mathrm{Arctg}\frac{s}{\alpha}$, on obtient

$$\int_{0_+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\alpha \mathrm{tg} t)dt = \alpha\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln s}{\alpha^2+s^2}ds = \frac{\pi\ln\alpha}{2}.$$

<u>Exercice</u> 3.20.

En utilisant la fonction gamma Γ, calculer les intégrales suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$

❷ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t) dt$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt, x > 0$

❺ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sqrt{t-1}e^{-t} dt$

Solution

❶ Puisque $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$,
an n $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

❷ $\displaystyle\sqrt{\pi} = \int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{s}} ds = 2\int_{0+}^{+\infty} e^{-t^2} dt \to \int_{0+}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

❸ Rappel : $\displaystyle\int_{0t}^{\pi-} \ln\sin t dt = 2\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \ln\sin t dt = -\pi\ln 2$.

Puisque $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t) dt = \int_{0}^{1-} \ln\Gamma(1-t) dt$, on a

$$\begin{aligned}
2\int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t) dt &= \int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t) dt + \int_{0}^{1-} \ln\Gamma(1-t) dt \\
&= \int_{0+}^{1-} (\ln\Gamma(t)\ln\Gamma(1-t)) dt = \int_{0+}^{1-} \ln\frac{\pi}{\sin\pi t} dt \\
&= \ln\pi - \int_{0+}^{1-} \ln\sin\pi t dt = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_{0+}^{\pi-} \ln\sin s ds \\
&= \ln\pi + \ln 2 = \ln 2\pi
\end{aligned}$$

ou encore

$$\int_{0+}^{1} \ln\Gamma(t) dt = \frac{\ln 2\pi}{2}.$$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt = \int_{0}^{+\infty} s^{x-1}e^{-s} ds = \Gamma(x)$.

❺ Puisque $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$, on a

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Par conséquent, en faisant le changement de variable $s = t-1$,

$$\int_{1}^{+\infty} \sqrt{t-1}e^{-t} dt = \frac{1}{e}\int_{0}^{+\infty} \sqrt{s}e^{-s} ds = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{e} = \frac{\sqrt{\pi}}{2e}.$$

Chapitre 4

Équations différentielles

Exercice 4.1.

❶ **Pour $x \in]-1,1[$, résoudre** $y'(x) + y(x) = e^{2x} + e^{x} + 3\sin x$.

❷ **Pour $x \in R_{+}^{*}$, résoudre** $xy'(x) - (1+x)y(x) + e^{x}\left(1+x^{2}\right) = 0$.

❸ **Pour $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, résoudre** $xy'(x) - 2y(x) = x^{5}$,

❹ **Pour $x \in |3,+\infty|$, résoudre** $(x-3)y'(x) - 3y(x) = x+5$.

❺ **Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, résoudre** $y'(x) + 2\operatorname{tg} x y(x) = \sin x$.

❻ **Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre** $y'(x) + \operatorname{th} x y(x) = \operatorname{sh} x$.

❼ **Pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, résoudre** $y'(x) + \operatorname{tg} x y(x) = \frac{1}{\cos x}$.

❽ **Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}\{$, résoudre** $(x\cos x)y'(x) + (\cos x + x\sin x)y(x) = 1$.

❾ **Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre** $\left(1-x^{2}\right)y'(x) - 2xy(x) = x^{2}$.

❿ **Pour $x \in |\ 1,+\infty$, résoudre** $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}$.

Solution

❶ $y(x) = ce^{-x} + \frac{1}{6}\left(3e^{x} + 2e^{2x} - 9\cos x + 9\sin x\right)$.

❷ $y(x) = cxe^{x} + \left(1-x^{2}\right)e^{x}$.

❸ $y(x) = cx^{2} + \frac{x^{5}}{3}$.

❹ $y(x) = c(x-3)^{3} - \frac{1}{6}(7+3x)$.

❺ $y(x) = \cos^{2} x + \cos x$.

❻ $y(x) = \frac{c}{\operatorname{ch} x} + \frac{\operatorname{ch} x}{2}$.

❼ $y(x) = c\cos x + \sin x$.

❽ $y(x) = c\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x}$.

❾ $y(x) = \frac{c}{1-x^{2}} + \frac{x^{3}}{3(1-x^{2})}$.

❿ $y(x) = cx + 2x(\sqrt{x-1} - \ln(1+\sqrt{x-1}))$.

Exercice 4.2.

❶ **Pour $x \in]0,1[$, résoudre** $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = 1 + \sqrt{1-x^{2}}$.

❷ **Pour $x \in]1,+\infty[$ résoudre** $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{1}{\ln^{2} x}$.

❸ **Pour $x \in]1,+\infty[$, résoudre** $y'(x) + \frac{1}{x\ln x}y(x) = 1 + \frac{1}{\ln x}$.

❹ **Pour $x \in]0,1[$, résoudre** $x'(x) - y(x) = x$.

❺ **Pour $x \in]0,1[$, résoudre** $x(1-x)y^{'}(x) + y(x) = x$.

❻ **Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre** $y'(x) + y(x) = x^{3}$.

❼ **Pour $x \in R_{+}^{*}$, résoudre**
$\boldsymbol{xy'(x) - y(x) = x \ln x}$.

❽ **Pour $x \in]e^{-1}, +\infty[$, résoudre**
$\boldsymbol{(1 + \ln x) y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = 2 + \ln x}$.

❾ **Pour $x \in R^{*}$, résoudre**
$\boldsymbol{xy'(x) - (x+1) y(x) = x^2 \sqrt{1 + e^x}}$.

❿ **Pour $x \in R^{*}$, résoudre**
$\boldsymbol{y'(x) - \frac{2}{x} y(x) = \operatorname{Arctg} x + \ln x}$.

Solution

❶ $y(x) = cx + x\left(\sqrt{1 - x^2} + 2\ln x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)\right)$.
❷ $y(x) = cx - \frac{x}{\ln x}$.
❸ $y(x) = \frac{c}{\ln x} + x$.
❹ $y(x) = cx + x \ln x$.
❺ $y(x) = c\left(\frac{1-x}{x}\right) + \frac{1 + (1-x)\ln(1-x)}{x}$.
❻ $y(x) = ce^{-x} - 6 + 6x - 3x^2 + x^3$.
❼ $y(x) = cx + \frac{x}{2} \ln^2 x$.
❽ $y(x) = \frac{c}{1 + \ln x} + x$.
❾ $y(x) = cxe^{t} - \frac{x}{2}\left(2\sqrt{1 + e^x} + e^x \ln\left(1 + 2e^{-x} + 2e^{-x}\sqrt{1 + e^x}\right)\right)$.
❿ $y(x) = cx^2 - x \operatorname{Arctg} x + (x^2 - x)\ln x - \frac{x^2}{2} \ln(1 + x^2) - x$.

Exercice 4.3.

❶ **Pour $x \in |-1 + \infty|$, résoudre**
$\boldsymbol{y(x) + y'(x) = x(2y(x) - y'(x))}$.

❷ **Résoudre pour $y(1) = 1$,**
$$\boldsymbol{y(x) y'(x) + \frac{1}{x} y^2(x) = \frac{1}{2x}}.$$

❸ **Résoudre pour $y(1) = 3$,**
$\boldsymbol{xy(x) y'(x) = y^2(x) - x^2}$.

❹ **Résoudre pour $y(1) = 1$,**
$\boldsymbol{2y(x) y'(x) - \frac{1}{x} y^2(x) = \ln x}$.

❺ **Résoudre pour $y(0) = 1$,**
$\boldsymbol{2y(x) y'(x) = y^2(x) + 2 \operatorname{sh} x}$.

❻ **Résoudre pour $y(1) = 2$,**
$\boldsymbol{2xy(x) y'(x) - 3y^2(x) + x^2 = 0}$.

❼ **Sont $\alpha > 0$. Résoudre pour**
$\boldsymbol{y(1) = 1}$,
$\boldsymbol{xy'(x) = x^2 + (1 + \alpha) y^2(x)}$.

❽ **Résoudre pour $y(0) = 2$,**
$\boldsymbol{1 + y^2(x) - (x^2 - 1) y(x) y'(x) = 0}$.

❾ **Résoudre pour $y(1) = 1$,**
$$\boldsymbol{y^2(x) y'(x) - \frac{1}{x} y^2(x) = x}.$$

❿ **Résoudre pour $y(1) = 1$,**
$\boldsymbol{y^2(x) y'(x) + \frac{1}{x} y^3(x) = \frac{1}{x^2}}$.

Solution

❶ $y(x) = c\frac{e^{2x}}{(x+1)^3}$.

❷ (Poser $z = y^2$) $y(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{2x}}, x > 0$.

❸ Poser $z = y^2$)
$y(x) = x\sqrt{9 - 2\ln x}, 0 < x < e^{\frac{9}{2}}$.

❹ (Poser $z = y^2$)
$y(x) = \frac{\sqrt{x\left(2 + \ln^2 x\right)}}{\sqrt{2}}, x > 0$.

❺ Poser $z = y^2$)
$y(x) = \sqrt{\operatorname{ch} x + xe^x}, x \in \mathbb{R}$.

❻ (Poser $z = y^2$)
$y(x) = x\sqrt{3x + 1}, x > -\frac{1}{3}$.

❼ (Poser $z = y^2$)
$y(x) = \frac{x\sqrt{(1+\alpha)x^{2\alpha} - 1}}{\sqrt{\alpha}}, x > \frac{1}{\sqrt[2\alpha]{1 + \alpha}}$.

❽ (Poser $z = y^2$)
$y(x) = \sqrt{\frac{4 - 6x}{1 + x}}, -1 < x < \frac{2}{3}$.

❾ (Poser $z = y^3$)
$y(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 3x^2}, x > \frac{3}{4}$.

❿ (Poser $z = y^3$)
$y(x) = \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}{\sqrt[3]{2x}}, x > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4.4.

❶ **Résoudre pour $y(1) = 1$,** $xy^3(x)y'(x) - y^4(x) = x^4 \ln x$.

❷ **Résoudre pour $y(0) = 1$,** $y(x)y'(x) + x\left(1 - 2\sqrt{x^2 + y^2(x)}\right) = 0$.

❸ **Résoudre pour $y(1) = 1$,** $y'(x)\sqrt{x} - y(x) + (x - 2\sqrt{x})\sqrt{y(x)} = 0$.

❹ **Résoudre pour $y(1) = 1$,** $y'(x) = \dfrac{4y(x)}{x} + x\sqrt{y(x)}$.

❺ **Résoudre pour $y(0) = \frac{-1}{12}$ et** $y'(0) = 0$, $(y'(x))^2 = y'(x) + x$.

❻ **Résoudre pour $y(1) = 1$ et** $y'(1) = 0$, $x^2y''(x) - xy'(x) = x^3e^x$.

❼ **Résoudre pour $y(1) = 1$ et** $y'(1) = 1$, $xy''(x) - y'(x) = \ln x$.

❽ **Résoudre pour $y(1) = 1$ et** $y'(1) = 0$, $(x^2 + 1)\, y''(x) - 2xy'(x) = (x^2 + 1)^2$.

❾ **Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre** $xy''(x) - y'(x) = 2x^3 \operatorname{Arctg} x$.

❿ **Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre** $xy''(x) - y'(x) = 1 + \dfrac{\ln\sqrt{x}}{x}$.

Solution

❶ (Poser $z = y^4$) $y(x) = x\sqrt[4]{1 + 2\ln^2 x}, x > 0$.

❷ (Poser $z(x) = x^2 + y^2(x)$) $y(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$.

❸ (Poser $y = z^2$) $y(x) = x^2, x > 0$.

❹ (Poser $y = z^2$) $y(x) = \frac{x^4}{4}(2 + \ln x)^2, x > \frac{1}{e^2}$.

❺ $y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}(1 + 4x)^{\frac{3}{2}}\right), x > -\frac{1}{4}$.

❻ (Poser $z = y'$) $y(x) = (x - 1)e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{2+e}{2}, x \in \mathbb{R}$.

❼ (Poser $z = y'$) $y(x) = x^2 - x\ln x, x > 0$.

❽(Poser $z = y'$) $y(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{19}{12}, x \in \mathbb{R}$.

❾ (Poser $z = y'$) $y(x) = c_1x^2 + c_2 - \frac{x}{4} - \frac{5}{12}x^3 + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\operatorname{Arctg} x^2$.

❿ (Poser $z = y'$) $y(x) = c_1x^2 + c_2 - x - \frac{\ln^2 x}{8} - \frac{\ln x}{8}$

Exercice 4.5.

Résoudre

❶ $y''(x) - 4y(x) = 4e^{-2x}$.

❷ $y''(x) + y(x) = \sin x$.

❸ $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2 - \sin x$.

❹ $y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = e^{5x} + \cos x$

❺ $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = e^{4x} + \cos x$.

❻ $y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = xe^x + \cos x$.

❼ $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 2\operatorname{ch} x + 4\operatorname{sh} x$.

❽ $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x$.

❾ $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x^2e^x + \sin x + xe^{2x}\cos x$.

❿ $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = x^2 + x^3 + e^{2x}\sin x$.

Solution

❶ $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - xe^{-2z}$.
❷ $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$.
❸ $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^2 + 4x + 6 - \frac{\cos x}{2}$.
❹ $y(x) = c_1e^x + c_2e^{5x} + \frac{1}{4}xe^{5x} + \frac{1}{26}(2 \cos x - 3 \sin x)$.
❺ $y(x) = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + \frac{x^2}{2}e^{4x} + \frac{1}{289}(15 \cos x - 8 \sin x)$.
❻ $y(x) = c_1e^{-x} \cos \sqrt{3}x + c_2e^{-x} \sin \sqrt{3}x - \frac{4}{49}e^x + \frac{x}{7}e^x + \frac{1}{13}(3 \cos x + 2 \sin x)$.
❼ $y(x) = c_1e^{-x} \cos 2x + c_2e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{8}(\operatorname{ch} x + 5 \operatorname{sh} x)$.
❽ $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{x^3}{6}e^x$.
❾ $y(x) = c_1e^x + c_2e^{3x} - \frac{e^x}{12}(3x + 3x^2 + 2x^3) + \frac{\cos x}{10}(2 - 5xe^{2x}) + \frac{\sin x}{10}(1 + 5e^{2x})$.
❿ $y(x) = c_1e^{2x} \cos x + c_2e^{2x} \sin x - \frac{x}{2}e^{2x} \cos x + \frac{1}{625}(254 + 530x + 425x^2 + 125x^3)$.

Exercice 4.6.

❶ Pour $x \in]0, \pi[$, résoudre $y''(x) + y(x) = -\frac{1}{\sin x}$.

❷ Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, résoudre $y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{\cos x}$.

❸ Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, résoudre $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \frac{e^x}{\cos^2 x}$.

❹ Résoudre $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x + \sin^2 x$.

❺ Résoudre
$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \left(2 + 17x + x^2\right) e^{6x}.$$

❻ Soit $\omega > 0$. Résoudre $y''(x) + \omega^2 y'(x) = 0$.

❼ Soit $\omega > 0$. Résoudre $y''(x) + \omega^2 y(x) = \cos \omega x$.

❽ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre
$$y''(x) + \alpha y'(x) + (\alpha - 1)y(x) = \sin(\alpha - 2)x.$$

❾ Résoudre $y''(x) + 9y(x) = \cos 3x + \sin 3x$.

❿ Résoudre $y''(x) + y'(x) = 3 \cos x$.

Solution

❶ $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \cos x - \sin x \ln(\sin x)$.
❷ $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \cos x + \frac{\sin 2x}{2} \ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$.
❸ $y(x) = c_1e^x \cos x + c_2e^x \sin x - e^x - e^x \sin x \ln\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$.
❹ $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{x^2}{2}e^x + \frac{1}{2} + \frac{1}{50}(3 \cos 2x + 4 \sin 2x)$.
❺ $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \left(-10 + 7x + \frac{x^2}{2}\right) e^{4x}$.
❻ $y(x) = c_1e^{-\omega^2 x} + c_2$.
❼ 9.57 $y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + \frac{x}{2\omega} \sin \omega x$.
❽ 1) $\alpha \neq 2$.

$$y(x) = c_1e^{(1-\alpha)x} + c_2e^{-x} + \frac{((\alpha - 1) - (\alpha - 2)^2) \sin(\alpha - 2)x - \alpha(\alpha - 2) \cos(\alpha - 2)x}{((\alpha - 1) - (\alpha - 2)^2)^2 + \alpha^2(\alpha - 2)^2}.$$

2) $\alpha = 2 . y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$.
❾ $y(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - \frac{x}{6} \cos 3x + \frac{x}{6} \sin 3x$.
❿ $y(x) = c_1e^{-x} + c_2 + \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)$.

Exercice 4.7.

❶ **Résoudre** $x^2y''(x)+xy'(x)=\ln x$.

❷ **Pour** $x\in\mathbb{R}_*^+$, **résoudre** $y''(x)-\frac{1}{x}y'(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

❸ **Pour** $z\in\mathbb{R}_+^*$, **résoudre** $x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=4$.

❹ **Résoudre** $y''(x)+\dfrac{1}{x}y'(x)-\dfrac{1}{x^2}y(x)=\ln x$.

❺ **Soit** $\alpha\in\mathbb{R}$ **Résoudre** $y''(x)+2\alpha y'(x)+y(x)=e^x+e^{-2x}$.

❻ **Soit** $a\in\mathbb{R}$. **Résoudre** $y''(x)+2(1+\alpha)y'(x)+y(x)=x+x^2+x^3$.

❼ **Soient** $\alpha,\omega\in\mathbb{R}$. **Résoudre** $y''(x)+\alpha^2y(x)=3\sin\omega x$.

❽ **Soient** $\alpha,\omega\in\mathbb{R}$ **Résoudre** $y''(x)+2y'(x)+\alpha y(x)=\cos\omega x$.

❾ **Pour** $x\in\mathbb{R}^*$, **Résoudre** $xy''(x)-y'(x)+(1-x)y(x)=0$.

❿ **Résoudre** $\left(1+x^3\right)y''(x)-2xy'(x)+2y(x)=6\left(1+x^2\right)^2$.

Solution

❶ (Poser $z=y'$) $y(x)=c_1\ln x+c_2+\frac{\ln^3 x}{6}, x>0$.

❷ (Poser $z=y'$) $y(x)=c_1x^2+c_2-\frac{x}{2}+\frac{\left(1+x^2\right)}{2}\operatorname{Arctg} x$.

❸ $y(x)=\frac{c_1}{x}+c_2x-4$.

❹ $y(x)=\frac{c_1}{x}+c_2x+\frac{x^2(-4+3\ln x)}{9}, x>0$.

❺ 1) $|\alpha|>1$ et $\alpha\neq\frac{5}{4}$.

$$y(x)=c_1e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)x}+c_2e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)x}+\frac{e^x}{2(1+\alpha)}+\frac{e^{-2x}}{5-4\alpha}.$$

2) $\alpha=1, y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\frac{e^x}{4}+e^{-2x}$.

3) $\alpha=\frac{5}{4}, y(x)=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{-2x}+\frac{2}{9}e^x-\frac{2}{3}xe^{-2x}$.

4) $|a|<1$.

$$y(x)=e^{-\alpha x}\left(c_1\cos\sqrt{1-\alpha^2}x+c_2\sin\sqrt{1-\alpha^2}x\right)+\frac{e^x}{2(1+\alpha)}+\frac{e^{-2x}}{5-4\alpha}.$$

5) $\alpha=-1. y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{x^2}{2}e^x+\frac{e^{-2x}}{9}$.

❻ 1) $\alpha<-2$ ou $\alpha>0$.

$$\begin{aligned}y(x)&=c_1e^{\left(-(1+\alpha)+\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\right)x}+c_2e^{\left(-(1+\alpha)-\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\right)x}\\&-2\left(10+53\alpha+68\alpha^2+24\alpha^3\right)+\left(15+44\alpha+24\alpha^2\right)x-(5+6\alpha)x^2+x^3.\end{aligned}$$

2) $\alpha=-2. y(x)=c_1e^x+c_2xe^x+32+23x+7x^2+x^3$.

3) $-2<\alpha<0$.

$$\begin{aligned}y(x)=\ &e^{-(1+\alpha)}\left(c_1\cos\sqrt{-\alpha(\alpha+2)}x+c_2\sin\sqrt{-\alpha(\alpha+2)x}\right)\\&-2\left(10+53a+68\alpha^2+24\alpha^3\right)+\left(15+44\alpha+24\alpha^2\right)x-(5+6\alpha)x^2+x^3\end{aligned}$$

4) $\alpha=0.(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-20+15x-5x^2+x^3$

❼ 1) $\underline{\alpha=\omega=0}. y(x)=c_1x+c_2$.

2) $\alpha=0$ et $\omega\neq0. y(x)=c_1x+c_2-\frac{3}{\omega^2}\sin\omega x$.

3) $\alpha\neq0$ et $|\omega|\neq|\alpha|. y(x)=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x+\frac{3}{\alpha^2-\omega^2}\sin\omega x$.

4) $\alpha \neq 0$ et $|\omega| = |\alpha|.y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x - \frac{3}{2\omega} x \cos \omega x$.

❽ 1) $\alpha = \omega = 0.y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 + \frac{x}{2}$.

2) $\alpha^2 + \omega^2 \neq 0$. Posons

$$y_0(x) = \frac{\alpha - \omega^2}{\left(\alpha - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2} \cos \omega x + \frac{2\omega}{\left(\alpha - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2} \sin \omega x.$$

a) $\alpha < 1.y(x) = c_1 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})x} + y_0(x)$.

b) $\alpha = 1.y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + y_0(x)$.

c) $\alpha > 1.y(x) = c_1 e^{-x} \cos \sqrt{\alpha - 1} x + c_2 e^{-x} \sin \sqrt{\alpha - 1} x + y_0(x)$.

❾ $y(x) = c_1 e^x + c_2 (2x + 1) e^{-x}$.

❿ $y(x) = c_1 x + c_2 \left(x^2 - 1\right) + x^4 + 3x^2$.

Exercice 4.8.

❶ **Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, Résoudre $xy''(x) + (1 + x)y'(x) + y(x) = \left(\frac{3-x}{x^2}\right) e^x$.**

❷ **Pour $x \in R_{\hat{H}}$, résoudre $x^2 y''(x) - 3xy'(x) - 5y(x) = \dfrac{1}{x^2}$.**

❸ **Pour $x \in R_+^*$, résoudre $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + \left(2 - x^2\right) y(x) = x + 1$.**

❹ **Pour a ER_i^*, résoudre $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1 + x^2$.**

❺ **Résoudre $x^2 y''(x) - 6y(x) = x^3 \ln x$.**

❻ **Résoudre $\left(1 + x^2\right) y''(x) - xy'(x) = 1 + x^2$.**

❼ **Résoudre $x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^2 \ln^2 x$.**

❽ **Résoudre $y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.**

❾ **Pour $x \in |1, +\infty|$ résoudre $(1 - x)y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2 - 2x + 2$.**

❿ **Résoudre $x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = \ln x$.**

Solution

❶ $y(x) = c_1(x + 1) + c_2 e^x + \frac{e^x}{x}$.

❷ $y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 x^5 + \frac{1}{7x^2}$.

❸ En faisant le changement de variable $z(x) = x^2 y(x)$, cette équation différentielle se transforme en l'équation différentielle linéaire du second ordre $z''(x) - z(x) = x + 1$. D'où

$$y(x) = \frac{c_1}{x^2} e^x + \frac{c_2}{x^2} e^{-x} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

❹ $y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x} - 1 + \frac{x^2}{3}$.

❺ $y(x) = c_1 x^3 + \frac{c_2}{x^2} + \frac{x^3 \ln x}{5} \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{5}\right), x > 0$.

❻ (Poser $z = y'$)

$$\begin{aligned} y(x) = {} & c_1 \left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right) \\ & + c_2 + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 1} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + \frac{1}{4} \ln^2 \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \frac{x^4}{4}. \end{aligned}$$

❼ $y(x) = c_1 x + c_2 x^2 - x^2 \ln^2 x + 2x^2 \ln x + \frac{x^2}{3} \ln^3 x, x > 0$.

❽ Poser $z = y'$) $y(x) = c_1 \ln x + c_2 + \frac{\ln^3 x}{6}, x > 0$.
❾ $y(x) = c_1 x + c_2 e^x + x^2$.
❿ $y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 x^3 - \frac{\ln x}{3} + \frac{2}{9}, x > 0$.

Exercice 4.9.

❶ Résoudre $x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = (x-1)^3$ sachant que l'équation homogène assolée posséder doux solutions qui sont de la forme $y(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

❷ Résoudre $x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = (x-1)^3$ sachant que $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est une solution de l'équation homogène assolée.

❸ Soient I un intervalle contention 0 et $p.q : f \to \mathbb{R}$ deux fonction continues Montrer que l'équation différentielle.
$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ n'admet par simultanément x et x^2 pour solution.

❹ Soit $\omega > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ de sorte que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie par $g(x) = e^{\omega x} f(x)$ soit solution de l'équation différentielle :
$y''(x) + \omega y'(x) - \frac{y(x)}{f(x)} = 0$.

❺ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$
1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x.$$

2) En déduire la somme de la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}.$$

❻ Un corps de masse m tombe verticalement d'une certaine altitude. Sa vitesse initiale est nulle. De plus, on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de sa vitesse.
1) Établir l'équation du mouvement et la résoudre.
2) Déterminer la vitesse limite que peut atteindre ce corps.

❼ Trouver la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui ne s'annule pas sauf pour $x = 1$ et qui vérifie : $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = \frac{f^2(x)}{x}$.

❽ Soient $\alpha, \beta > 0$. Résoudre pour $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$.
$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = \alpha g(x) \\ g'(x) + g(x) = \beta f(x) \end{cases}.$$

Solution

❶ $y(x) = c_1x^2 + c_2x^3 + x^2(3+x)\ln x + \frac{3}{2}x - \frac{1}{6}$.
❷ $y(x) = \frac{c_1}{1+x^2} + c_2\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{12}(5 + 2x + x^2)$.
❸ En effet, cas deux fonctions x et x^2 sont linéairement indépendantes et leur wronskien s'annule au point $x = 0$.
❹ $f(x) = c_1e^{-2\omega x} + c_2e^{-\omega x} + \frac{1}{2\omega^2}$.
❺ [1.85) Notons pour commencer que le rayons de convergence $\mathcal{R}$ de cette série entière est $+\infty$ (critère de d'Alembert).

1) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $p \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} + \sum_{n=1}^{p} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} + \sum_{n=0}^{p} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{3p} \frac{x^n}{n!},$$

on obtient, par passage à la limite, que

$$\begin{aligned} f''(x)+f'(x)+f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x, \end{aligned}.$$

2) La fonction f étant l'unique solution l'équation différentielle $y''(x)+y'(x)+y(x)=e^x$ qui satisfait les deux conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{e^x}{3}.$$

Par conséquent, pour $x=1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}=\frac{2}{3\sqrt{e}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{e}{3}.$$

❻ 1a) Equation du mouvement : $my''(x)=mg-\sigma\left(y'(x)\right)^2$ avec $y(0)=y'(0)=0$ où σ est une constante positive.

1b) En faisant le changement de variable $z=y'$, la solution de cette équation

$$y(x)=\frac{m}{\sigma}\ln\left(\text{ch}\sqrt{\frac{\sigma g}{m}}x\right),x\geq 0.$$

2) Puisque pour tout $x>0$:

$$y'(x)=\sqrt{\frac{mg}{\sigma}}\,\text{th}\sqrt{\frac{\sigma g}{m}x}$$

et que la fonction th est strictement croissante, la vitesse limite que peut atteindre ce corps est

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\sqrt{\frac{mg}{\sigma}}.$$

❼ En dérivant les membres de cette égalité par rapport à x on obtient que la fonction cherchée f est l'unique solution de l'équation différentielle

$$f'(x)-\frac{f(x)}{2x}=\frac{x}{2}.$$

qui satisfait la condition initiale $f(1)=0$. Par conséquent $f(x)=\frac{x^2-\sqrt{x}}{3}$.
❽ Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=e^{-x}\,\text{ch}(\sqrt{\alpha\beta}x)\text{ et }g(x)=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}e^{-x}\,\text{sh}(\sqrt{\alpha\beta}x).$$

<u>Exercice</u> 4.10.

Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

❶ $x_0=0, y_0=1$ et
$$y'(x)=xy^4(x).$$
❷ $x_0=0, y_0=1$ et
$$y'(x)+y(x)=y^3(x).$$
❸ $x_0=0, y_0=-\frac{1}{2}$ et
$$y(x)y'(x)-y^2(x)=x^2y^3(x).$$
❹ $x_0=1, y_0=1$ et
$$y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=-y^2(x)\ln x.$$
❺ $x_0=1, y_0=1$ et
$$2xy'(x)+y(x)+3x^2y^2(x)=0.$$
❻ $\alpha>0, x_0=0, y_0=\frac{\alpha}{2}$ et
$$y'(x)-2\alpha y(x)=-2y^2(x).$$
❼ $\alpha,\beta>0, x_0=0, y_0=\frac{\alpha}{2\beta}$ et
$$y'(x)=\alpha y(x)-\beta y^2(x).$$
❽ $x_0=1, y_0=2$ et
$$y'(x)-\frac{3}{x}y(x)+\frac{1}{1+x^2}y^2(x)=0.$$
❾ $x_0=1, y_0=2$ et
$$y'(x)-\frac{2}{x}y(x)=\frac{\sin x}{x^2}y^2(x).$$
❿ $x_0=1, y_0=1$ et
$$y'(x)-\frac{1}{2x}y(x)=y^3(x).$$

Solution

❶ $y(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{2}x^2}}, |x|<\sqrt{\frac{2}{3}}.$

❷ $y(x)=1, x\in\mathbb{R}.$

❸ $y(x)=-\frac{1}{x^2-2x+2}, x\in\mathbb{R}.$

❹ $y(x)=\frac{2}{x\left(2+\ln^2 x\right)}, x>0.$

❺ $y(x)=\frac{1}{x^2}, x>0.$

❻ $y(x)=\frac{\alpha e^{2\alpha x}}{1+e^{2\alpha x}}, x\in\mathbb{R}.$

❼ $y(x)=\frac{\alpha e^{\alpha x}}{\beta(1+e^{\alpha x})}, x\in\mathbb{R}.$

❽ $y(x)=\frac{2x^3}{x^2-\ln(1+x^2)+\ln 2}, x>0.$

❾ $y(x)=\frac{2x^2}{2\cos x+1-2\cos 1}, x\in \left]0, \text{Arccos}\left(\cos 1-\frac{1}{2}\right)\right[.$

❿ $y(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x^2}}, x\in\left]0,\sqrt{2}\right[.$

Exercice 4.11.

Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

$\boxed{1}$ $x_0=0, y_0=\frac{1}{\sqrt{e-1}}$ et
$$y'(x)-(x)\cos x=y^3(x)\cos x.$$
$\boxed{2}$ $x_0=\frac{\pi}{2}, y_0=\frac{1}{\sqrt{e-1}}$ et
$$y'(x)+y(x)\sin x=-y^3(x)\sin x.$$
$\boxed{3}$ $x_0=0, y_0=1$ et
$$y'(x)+xy(x)=xy^4(x).$$
$\boxed{4}$ $x_0=1, y_0=2$ et
$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=\frac{\ln x}{x^2}y^2(x).$$
$\boxed{5}$ $x_0=0, y_0=1$ et
$$y'(x)-y(x)=\frac{\cos 2x}{e^{2x}}y^3(x).$$
$\boxed{6}$ $x_0=1, y_0=2$ et
$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=x^4y^4(x).$$
$\boxed{7}$ $x0=1, y_0=2$ et
$$xy^3(x)y'(x)-y^4(x)=y^{12}(x).$$
$\boxed{8}$ $x_0=1, y_0=\sqrt{2}$ et
$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=\sqrt{1+x^3}y^3(x).$$
$\boxed{9}$ $x_0=0, y_0=2$ et
$$(1+x^2)\,y'(x)=2xy(x)\left(y^4(x)-1\right).$$
$\boxed{10}$ $x_0=0, y_0=2$ et
$$y'(x)-\frac{1}{1+x}y(x)=\frac{1}{1+x^2}y^2(x).$$
$\boxed{11}$ $x_0=0, y_0=2$ et
$$y'(x)-4y(x)=-2y^3(x).$$
$\boxed{12}$ $x_0=1, y_0=\frac{1}{27}$ et
$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=-\sqrt[3]{x^2y(x)}.$$
$\boxed{13}$ $x_0=1, y_0=1$ et
$$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=-\sqrt[3]{y^2(x)}.$$

Solution

$\boxed{1}$ $y(x)=\frac{e^{\sin x}}{\sqrt{e-e^{2\sin x}}}, x\in\left]-\frac{7\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[.$

$\boxed{2}$ $y(x)=\frac{e^{\cos x}}{\sqrt{e-e^{2\cos x}}}, x\in\left]\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right[.$

$\boxed{3}$ $y(x)=1, x\in\mathbb{R}.$

$\boxed{4}$ $y(x)=\frac{2x}{1-\ln^2 x}, x\in\left]\frac{1}{e},e\right[\!\left[.\right.$

$\boxed{5}$ $y(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-\sin 2x}}, x\in\left]-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[.$

$\boxed{6}$ $y(x)=\frac{2x}{\sqrt[3]{4-3x^8}}, x\in\left]0,\sqrt[8]{\frac{4}{3}}\right[.$

$\boxed{7}$ $y(x) = \frac{2x}{\sqrt[8]{257-256x^8}}, |x| < \frac{\sqrt[8]{257}}{2}$.

$\boxed{8}$ $y(x) = \frac{3\sqrt{2}x}{\sqrt{(9+16\sqrt{2})-8(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}}, x \in \left]0 \sqrt[3]{\left(\frac{9}{8}+2\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1}\right[$.

$\boxed{9}$ $y(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{16-15(1+x^2)^4}}, |x| < \sqrt{\frac{2}{\sqrt[4]{15}}-1}$.

$\boxed{10}$ $y(x) = \frac{2(1+x)}{1-2\operatorname{Arctg} x - \ln(1+x^2)}, x \in]-1, \alpha[$. où α est l'unique zéro positif du dénominateur.

$\boxed{11}$ $y(x) = \frac{2e^{4x}}{\sqrt{2e^{8x}-1}}, x > -\frac{\ln 2}{8}$.

$\boxed{12}$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{27}\sqrt{(7-6x)^3} & \text{si } 0 < x < \frac{7}{6} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{7}{6}. \end{cases}$$

$\boxed{13}$ $y(x) = \frac{x}{8}\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3, x > 0$ ou

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}\left(3 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3 & \text{si } 0 < x < 3\sqrt{3} \\ 0 & \text{si } x \geq 3.\sqrt{3} \end{cases}$$

Exercice 4.12.

Résoudre les équations de Riccati suivantes :

❶ $\boldsymbol{x_0 = 1, y_0 = 2}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = y^2(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{3}{x^2}}$.

❷ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = y^2(x) - 2e^{-x}y(x) + e^{-9x} - e^{-x}}$.

❸ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = y^2(x) - 2e^{x}y(x) + e^{2x} + e^{x}}$.

❹ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 3}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = y^2(x) - y(x) - 2}$.

❺ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_1 = 0}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = x^2y^2(x) + x^2}$.

❻ $\boldsymbol{x_0 = 1, y_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{x^2\left(y'(x) + y^2(x)\right) = 2}$.

❼ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 2}$ **et** $\boldsymbol{xy'(x) - y(x) + y^3(x) = y(x) - 1}$.

Solution

❶ $\bar{y}(x) = \frac{1}{x}, y(x) = \frac{3x^4+5}{x(5-x^4)}, x \in \left]0, \sqrt[4]{5}\right[$.

❷ $\bar{y}(x) = e^{-2}, y(x) = -\frac{1}{1+x} + e^{-x}, x > -1$.

❸ $\bar{y}(x) = e^{x}, y(x) = -\frac{1}{1+x} + e^{x}, x > -1$.

❹ $\bar{y}(x) = -1, y(x) = \frac{8+e^{3x}}{4-e^{3x}}, x < \frac{\ln 4}{3}$.

❺ $y(x) = \operatorname{tg}\frac{x^3}{3}, |x| < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}$.

❻ $\bar{y}(x) = -\frac{1}{x}, y(x) = \frac{2\left(x^3-1\right)}{x(x^3+2)}, x > 0$.

❼ $\bar{y}(x) = 1, y(x) = 1 + \frac{1}{1+\ln x}, x > \frac{1}{e}$.

Exercice 4.13.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{y(x)\cos y(x) = x}$.

❷ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{2}}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = \sin y(x)}$.

❸ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et**

$$\boldsymbol{y'(x) = \frac{x}{1+y(x)}}.$$

❹ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et**

$$\boldsymbol{y'(x) = \frac{x}{1-y(x)}}.$$

❺ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) + xy^2(x) = -x.}$

❻ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) + x^2y^2(x) = -x^2.}$

❼ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{(1 + x^2)y'(x) = xe^{y(x)}.}$

❽ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = \sqrt{e-1}}$ **et** $\boldsymbol{y(x)y'(x) + xy^2(x) + x = 0.}$

❾ $\boldsymbol{x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = -1}$ **et** $\boldsymbol{x^2y'(x) - y^2(x) = 1.}$

❿ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_y = 2}$ **et** $\boldsymbol{y^2(x)y'(x) = x^2.}$

Solution

❶ $y(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x^2}{2}, |x| < \sqrt{2}.$

❷ $y(x) = 2 \operatorname{Arctg} e^x, x \in \mathbb{R}.$

❸ $y(x) = -1 + \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}.$

❹ $y(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}, |x| < 1.$

❺ $y(x) = -\operatorname{tg} \frac{x^2}{2}, |x| < \sqrt{\pi}.$

❻ $y(x) = -\operatorname{tg} \frac{x^3}{3}, |x| < \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}.$

❼ $y(x) = -\ln\left(\ln \frac{e}{\sqrt{1+x^2}}\right), |x| < \sqrt{e^2-1}.$

❽ $y(x) = \sqrt{-1 + e^{1-x^2}}, |x| < 1.$

❾ $y(x) = -\operatorname{tg} \frac{1}{x}, x > \frac{2}{\pi}.$

❿ $y(x) = \sqrt[3]{x^3+8}, x > -2.$

Exercice 4.14.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 1}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = xy^4(x).}$

❷ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_y = 1}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = y(x) - 2y^2(x).}$

❸ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 1}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = xy^3(x).}$

❹ $\boldsymbol{x_0 = 1, y_0 = \sqrt{3}}$ **et** $\boldsymbol{y(x)y'(x) + 2x\sqrt{4 - y^2(x)} = 0.}$

❺ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{4}}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) \operatorname{tg} y(x) + e^x \cos^2 y(x) = 0.}$

❻ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{4}}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) \operatorname{tg} y(x) + x^3 \cos^2 y(x) = 0.}$

❼ $\boldsymbol{x_0 = 4, y_0 = 2}$ **et** $\boldsymbol{(x-3)^2y'(x) = x\sqrt{y(x)-1}.}$

❽ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = 2}$ **et** $\boldsymbol{y'(x) = y(x) - \frac{1}{y(x)}.}$

❾ $\boldsymbol{x_0 = 0, y_0 = \frac{1}{2}}$ **et** $\boldsymbol{\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$

❿ $\boldsymbol{x_0 = 1, y_0 = \sqrt{e-1}}$ **et** $\boldsymbol{xy(x)y'(x) = 1 + x^2 + y^2(x) + x^2y^2(x).}$

Solution

❶ $y(x) = \frac{e^x}{2e^x - 1}, x > -\ln 2.$

❷ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

❸ $y(x) = \sqrt{4 - x^4}, |x| < \sqrt{2}.$

❹ $y(x) = \ln\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 1\right), x \in \mathbf{R}.$

❺ $y(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{3 - 2e^x}, x < \ln \frac{3}{2}.$

❻ $y(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{1 - \frac{x^4}{2}}, |x| < \sqrt[4]{2}.$

❼ $y(x) = 1 + \frac{1}{4}\left(\ln(x-3) - \frac{3}{x-3} + 5\right)^2, x > 3.$

❽ $y(x) = \sqrt{1 + 3e^{2x}}, x \in \mathbb{R}.$

❾ $y(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x + \sqrt{1-x^2}\right), x \in \left]-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[.$

❿ $y(x) = \sqrt{x^2e^{x^2} - 1}, x > \alpha$ où α est l'unique solution positive de l'équation $x^2e^{x^2} - 1 = 0.$

Exercice 4.15.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $x_0 = 1, y_0 = 1$ **et** $y(x)y'(x) - (x + \sin x)e^{-y^2(x)} = 0.$

❷ $x_0 = 1, y_0 = 1$ **et** $xy^6(x) - x^2y^2(x)y'(x) = 0.$

❸ $x_0 = 0, y_0 = 0$ **et** $x(1 + 2y(x) + y^2(x)) - (1 + x^2)(1 + y(x))y'(x) = 0.$

❹ $x_0 = 1, y_0 = 2$ **et** $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{y(x)}{\ln y(x) - \ln x}.$

❺ $x_0 = 1, y_0 = \sqrt{2}$ **et** $x^4 + y^4(x) - 2x^3y(x)y'(x) = 0.$

❻ $x_0 = \pi_1, y_0 = \pi$ **et** $y'(x) + \sin\left(\frac{x + y(x)}{2}\right) = \sin\left(\frac{x - y(x)}{2}\right).$

❼ $x_0, y_0 = 0$ **et** $y'(x) = \cos\left(\frac{y(x)}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{y(x)}{3} - x\right).$

❽ $x_0 = 0, y_0 = 1, y'(0) = 1$ **et** $2y'(x)y''(x) = (y'(x))^2\left(1 + (y'(x))^2\right).$

❾ $x_0 = 0, y_0 = -\sqrt{e^4 - 1}$ **et** $y(x)y'(x) - (x^2 + e^x)(1 + y^2(x)) = 0.$

❿ $x_0 = 0, y_0 = 1$ **et** $y(x)y'(x) = -x + \sqrt{x^2 + y^2(x)}.$

Solution

❶ $y(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 2\cos x + 2 + e)}, x \in \mathbb{R}.$

❷ $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 3\ln x}}, 0 < x < \sqrt[3]{e}.$

❸ $y(x) = -1 + \sqrt{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}.$

❹ (Poser $y(x) = xz(x)$) $y(x) = xe^{\sqrt{2(x-1) + \ln^2 2}}, x > 1 - \frac{\ln^2 2}{2}.$

❺ (Poser $y(x) = xz(x)$) $y(x) = x\sqrt{1 - \frac{1}{\ln\frac{x}{e}}}, 0 < x < e.$

❻ $y(x) = 4\text{Arctg}e^{2(1 - \sin\frac{x}{2})}, x \in \mathbb{R}.$

❼ $y(x) = -\frac{3}{2}\pi + 6\text{Arctg}e^{\frac{2}{3}\sin x}, x \in \mathbb{R}.$

❽ 9.146 Poser $z = (y')^2$) $y(x) = 1 + \text{Arcsin}(e^x - 1), x < \ln 2.$

❾ $y(x) = -\sqrt{-1 + e^{2(\frac{x^3}{3} + e^x + 1)}}, x < \alpha$ où α est l'unique solution de l'équation $\frac{x^3}{3} + e^x + 1 = 0$ qui, de plus, est négative.

❿ $y(x) = \sqrt{2x + 1}, x > -\frac{1}{2}.$

Exercice 4.16.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $y'(0) = y(0) = 0$ **et** $y''(x) = 1 + (y'(x))^2.$

❷ $x_0 = 0, y_0 = 1$ **et** $y'(x) = \sqrt{y(x) + \sin x} - \cos x.$

❸ $x_0 = 0, y_0 = \frac{1}{2}$ **et** $(1 + x)y'(x) = y(x)(1 - y(x)).$

❹ $x_0 = 0, y_0 = 1$ **et** $x^2(1 - 3y(x)) - y'(x) = 0.$

❺ **Trouver la fonction** $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **qui vérifie** $y(x) = \frac{\pi}{2} + \int_1^x \frac{\sin y(t)}{t}dt.$

Solution

❶ (Poser $z = y'$) $y(x) = -\ln\cos x, |x| < \frac{\pi}{2}.$

❷ $y(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \sin x, x > -2.$

❸ $y(x) = \frac{1+x}{2+x}, x > -2.$

❹ $y(x) = \frac{1 + 2e^{-x^3}}{3}, x \in \mathbb{R}.$

❺ Puisque $y(1)=\frac{\pi}{2}$ et pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[;y'(x)=\frac{\sin y(x)}{x}$, on obtient, en intégrant, $y(r)=2\text{Aretg}x$.

Exercice 4.17.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $x_0=1, y_0=0$ **et** $y'(x)=2+\dfrac{y(x)}{x}$.

❷ $x_0=1, y_0=0$ **et** $xy'(x)=xe^{-\frac{y(x)}{x}}+y(x)$.

❸ $x_0=1, y_0=0$ **et** $x^2y'(x)=x^2+xy(x)-y^2(x)$.

❹ $x_0=1, y0=\frac{\pi}{4}$ **et** $xy'(x)=y(x)+x\cos^2\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❺ $x_0=1, y0=\frac{\pi}{2}$ **et** $xy'(x)=y(x)-2x^3\sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❻ $x_0=1, y_0=\frac{\pi}{6}$ **et** $xy'(x)=y(x)+x\,\text{tg}\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❼ $x_0=1, y_0=\frac{\pi}{6}$ **et** $xy'(x)=y(x)-x^2\text{tg}\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❽ $x_0=1, y_0=1$ **et** $y'(x)=\frac{y(x)}{x}-2\sqrt{\frac{y(x)}{x}}$.

❾ $x_0=1, y_0=0$ **et** $xy'(x)=y(x)+\sqrt{x^2+y^2(x)}$.

❿ $x_0=1, y_0=\frac{1}{2}$ **et** $y(x)+(x-y(x))y'(x)=0$.

Solution

❶ $y(x)=x\ln x^2, x>0$.

❷ $y(x)=x\ln(\ln ex), x>\frac{1}{e}$.

❸ $y(x)=x\frac{x^2-1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

❹ $y(x)=x\,\text{Arctg}(1+\ln x), x>0$.

❺ $y(x)=2x\,\text{Arctg}\,e^{1-a^2}, x>0$.

❻ $y(x)=x\,\text{Arctg}\,\frac{x}{2}, 0<x<2$.

❼ $y(x)=x\text{Arcsin}\frac{e^{1-x}}{2}, x>1-\ln 2$.

❽ $y(x)=x\ln^2\frac{e}{x}, 0<x<e$.

❾ $y(x)=\frac{x^2-1}{2}, x\in\mathbb{R}$.

❿ $y(x)=x-\frac{\sqrt{4x^2-3}}{2}, x>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 4.18.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $y(1)=0, y'(1)=\frac{1}{2}$ **et** $x^3y''(x)-x^2y'(x)=-2x^3\left(y'(x)\right)^2$.

❷ $x_0=1, y_0=2$ **et** $xy'(x)=y(x)\left(1+\ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)\right)$.

❸ $x_0=1, u_0=0$ **et** $x^2+y^2+x^2y'=0$.

❹ $x_0=2, y_0=-3$ **et** $y'(x)=-\frac{2x+y(x)+1}{x+y(x)+2}$.

❺ **Soient** I **un intervalle ouvert,** $p.q:I\to\mathbb{R}$ **deux fonctions continues et** $y_1,y_2:I\to\mathbb{R}$ **deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle.**
$y''(x)+p(x)y'x+q(x)y(x)=0$.
1) Montrer que pour tout $x\in I$ **:** $y_1^2(x)+y_2^2(x)\neq 0$.
2) Montrer que s'il existe deux éléments $a<b$ **de** I **pour lesquels**

❻ **Soit** $q:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ **une fonction continue telle que**

$$\int_1^{+\infty}q(t)dt=+\infty.$$

Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y''(x)+q(x)y(x)=0$**. s'annule une infinité de fois.**

$y_1(a) = y_1(b) = 0$, il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel $y_2(c) = 0$.

3) En déduire que les zéros de la fonction y_1 sont isolés.

$\boxed{\text{Solution}}$

❶ (Poser$z = y'$) $y(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{2}, x \in \mathbb{R}$.
❷ $y(x) = xe^{x \ln 2}, x > 0$.
❸ $y(x) = \frac{x}{2} \left(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right), e^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}} < x < e^{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$.
❹ $y(x) = -(x+2) + \sqrt{2 - (x-1)^2}, |x-1| < \sqrt{2}$.
❺ 1) Soit $x \in I$. Puisque $\omega\left[y_1, y_2\right](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1^n(x)y_2(x) \neq 0$, an doit obligatoirement avoir $y_1^2(x) + y_2^2(x) \neq 0$.
2) Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction y_2 ne s'annule pas dans $]a, b[$. Ainsi, d'après 1), on a que pour tout $x \in [a, b] : y_2(x) \neq 0$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}.$$

Cette fonction est continue et, de plus, pour tout $x \in]a, b[$:

$$f'(x) = -\frac{\omega\left[y_1, y_2\right](x)}{y_2^2(x)} \neq 0.$$

Comme $f(a) = f(b) = 0$, d'après le théorème de Rolle, une telle fonction f n'existe pas. D'où contradiction.
3) Raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que $\alpha \in I$ est un zéro non isolé de la fonction y_1. Alors, il existe une suite (α_n) d'éléments distincts de $I \backslash \{\alpha\}$ qui converge vers α et telle que pour tout $n \in \mathbb{N} : y_1\left(\alpha_n\right) = 0$.

D'après 2), on sait qu'a tout entier $n \geq 0$, on peut associer un élément β_n de I strictement compris entre α_n et α_{n+1} et telle que $y_2\left(\beta_n\right) = 0$. Comme, par construction, $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \alpha$, on a, grâce à la continuité de la fonction y_2, que

$$y_2(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} y_2\left(\beta_n\right) = 0;$$

ce qui, d'après 1), est impossible. D'où contradiction.
❻ Raisonnons par l'absurde et supposons que l'équation différentielle proposée possède une solution $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Alors, il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $x \geq a : y(x) \neq 0$; ce qui implique, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, que la fonction y garde un signe constant sur $[a, +\infty[$.
Pour les besoins de la démonstration, on va supposer que pour tout $x \geq a : y(x) > 0$ (l'antre cas se traitant de la même manière). Considérons à présent la fonction auxiliaire $z : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$z(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)}.$$

Ainsi, en remarquant que pour tout $x > a : z'(x) = q(x) + z^2(x)$, on obtient pour tout $x > a$:

$$\begin{aligned} z(x) &= z(a) + \int_a^x z'(t)dt = z(a) + \int_a^x q(t)dt + \int_a^x z^2(t)dt \\ &\geq z(a) + \int_a^x q(t)dt; \end{aligned}$$

ce qui entraine, du fait que $\int_1^{+\infty} q(t)dt = +\infty$, l'existence d'un nombre $b > a$ tel que $z(b) > 0$. Par conséquent

$$y'(b) = -y(b)z(b) < 0.$$

D'autre part, puisque pour tout $x > a$: $y''(x) = -q(x)y(x) < 0$, la fonction y' est strictement décroissante sur $]a, +\infty[$. Ainsi, en utilisant le théorème des accroissements finis, on peut écrire que pour tout $x \in]b, +\infty[$:

$$y(x) < y(b) + y'(b)(x - b).$$

Finalement, de ces résultats, on déduit immédiatement qu'il existe un nombre $c > b$ te que $y(c) < 0$. D'où contradiction.

Chapitre 5

Intégrales doubles

Exercice 5.1.

❶ **Soit $D = [0,1] \times [0,2]$. Calculer**
$$\iint_D y \frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x} dxdy.$$

❷ **Soit $D = [0,2] \times [0,1]$. Calculer**
$$\iint_D \left(x^3 + 3x^2y + y^3\right) dxdy.$$

❸ **Soit $D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer**
$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2} dxdy.$$

❹ **Soit $D = [0,\pi] \times [0,1]$. Calculer**
$$\iint_D x \sin xy dxdy.$$

❺ **Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer**
$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2} dxdy.$$

❻ **Soit D l'intérieur du triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$ et $C = (\pi, \pi)$. Calculer**
$$\iint_D x \cos(x+y) dxdy.$$

❼ **Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < \pi\}$. Calculer**
$$\iint_D y^2 e^{xy} dxdy.$$

❽ **Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1, x + y < 3\}$. Calculer**
$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}.$$

❾ **Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Calculer**
$$\iint_D 6^x 2^y dxdy.$$

❿ **Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 4x, 1 < xy < 2\}$ Calcule**
$$\iint_D x^2 y^2 dxdy.$$

Solution

❶ $$\iint_D y \frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x} dxdy = \int_0^1 \frac{(e^x)^2}{1+e^x} dx \int_0^2 y e^{y^2} dy = \int_1^e \frac{t}{1+t} dt \int_0^2 y e^{y^2} dy$$
$$= \left(t - \ln(1+t)\right)\Big|_1^e \left(\frac{e^{y^2}}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left(e - 1 - \ln\frac{1+e}{2}\right)\left(e^4 - 1\right).$$

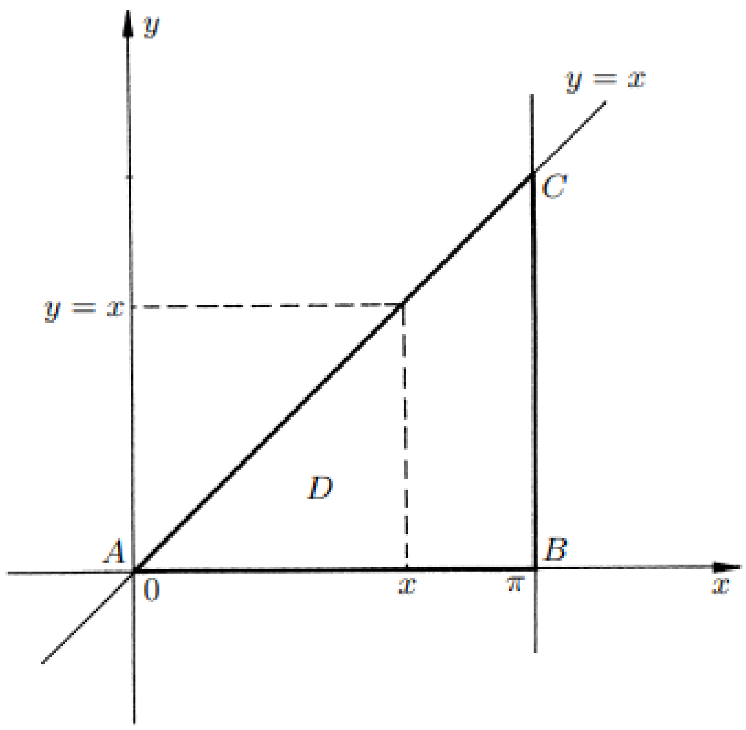
❷ $$\iint_D \left(x^3 + 3x^2y + y^3\right) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^1 \left(x^3 + 3x^2y + y^3\right) dy$$
$$= \int_0^2 \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right) dy = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{17}{2}.$$

❸ $$\iint_D \frac{x\sin y}{1+x^2}dxdy = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y dy$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)\Big|_0^1 (-\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 2}{2}.$$

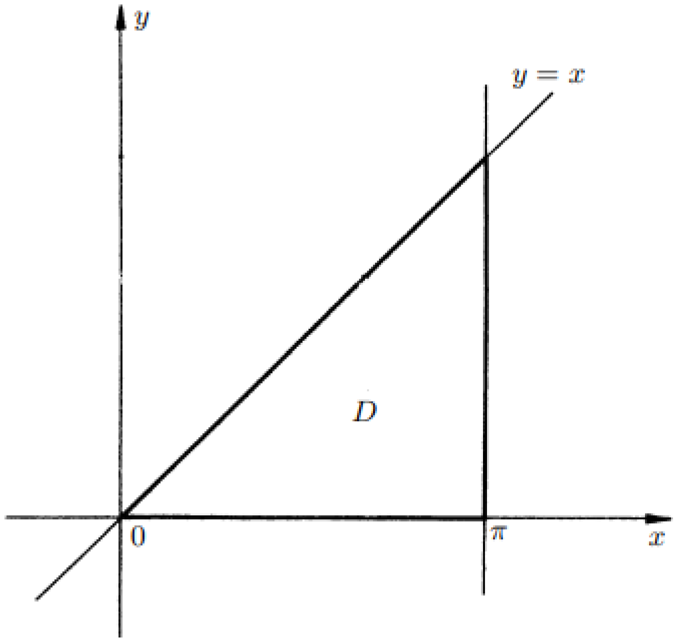
❹ $$\iint_D x\sin xy dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^1 x \sin xy dy = \int_0^{\pi}(1-\cos x)dx$$
$$= (x-\sin x)|_0^{\pi} = \pi.$$

❺ $$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy = \int_1^2 dy \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx = \int_1^2 \operatorname{Arctg}\frac{1}{y}dy$$
$$= y \operatorname{Arctg}\frac{1}{y}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{y}{1+y^2}dy = 2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)\Big|_1^2$$
$$= 2\operatorname{Arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

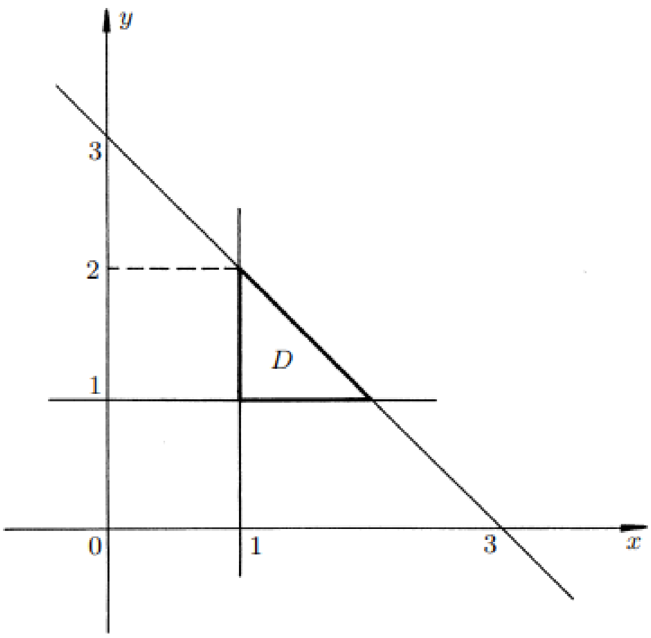
❻ $$\iint_D x\cos(x+y)dxdy = \int_0^{\pi} dx.$$
$$= \int_0^x x\cos(x+y)dy = \int_0^{\pi} x(\sin 2x - \sin x)dx$$
$$= \left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} + x\cos x - \sin x\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{3\pi}{2}.$$



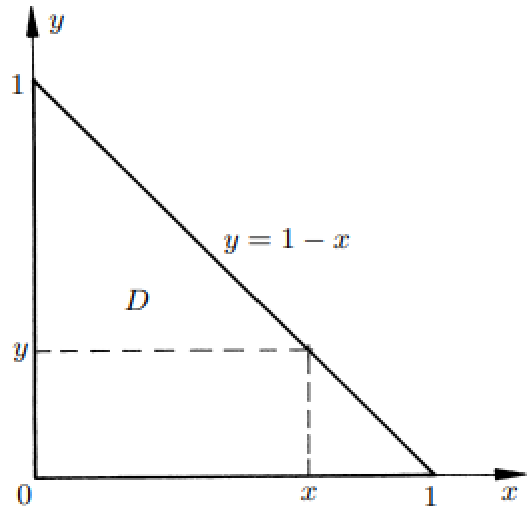
❼ $$\iint_D y^2 e^{xy}dxdy = \int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} y^2 e^{xy}dx = \int_0^{\pi} y\left(e^{\pi y} - e^{y^2}\right)dy$$
$$= \left(\frac{y}{\pi}e^{\pi y} - \frac{e^{\pi y}}{\pi^2} - \frac{e^{y^2}}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2}\right)e^{\pi^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2}.$$



❽ $$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3} = \int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = -\frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{9} + \frac{1}{(x+1)}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{36}.$$



❾ $$\iint_D 6^x 2^y dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 6^x 2^y dy = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \left(2e^{x\ln 3} - e^{x\ln 6}\right) dx$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2}{\ln 3}e^{x\ln 3} - \frac{1}{\ln 6}e^{x\ln 6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{4}{\ln 3} - \frac{5}{\ln 6}\right).$$

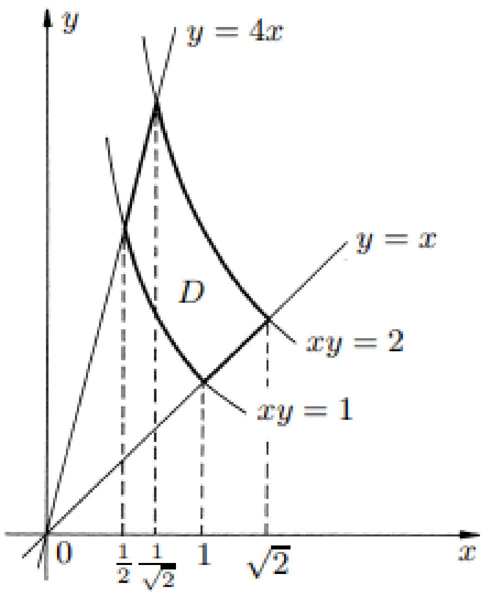


⑩ $\iint_D x^2y^2dxdy$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{\frac{1}{x}}^{4x} x^2y^2dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x^2y^2dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{x}^{\frac{2}{x}} x^2y^2dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(64x^5 - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{7}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int_{1}^{\sqrt{2}} \left(\frac{8}{x} - x^5\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{32}{3}x^6 - \ln x\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{7}{3}\ln x\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} + \frac{1}{3}\left(8\ln x - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{7}{3}\ln 2.$$



<u>Exercice</u> 5.2.

❶ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $0 < x < y < 2x, xy < 4, x^2+y^2 > 4\}$. **Calculer**

$$\iint_D x^2 y\,dxdy.$$

❷ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $1 < x < \sqrt{2}, 0 < xy < 1, x^2+y^2 > 2\Big\}$. **Calculer**

$$\iint_D xy^2\,dxdy.$$

❸ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $0 < y < x, x+y-2 < 0\}$. **Calculer**

$$\iint_D |(x-y)(x+y-2)|\,dxdy.$$

❹ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x < y, y > x^2\}$. **Calculer**

$$\iint_D x \sin y\,dxdy.$$

❺ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$. **Calculer**

$$\iint_D \left(x^3+y^3\right) dxdy.$$

❻ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x > 1, 4 < xy < 8, 4x-y-4 < 0\}$. **Calculer**

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}.$$

❼ **Soit** $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x^2+y^2 < 1, x > \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}$. **Calculer**

$$\iint_D (x-y)\,dxdy.$$

❽ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x(\ln x - 1) + 1 < y < \ln x\}$. **Calculer**

$$\iint_D x\,dxdy.$$

❾ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $1 < x^2+y^2 < 4\}$. **Calculer**

$$\iint_D \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{2+\cos\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy.$$

❿ **Soit** $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $1 < (x-2)^2+y^2 < 4, y > 0\}$. **Calculer**

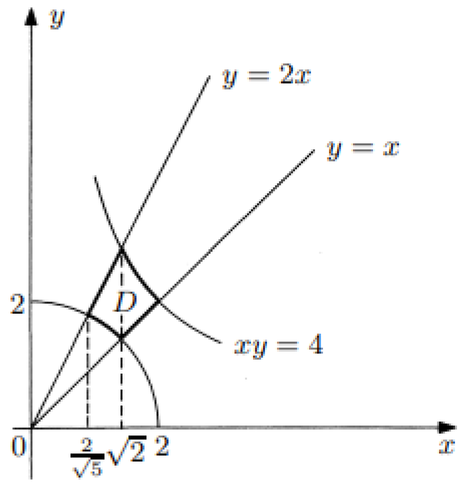
$$\iint_D \cos\left(x^2+y^2-4x+4\right) dxdy.$$

Solution

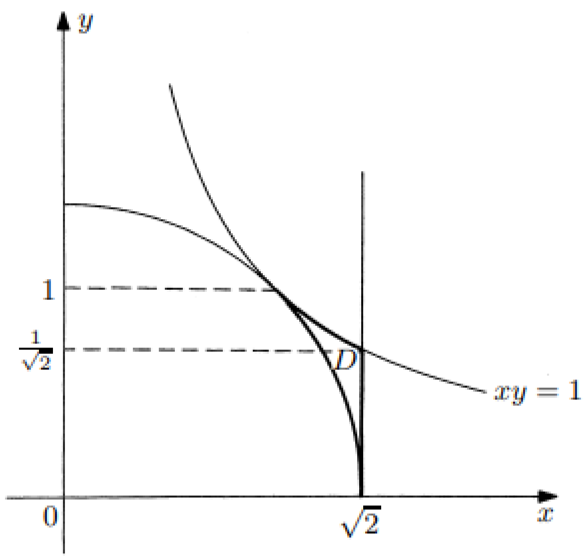
❶ $$\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} x^2 y\,dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{x}^{\frac{4}{x}} x^2 y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} \left(5x^4 - 4x^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2} \left(16 - x^4\right) dx$$

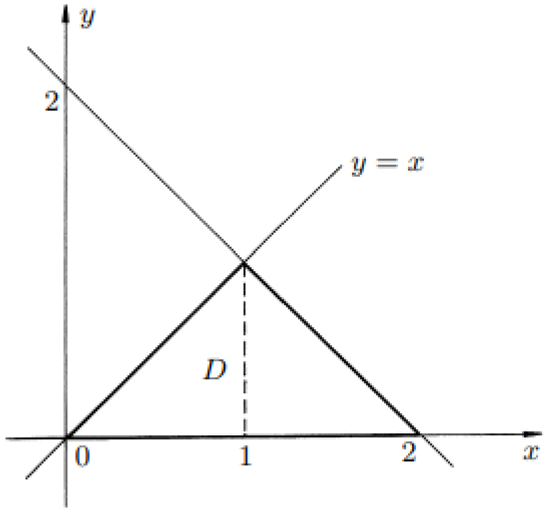
$$= \frac{1}{2}\left(x^5 - \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = -\frac{104}{15}\sqrt{2} + \frac{32}{375}\sqrt{5} + \frac{64}{5}.$$



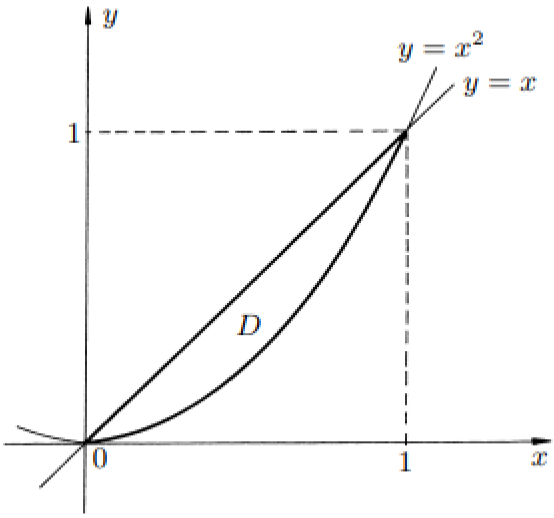
❷ $$\iint_D xy^2dxdy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2}} xy^2dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\frac{1}{y}} xy^2dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^4dy + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(y^2-1\right)^2 dy$$
$$= \frac{y^5}{10}\bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}\left(\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}y^3 + y\right)\bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$



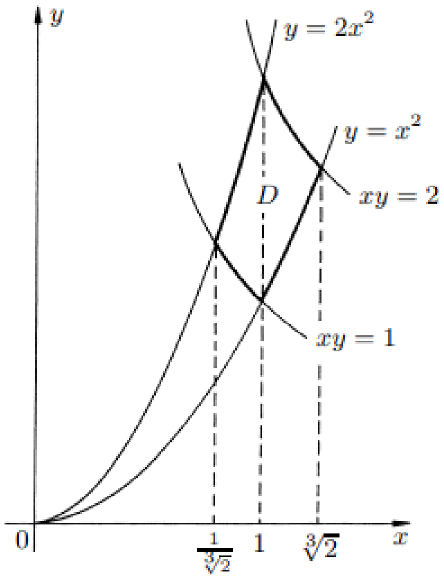
❸ $$\iint_D |(x-y)(x+y-2)|dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)(2-x-y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x-y)(2-x-y)dy$$
$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) dx + \int_1^2 \left(4x - 4x^2 + x^3 - (2-x)^2 + \frac{(2-x)^3}{3}\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}\right)\bigg|_0^1 + \left(2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{(2-x)^3}{3} - \frac{(2-x)^4}{12}\right)\bigg|_0^2 = \frac{1}{3}.$$



❹ $$\iint_D x\sin y\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} x\sin y\,dy = \int_0^1 x\left(\cos x^2-\cos x\right)dx$$
$$= \left(\frac{\sin x^2}{2} - x\sin x - \cos x\right)\Big|_0^1 = 1-\frac{\sin 1}{2}-\cos 1.$$



❺ $$\iint_D \left(x^3+y^3\right)dxdy$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1} dx\int_{\frac{1}{x}}^{2x^2}\left(x^3+y^3\right)dy + \int_1^{\sqrt[3]{2}} dx\int_{x^2}^{\frac{2}{x}}\left(x^3+y^3\right)dy$$
$$= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1}\left(2x^5+4x^8-x^2-\frac{1}{4x^4}\right)dx + \int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(2x^2+\frac{4}{x^4}-x^5-\frac{x^8}{4}\right)dx$$
$$= \left(\frac{x^6}{3}+\frac{4}{9}x^9-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{12x^3}\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^{1} + \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{3x^3}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^9}{36}\right)\Big|_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{37}{36}.$$



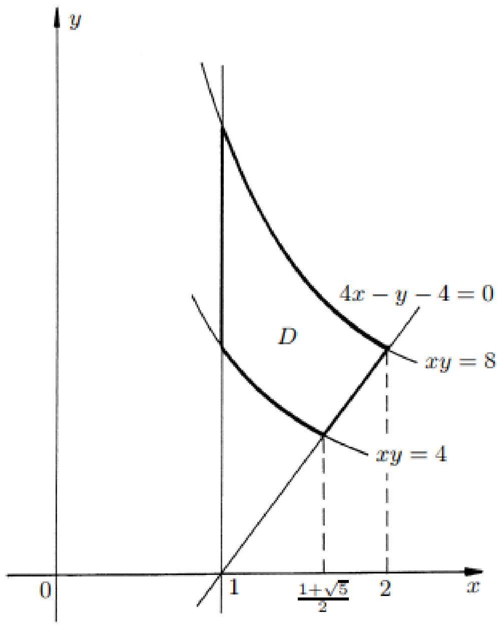
$$❻ \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}} = \int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} dx \int_{\frac{4}{x}}^{\frac{8}{x}} \frac{dy}{\sqrt{xy}} + \int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2} dx \int_{4x-4}^{\frac{8}{x}} \frac{dy}{\sqrt{xy}}$$

$$= 4(\sqrt{2}-1)\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{dx}{x} + 4\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2} \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x(x-1)}}{x}\right) dx$$

$$= 4\sqrt{2}\ln 2 - 4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 4\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x} dx$$

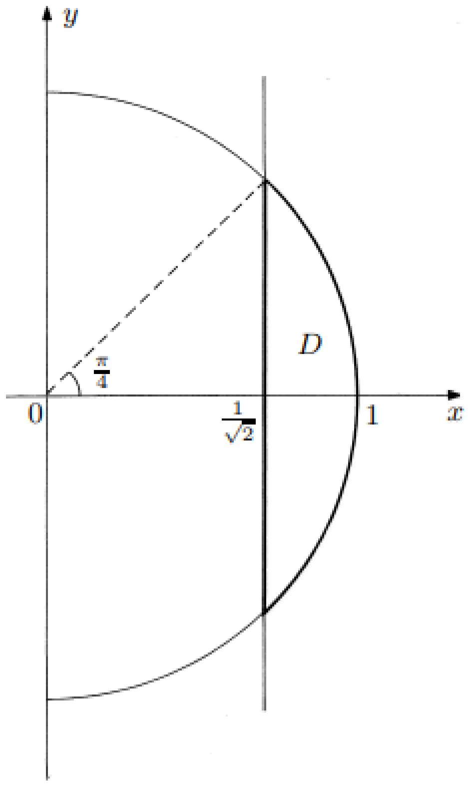
$$= 4\sqrt{2}\ln 2 - 4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 4(\sqrt{x(x-1)} - \ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}))\Big|_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{2}$$

$$= 4\left(\sqrt{2}\ln 2 - \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) + 1 - \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\right).$$



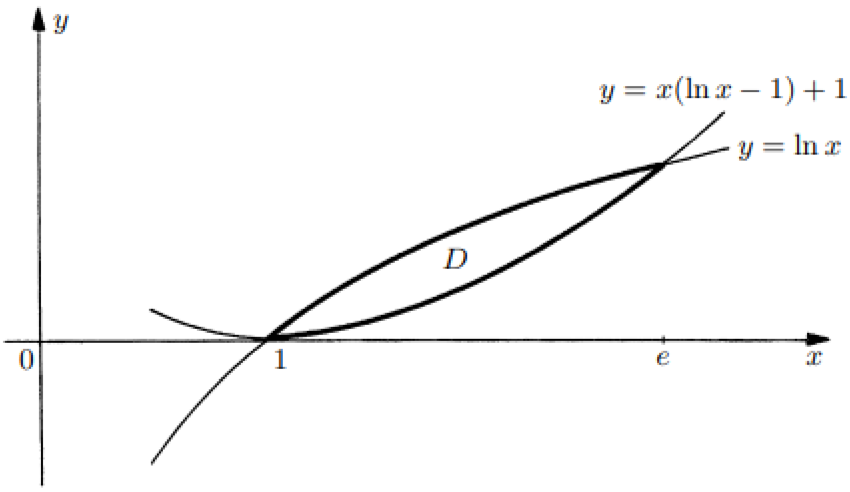
❼ $\iint_D (x-y)dxdy = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)dy = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx$

$$= -\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$



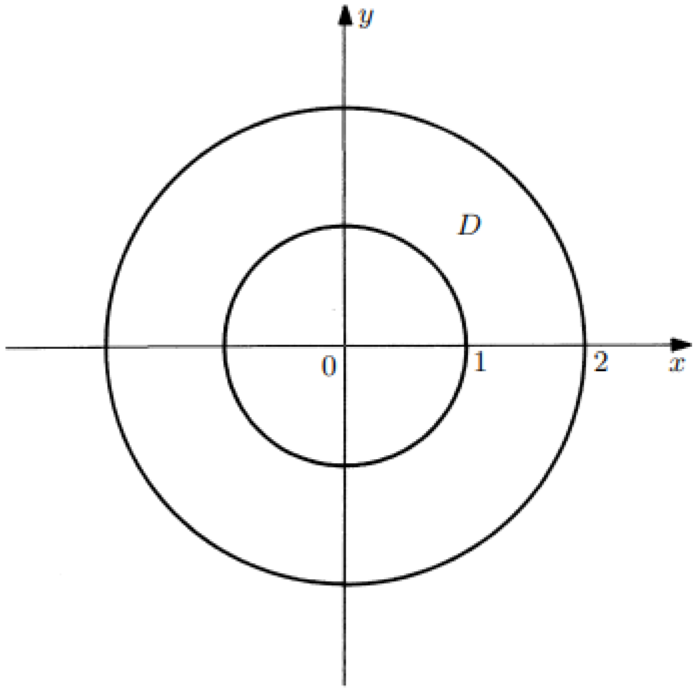
❽ $\int_D xdxdy = \int_1^e dx \int_{x(\ln x-1)+1}^{\ln x} xdy = \int_1^e \left(x\ln x - x^2\ln x + x^2 - x\right) dx$

$$= \left(\frac{x^2}{6}(3-2x)\ln x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{4}{9}x^3\right)\Big|_1^e = \frac{e^3}{9} - \frac{e^2}{4} + \frac{11}{36}.$$



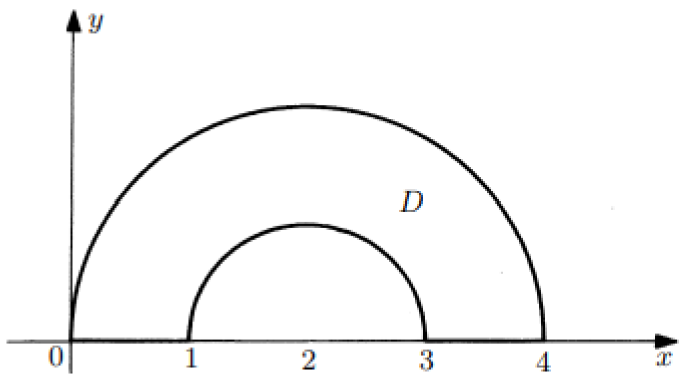
❾ Puisque $D = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 1 < \rho < 2, 0 \le \theta < 2\pi\}$, on a

$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{\sin\rho^2}{2+\cos\rho^2}\rho d\rho$$
$$= -\pi\ln\left(2+\cos\rho^2\right)\Big|_1^2 = \pi\ln\frac{2+\cos 1}{2+\cos 4}.$$



❿ Puisque $D = \{(2+\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 1 < \rho < 2, 0 < \theta < \pi\}$, on a

$$\iint_D \cos\left(x^2+y^2-4x+4\right)dxdy = \int_0^{\pi} d\theta \int_1^2 \rho\cos\rho^2 d\rho$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(\sin\rho^2\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}(\sin 4 - \sin 1).$$



<u>Exercice</u> 5.3.

❶ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, y > 1\}$. Calculer**

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dxdy.$$

❷ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 36, x > 3\}$. Calculer**

$$\iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dxdy.$$

❸ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$. Calculer**

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

❹ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x < 0, x > 1\}$. Calculer**

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

❺ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x < 0\}$. Calculer**

$$\iint_D xy\left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

❻ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4, 0 < y < x\}$. Calculer**

$$\iint_D \frac{y^2 \cos\left(x^2 + y^2\right)}{x^2} dxdy.$$

❼ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + 9y^2 < 144, 0 < y < x\}$. Calculer**

$$\iint_D x dxdy.$$

❽ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 < 36, x > 0, y > 0\}$. Calculer**

$$\iint_D x^2 y^4 dxdy.$$

❾ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 < 36, y > 1 \; x - y > 0\}$. Calculer**

$$\iint_D xy dxdy.$$

❿ **Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9(x-2)^2 + 25(y+1)^2 < 225, y < x - 3, y > -x + 1\}$. Calculer**

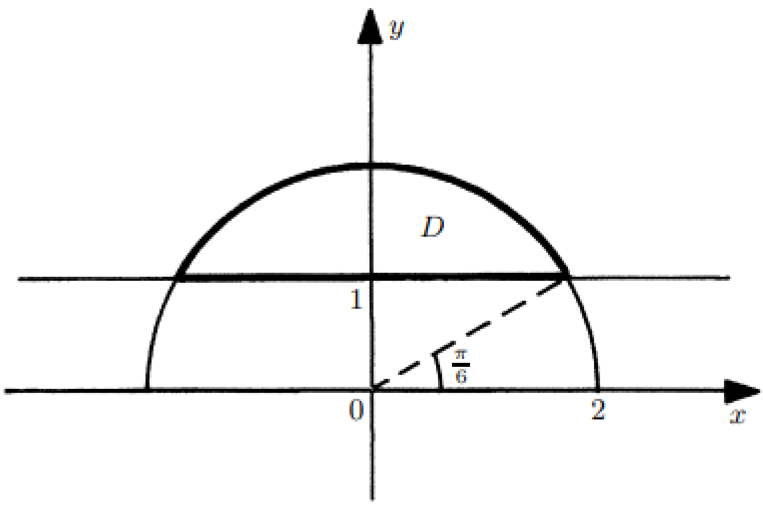
$$\iint_D (x-2)(y+1)^2 dxdy.$$

Solution

❶ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \frac{1}{\sin\theta} < \rho < 2, \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dxdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2} \rho\sin^2\theta d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(2\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \cos 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}(\theta - \sin 2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

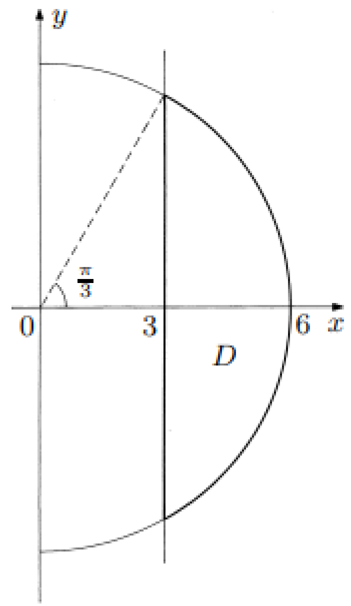


❷ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \frac{3}{\cos\theta} < \rho < 6, |\theta| < \frac{\pi}{3}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{3}{\cos\theta}}^{6} \frac{\cos\theta}{\rho^2} d\rho$$

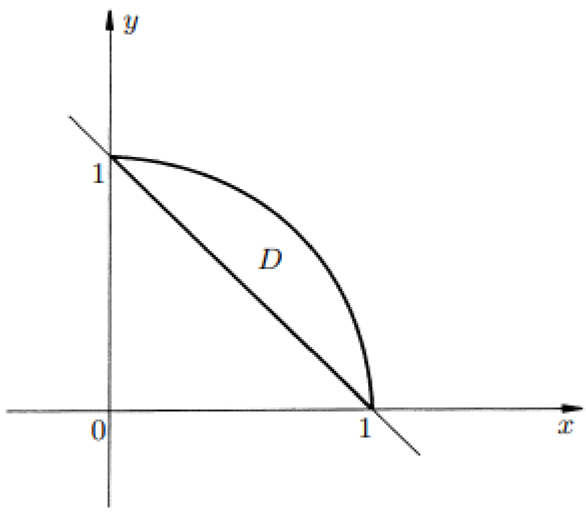
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{\cos\theta}{6} + \frac{\cos^2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\cos\theta + 1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\sin\theta + \theta + \frac{\sin\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\pi}{9}.$$



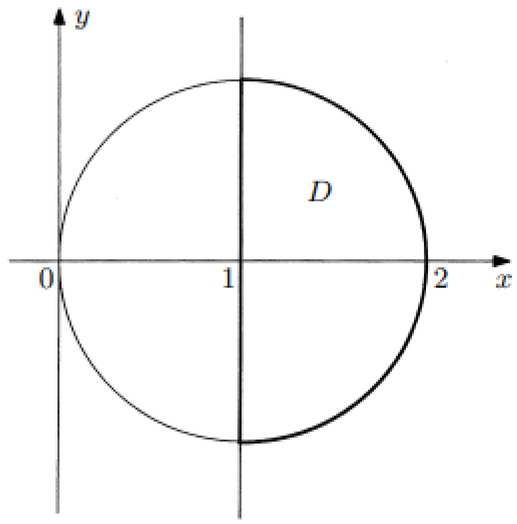
❸ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} \frac{d\rho}{\rho^3} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{4}\cos 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$



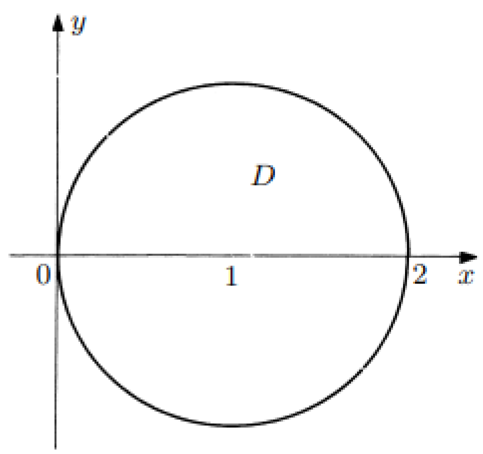
❹ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \frac{1}{\cos\theta} < \rho < 2\cos\theta, |\theta| < \frac{\pi}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{d\rho}{\rho^3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{4\cos^2\theta} + \cos^2\theta\right) d\theta$$
$$= -\frac{\operatorname{tg}\theta}{4} + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$



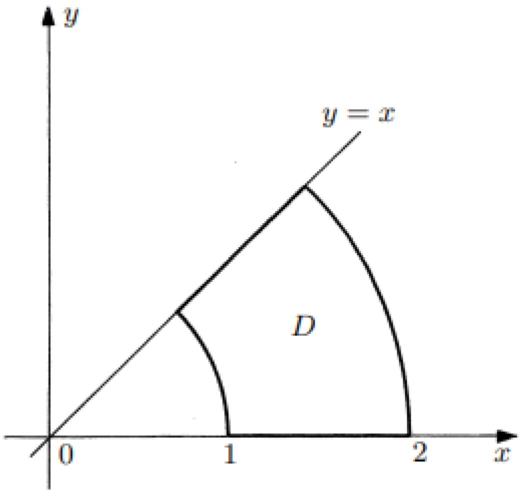
❺ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 2\cos\theta, |\theta| < \frac{\pi}{2}\right\}$, on a

$$\iint_D xy\left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \left(\rho^5 \sin\theta\cos\theta\right) d\rho$$
$$= \frac{32}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\sin\theta d\theta = -\frac{4}{3}\cos^8\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$



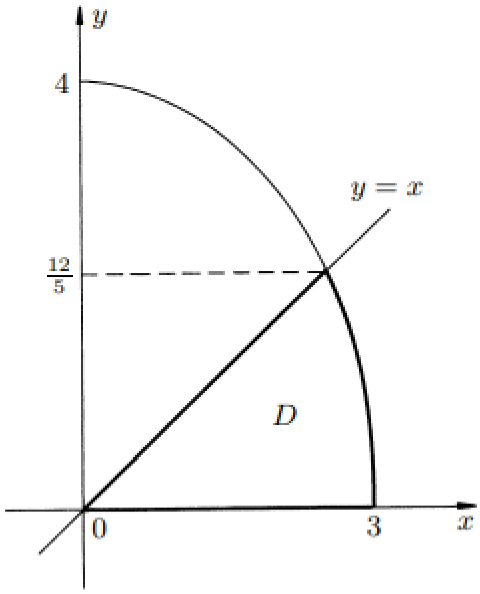
❻ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 1 < \rho < 2\cos\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{y^2\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2\theta d\theta \int_1^2 \rho\cos\rho^2 d\rho = (\operatorname{tg}\theta - \theta)|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\rho^2}{2}\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)(\sin 4 - \sin 1).$$



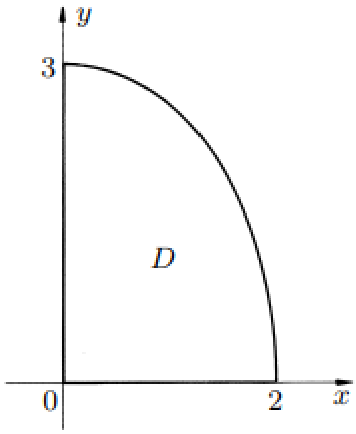
❼ Puisque $D = \left\{(3\rho\cos\theta, 4\rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \operatorname{Arctg}\frac{3}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D x dx dy = \int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}} \cos\theta d\theta \int_0^1 36\rho^2 d\rho = 12\sin\theta\Big|_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{4}} = \frac{36}{5}.$$



❽ Puisque $D = \left\{(2\rho\cos\theta, 3\rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\iint_D x^2 y^4 dx dy \\
&\qquad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \left(1944\rho^7\cos^2\theta\sin^4\theta\right) d\rho = 243\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta\sin^4\theta\right) d\theta \\
&\qquad = \frac{243}{32}\left(2\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{2} + \frac{\sin 6\theta}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{243\pi}{32}
\end{aligned}$$

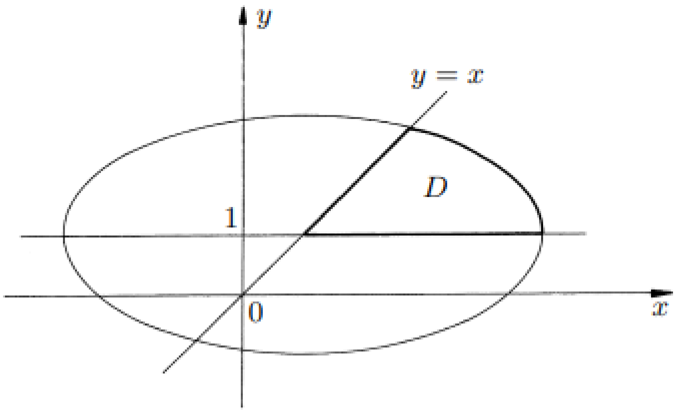


❾ Puisque

$$D = \left\{(1+3\rho\cos\theta, 1+2\rho\sin\theta) : 0<\rho<1, 0<\theta<\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}\right\},$$

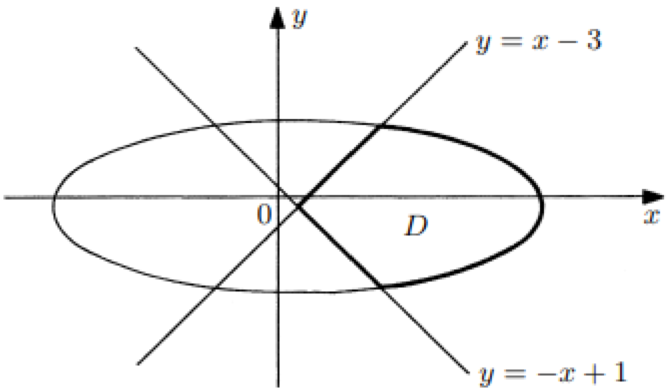
on a

$$\iint_D xy\,dxdy = 6\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}} d\theta \int_0^1 \left(\rho+3\rho^2\cos\theta+2\rho^2\sin\theta+3\rho^3\sin 2\theta\right)d\rho$$
$$= 6\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}+\cos\theta+\frac{2}{3}\sin\theta+\frac{3}{4}\sin 2\theta\right)d\theta$$
$$= 6\left(\frac{\theta}{2}+\sin\theta-\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{3}{8}\cos 2\theta\right)\Bigg|_0^{\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}} = 3\operatorname{Arctg}\frac{3}{2}+\frac{10}{\sqrt{13}}+\frac{185}{26}.$$



❿ Puisque $D = \left\{(2+5\rho\cos\theta, -1+3\rho\sin\theta) : 0<\rho<1, |\theta|<\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}\right\}$, on a

$$\iint_D (x-2)(y+1)^2dxdy = \int_{-\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}}^{\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}} d\theta\int_0^1 \left(675\rho^4\sin^2\theta\cos\theta\right)d\rho$$
$$= 135\int_{-\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}}^{\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta = 45\sin^3\theta\Bigg|_{-\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}}^{\operatorname{Arctg}\frac{5}{3}} = \frac{11250}{34\sqrt{34}}.$$



Exercice 5.4.

❶ **Soit** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
$x^2 + y^2 < 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3x, x + y > 0\}$.
Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

❷ **Soit** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
$x^2 + y^2 < 2\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)\}$.
Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt[4]{(x^2 + y^2)^3}}.$$

❸ **Soit** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
$3x^2 + y^2 - 2y < 2, 0 < y - 1 < x\}$.
Calculer
$$\iint_D x(y - 1)^2 dxdy.$$

❹ **Soit** $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\right.$
$\left. 0 < \frac{1}{2x} < y < \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right\}$. **Calculer**
$$\iint_D \left(x^2 + 4y^2\right) dxdy.$$

❺ **Soit** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
$x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$. **Calculer**
$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) \text{Arctg}\, \frac{y}{x} dxdy$$

❻ **Soit** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
$x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$. **Calculer**
$$\iint_D \left(x^2 + \frac{y^2}{9}\right) \sin\left(2 \,\text{Arctg}\, \frac{y}{3x}\right) dxdy.$$

❼ **Soit** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
$0 < x < \sqrt{2}, 0 < y < \sqrt{\frac{2}{3}}\}$.
Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} + x^2 + y^2\right)^3}}.$$

❽ **Soient** $r > 0$ **et**
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$
$x^2 + y^2 - rx < 0\}$. **Calculer**
$$\iint_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dxdy.$$

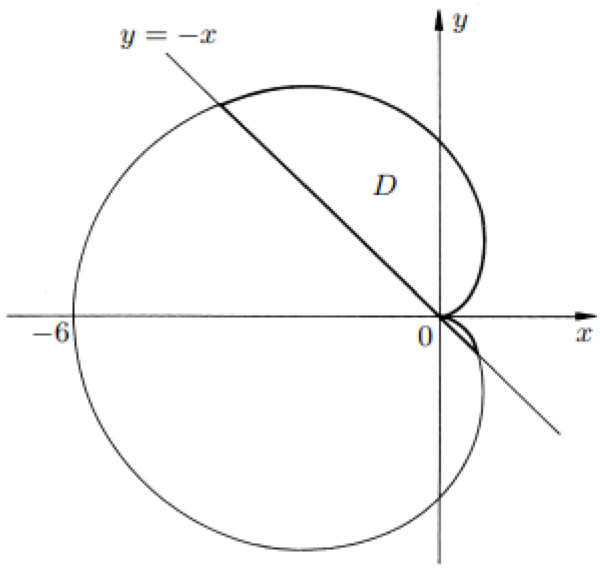
❾ **1) Vérifier que pour tout** $r > 0$ **:**
$$\iint_{B(0,r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \leq 4\left(\int_0^r e^{-t^2} dt\right)^2$$
$$\leq \iint_{B(0,2r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy.$$
2) En déduire que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

❿ **Soit** $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\right.$
$\left. \frac{1}{2} < x + y < 1, x > 0, y > 0\right\}$.
En effectuant le changement de variables
$$x = \tfrac{u+v}{2} \text{ et } y = \tfrac{u-v}{2}.$$
calculer
$$\iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} dxdy.$$

$\boxed{\textbf{Solution}}$

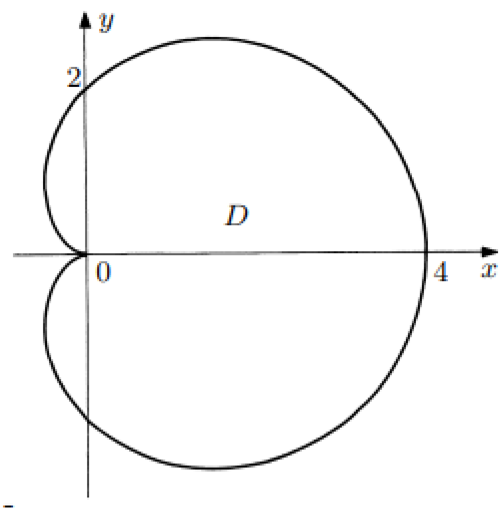
❶ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 3(1-\cos\theta), -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{3(1-\cos\theta)} d\rho = 3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1-\cos\theta)d\theta = 3(\pi-\sqrt{2}).$$



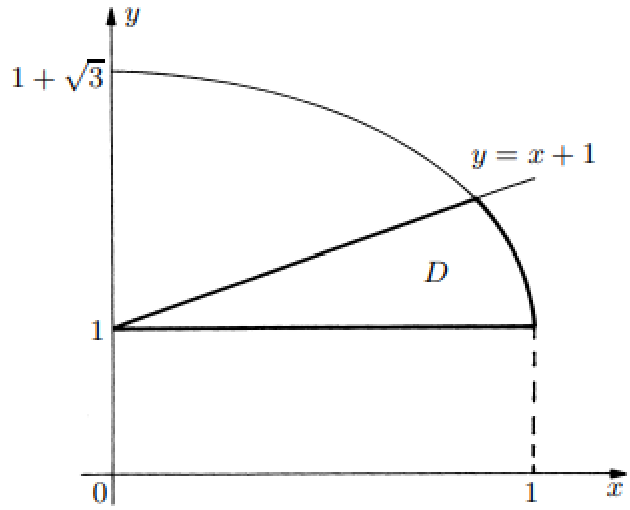
❷ Puisque $D = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 2(1+\cos\theta), 0 \le \theta < 2\pi\}$, on a

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2(1+\cos\theta)} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta$$
$$= 4\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 4\left(\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2}d\theta\right) = 16$$



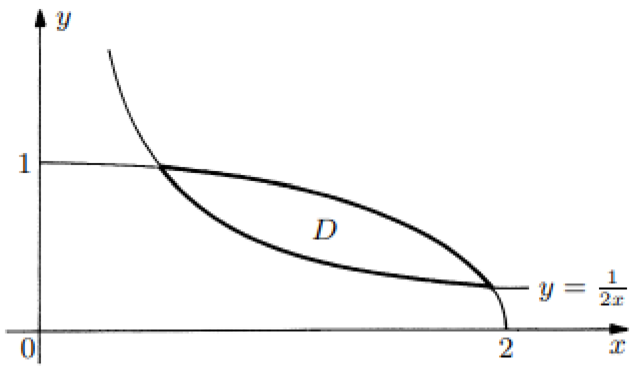
❸ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, 1+\sqrt{3}\rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right\}$, on a

$$\iint_D x(y-1)^2 dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^1 \left(3\sqrt{3}\rho^4 \sin^2\theta\cos\theta\right) d\rho$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{5}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sqrt{3}}{5}\sin^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{40}.$$



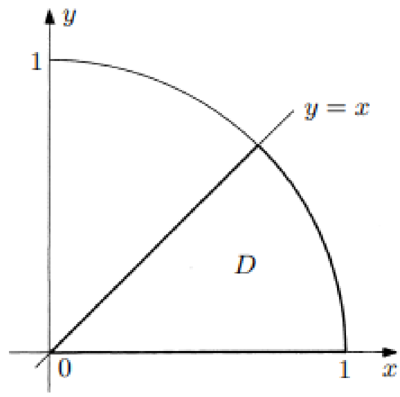
❹ Puisque $D = \left\{(2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} < \rho < 1, \frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}\right\}$, on a

$$\iint_D (x^2+4y^2)\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^1 8\rho^3 d\rho$$
$$= 2\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \left(1 - \frac{1}{4\sin^2 2\theta}\right) d\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}\operatorname{cotg} 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



❺ Puisque $D = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right\}$, on a

$$\iint_D (x^2+y^2)\operatorname{Arctg}\frac{y}{x} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi^2}{128}$$

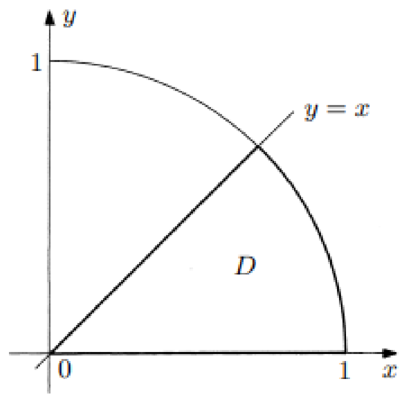


❻ Puisque

$$D = \left\{ (\rho\cos\theta, 3\rho\sin\theta) : 0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{1+8\sin^2\theta}}, 0 < \theta < \operatorname{Arctg}\frac{1}{3} \right\}$$

on a

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(x^2 + \frac{y^2}{9}\right) \sin\left(2\operatorname{Arctg}\frac{y}{3x}\right) dxdy \\
&\quad = \int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}} d\theta \int_0^{\sqrt{1+8\sin^2\theta}} \left(3\rho^3\sin 2\theta\right) d\rho \\
&\quad = \frac{3}{4}\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}} \frac{\sin 2\theta}{\left(1+8\sin^2\theta\right)^2} d\theta = -\frac{3}{32}\frac{1}{1+8\sin^2\theta}\Bigg|_0^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{3}} = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$



❼ Soit $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\gamma(\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta} & \text{si } 0 < \theta < \frac{\pi}{6} \\ \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin\theta} & \text{si } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

et posons $D=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) : 0<\rho<\gamma(\theta), 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$. D'où

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}+x^2+y^2\right)^3}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}} \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}+\rho^2\right)^3}} d\rho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin\theta}} \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}+\rho^2\right)^3}} d\rho$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{\cos^2\theta}}}\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3\sin^2\theta}}}\right) d\theta$$

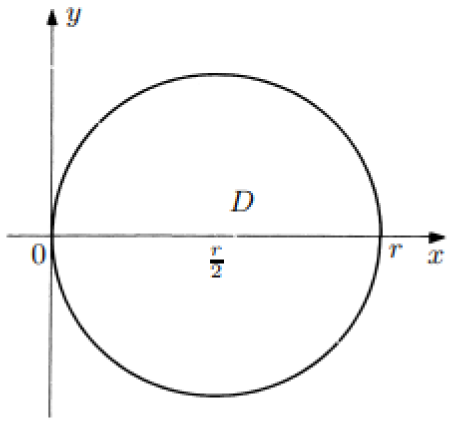
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{7-\sin^2\theta}} d\theta - \sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\theta}{\sqrt{3-\cos^2\theta}} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \sqrt{3}\operatorname{Arcsin}\frac{\sin\theta}{\sqrt{7}}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \sqrt{3}\operatorname{Arcsin}\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

❽ Puisque $D=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) : 0<\rho<r\cos\theta, |\theta|<\frac{\pi}{2}\right\}$, on a

$$\iint_D \sqrt{r^2-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r\cos\theta} \sqrt{r^2-\rho^2}\rho d\rho$$

$$= \frac{2r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^3\theta\right) d\theta = \frac{2r^3}{3}\left(\theta+\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{9}(3\pi-4).$$



❾ 1) En effet, pour tout $r>0$: $B(\mathbf{0},r)\subset D_r =]-r,r[\times]-r,r[\subset B(\mathbf{0},2r)$ et

$$\iint_{B(\mathbf{0},r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy \leq \iint_{D_r} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = 4\left(\int_0^r e^{-t^2}dt\right)^2$$

$$\leq \iint_{B(\mathbf{0},2r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy.$$

2) Ainsi, puisque pour tout $r>0$:

$$\iint_{B(\mathbf{0},r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi\left(1-e^{-r^2}\right),$$

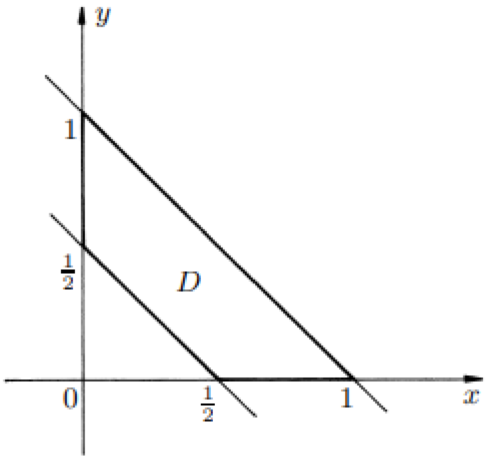
et

$$\iint_{B(\mathbf{0},2r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2r} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi\left(1-e^{-4r^2}\right),$$

on peut écrire $\sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-r^2}\right)} \leq \int_0^r e^{-t^2}dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-4r^2}\right)}$ ou encore, par passage à la limite,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

❿ $\displaystyle\iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)}dxdy = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} du \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}dv = \operatorname{sh} 1 \int_{\frac{1}{2}}^{1} udu = \frac{3}{8}\operatorname{sh} 1.$



Exercice 5.5.

❶ Soit $D =]0,1[\times]0,1[$. En effectuant le changement de variables

$$x = u^2 \text{ et } y = \frac{v}{u},$$

calculer

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)\left(1+xy^2\right)}.$$

❸ Soit $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2<1, y>0\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x+\frac{y}{2} \text{ et } v = \frac{\sqrt{3}}{2}y,$$

calculer

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}dxdy.$$

❺ Soit $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<\sqrt{2}y<x, 1<x^2-y^2<4\right\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x^2-y^2 \text{ et } v = \frac{y}{x},$$

calculer

$$\iint_D \frac{y}{x^3}\sin\pi\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy.$$

❷ Soit $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y<2x, x<y^2<2x\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = \frac{x}{y} \text{ et } v = \frac{y^2}{x},$$

calculer

$$\iint_D \frac{y}{x}dxdy.$$

❹ Soit $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-1<y^2<x, 0<y<2-x\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = \frac{y}{2-x} \text{ et } v = y^2-x,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y^2\left(2+2y^2-x\right)}{(2-x)^4}dxdy.$$

❻ En effectuant le changement de variables

$$x = \mu \text{ et } y = \mu\operatorname{tg}\theta,$$

calculer

$$\lim_{t\to 0+}\int_t^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy\right)dx.$$

❼ Calculer, $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \left(1+y^6\right) dy.$ **❽ Calculer,** $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xye^{y^3} dy.$

❾ Calculer,

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{\left(4-y^2\right)^3} dy.$$

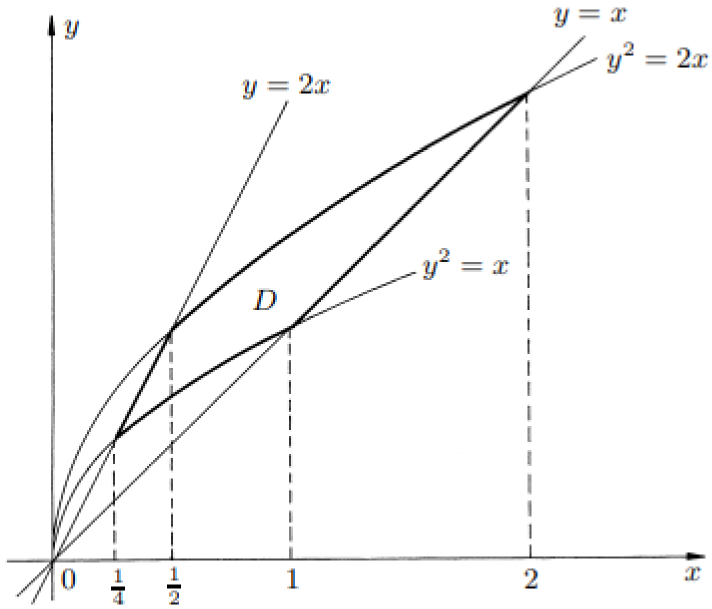
❿ Calculer,

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx.$$

Solution

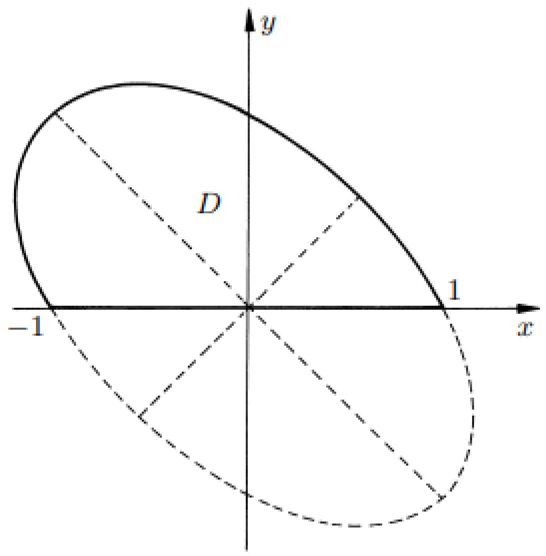
❶ $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)\left(1+xy^2\right)} = 2\int_0^1 du \int_0^u \frac{dv}{\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)}$
$\displaystyle = 2\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctg} u}{1+u^2} du = \operatorname{Arctg}^2 u \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16}.$

❷ $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x} dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^1 udu \int_1^2 vdv = \frac{9}{16}.$



❸ Posons $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2<1, v>0\}$. Alors,

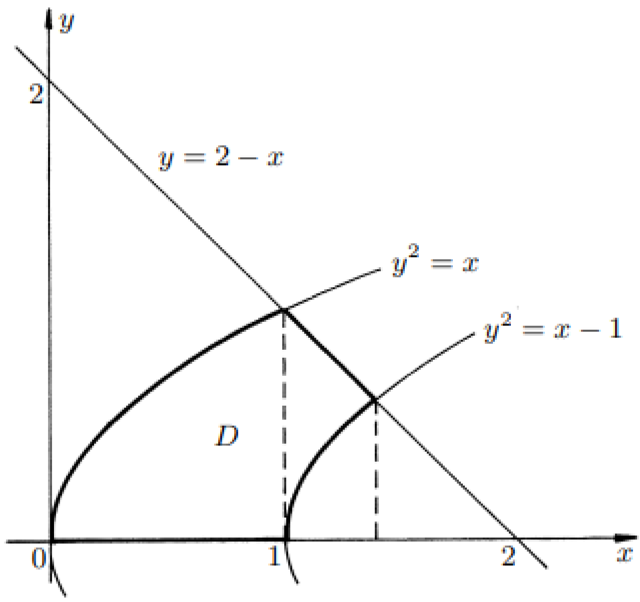
$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2} dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_E e^{u^2+v^2} dudv$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(e-1).$$



❹ Posons $E =]0,1[\times]-1,0[$. Alors,

$$\iint_E u^2 dudv = \iint_D \frac{y^2\left(2+2y^2-x\right)}{(2-x)^4} dxdy.$$

D'où $\displaystyle\iint_D \frac{y^2\left(2+2y^2-x\right)}{(2-x)^4} dxdy = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$.

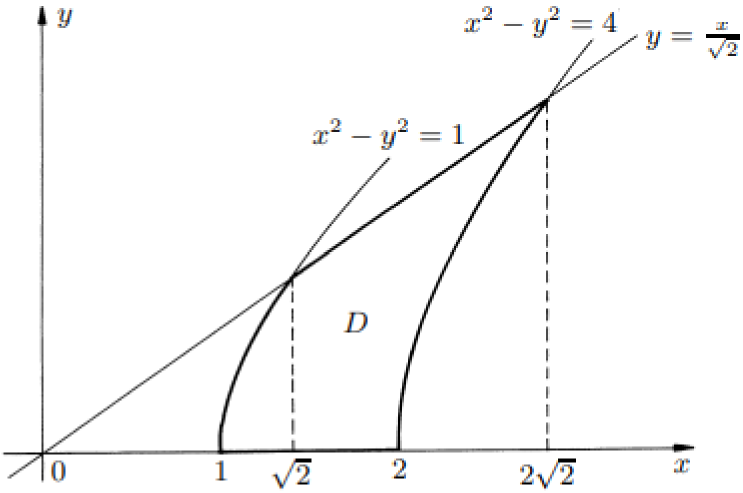


❺ Posons $E =]1,4[\times]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$. Alors,

$$\iint_E \frac{v}{2u} \sin \pi \left(1-v^2\right) dudv = \iint_D \frac{y}{x^3} \sin \pi \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy$$

D'où

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x^3} \sin \pi \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dxdy &= \int_1^4 du \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{v}{2u} \sin \pi \left(1-v^2\right)\right) dv \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_1^4 \frac{du}{u} = \frac{\ln 2}{2\pi} \end{aligned}$$



❻ Posons, pour $0 < t < 1$:

$$D_t =]t,1[\times]0,1\left[\text{ et } E_t = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t < \mu < 1, 0 < \theta < \operatorname{Arctg}\frac{1}{\mu}\right\}.\right.$$

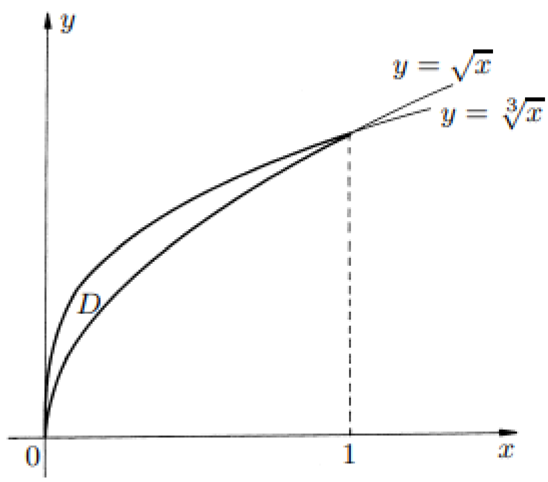
Alors,

$$\int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \iint_{D_t} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \iint_{E_t} \frac{\cos 2\theta}{\mu}d\mu d\theta$$
$$= \int_t^1 d\mu \int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{1}{\mu}} \frac{\cos 2\theta}{\mu}d\theta = \int_t^1 \frac{d\mu}{1+\mu^2} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctg} t.$$

D'où $\lim\limits_{t\to 0+} \displaystyle\int_t^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \lim\limits_{t\to 0+}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctg} t\right) = \frac{\pi}{4}.$

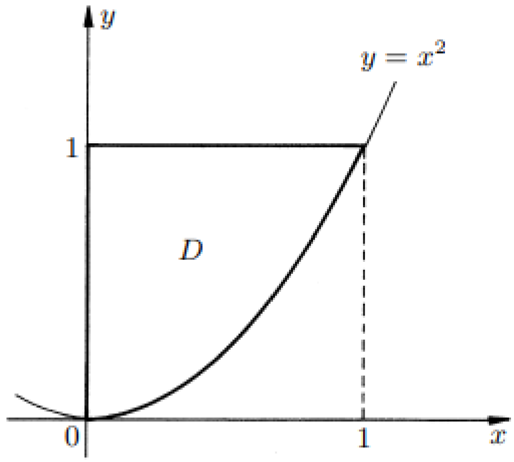
❼ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \sqrt{x} < y < \sqrt[3]{x}\}$. Alors,

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \left(1+y^6\right)dy = \iint_D \left(1+y^6\right)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^3}^{y^2} \left(1+y^6\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(y^2-y^3\right)\left(1+y^6\right)dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{10}}{10}\right)\Big|_0^1 = \frac{17}{180}.$$



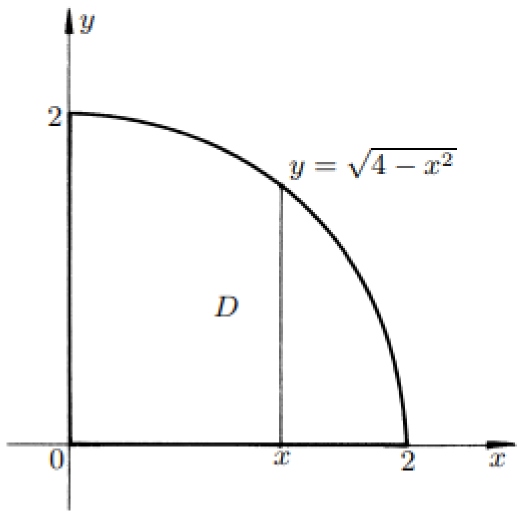
❽ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x^2 < y < 1\}$. Alors,

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xye^{y^3} dy = \iint_D xye^{y^3} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xye^{y^3} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left. \frac{e^{y^3}}{6} \right|_0^1 = \frac{e-1}{6}.$$



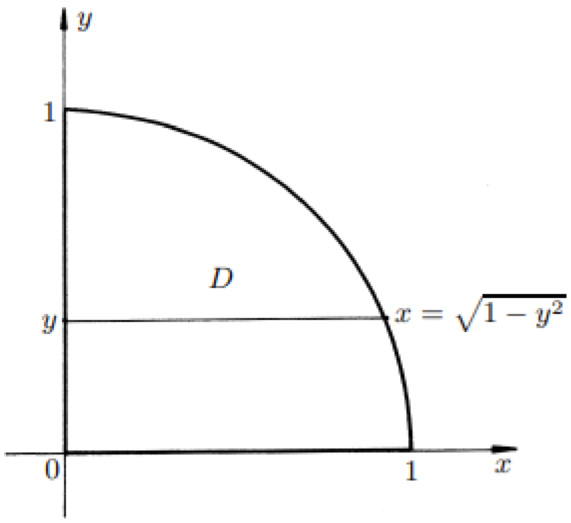
❾ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x^2 + y^2 < 4\}$. Alors,

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(4-y^2)^3} dy = \iint_D \sqrt{(4-y^2)^3} dxdy$$
$$= \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{(4-y^2)^3} dx = \int_0^2 \left(4-y^2\right)^2 dy$$
$$= \left. \left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right) \right|_0^2 = \frac{256}{15}.$$



❿ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x^2+y^2 < 1\}$. Alors,

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx = \iint_D \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2}\right) dx$$
$$= \left(\sqrt{2}x - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}))$$



Exercice 5.6.

❶ **Calculer,**
$$\int_0^{\sqrt{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right) dx.$$

❷ **Calculer,**
$$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2}dx.$$

❸ **Calculer, $\alpha > 0$.**
$$\int_0^{2\alpha} dx \int_0^{\sqrt{2\alpha x - x^2}} \left(x^2+y^2\right) dy$$

❹ **Calculer,**
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^x \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$$
$$+ \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy.$$

Calculer l'aire de

❺ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $y^2 - 6x < 0, x - y < 12, x^2+y^2 > 16\}.$

❻ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x < 0, y^2 < x^4(x+4)\}$.

❼ **Soit $r > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la cardioïde $\rho(\theta) = 2r(1+\cos\theta)$.**

❽ **Soit $a > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la lemniscate $\rho|\theta| = a\sqrt{|\cos 2\theta|}$.**

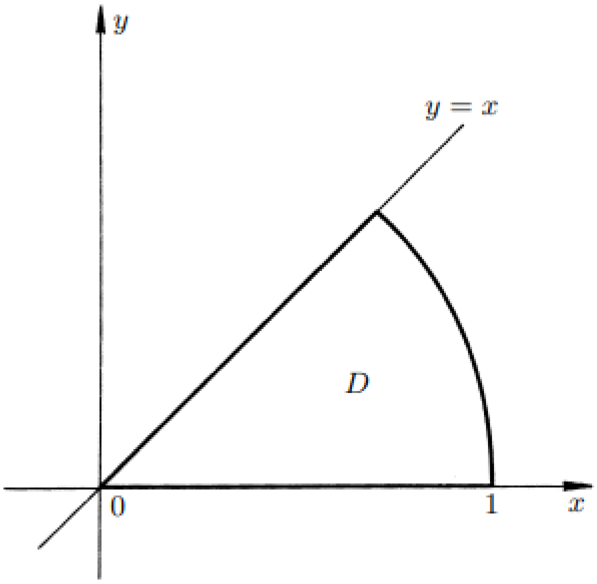
❾ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue.
Calculer
$$\iint_D \frac{2f(x) + 5f(y)}{f(x) + f(y)} dxdy$$

❿ Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que
$$\left(\iint_D fg(x,y)dxdy\right)^2 = \iint_D f^2(x,y)dxdy \iint_D g^2(x,y)dxdy$$
si et seulement si f et g sont linéairement dépendantes.

Solution

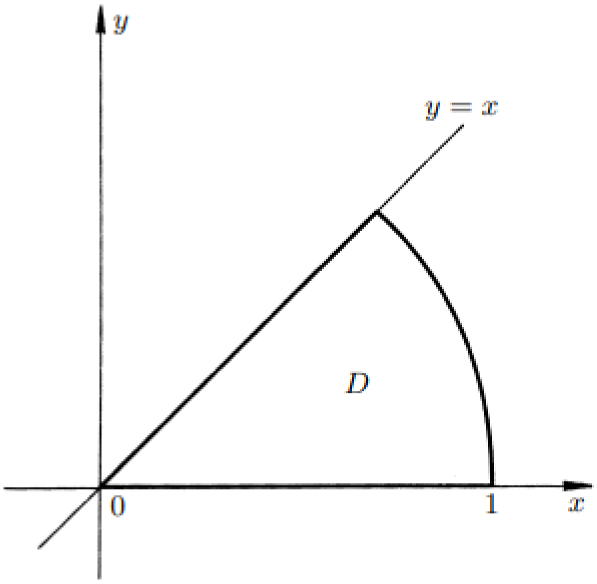
❶ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $0 < \rho < 1$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dx = \iint_D \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) dxdy$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \ln\left(1 + \rho^2\right) \rho d\rho = \frac{\pi}{8} \int_1^2 \ln t dt = \frac{\pi}{8}(2\ln 2 - 1).$$



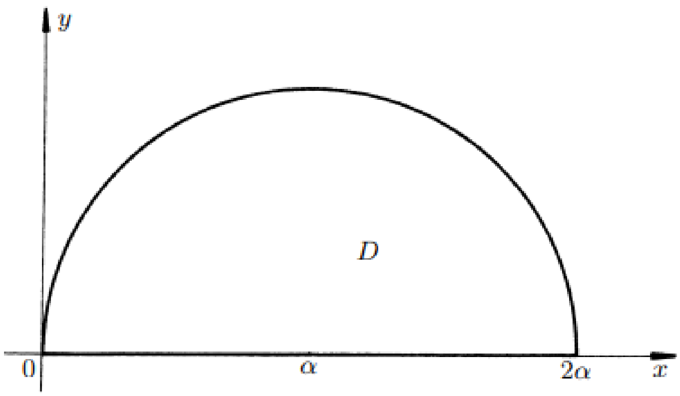
❷ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, 0 < y < x\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $0 < \rho < 1$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - x^2} dx$$
$$= \iint_D \sqrt{1 - x^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2\cos^2\theta} \rho d\rho = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3\theta}{\cos^2\theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta} \sin\theta d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



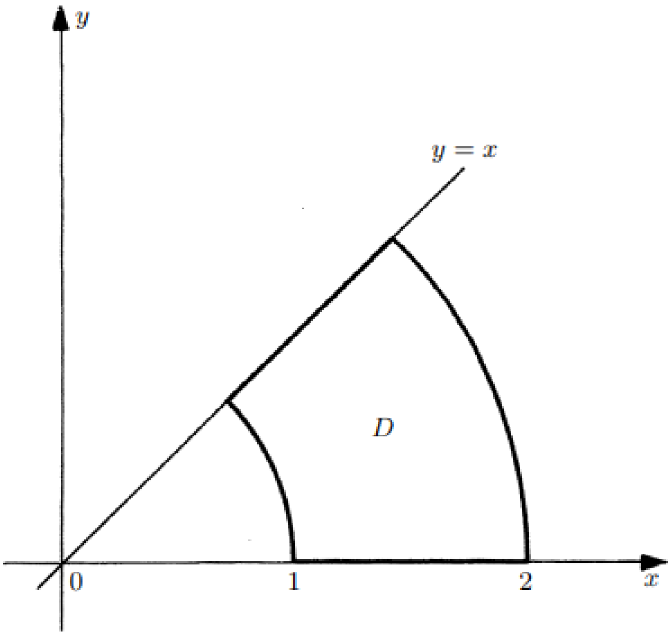
❸ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\alpha)^2 + y^2 < \alpha^2, y > 0\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \alpha + \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $0 < \rho < \alpha$ et $0 < \theta < \pi$, on peut écrire

$$\int_0^{2\alpha} dx \int_0^{\sqrt{2\alpha x - x^2}} \left(x^2+y^2\right) dxdy = \iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$$
$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\alpha} \left(\alpha^2+\rho^2+2\alpha\rho\cos\theta\right) \rho d\rho = \alpha^4 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cos\theta\right) d\theta = \frac{3}{4}\alpha^4\pi.$$



❹ Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4, 0 < y < x\}$. Alors, en faisant le changement de variables $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $1 < \rho < 2$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, on peut écrire

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{x} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dy$$
$$+ \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dy$$
$$= \iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3}{4}.$$



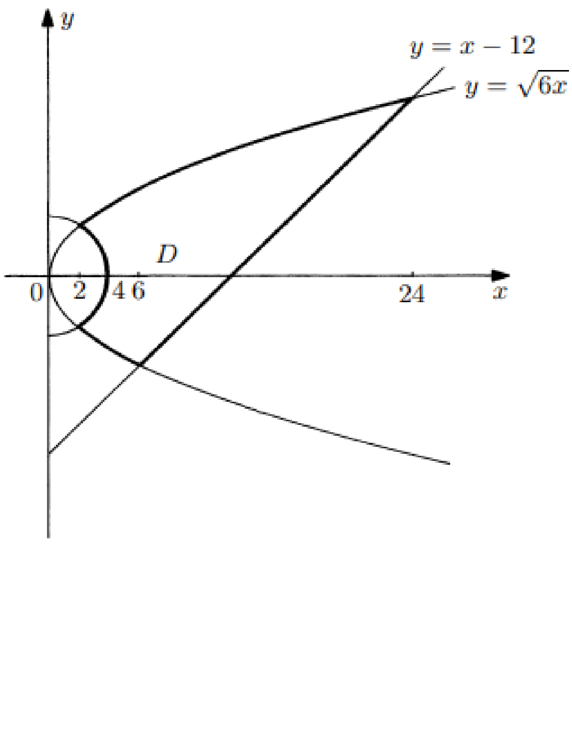
❺ $\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy$

$$= 2\int_2^4 dx \int_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{6x}} dy + 2\int_4^6 dx \int_0^{\sqrt{6x}} dy + \int_6^{24} dx \int_{x-12}^{\sqrt{6x}} dy$$

$$= 2\int_2^4 \left(\sqrt{6x} - \sqrt{16-x^2}\right) dx + 2\int_4^6 \sqrt{6x}dx + \int_6^{24} \left(\sqrt{6x} - (x-12)\right) dx$$

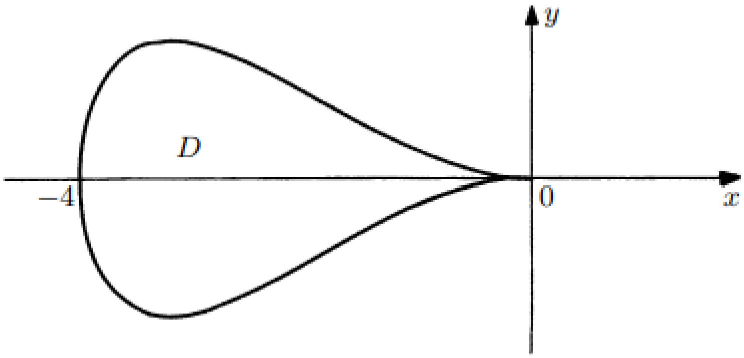
$$= \left(\frac{4}{3}x\sqrt{6x} - x\sqrt{16-x^2} - 16\,\text{Arcsin}\,\frac{x}{4}\right)\Bigg|_2^4$$

$$+ \frac{4}{3}x\sqrt{6x}\Bigg|_4^6 + \left(\frac{2}{3}x\sqrt{6x} - \frac{1}{2}(x-12)^2\right)\Bigg|_6^{24} = 162 - \frac{16\pi}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}.$$



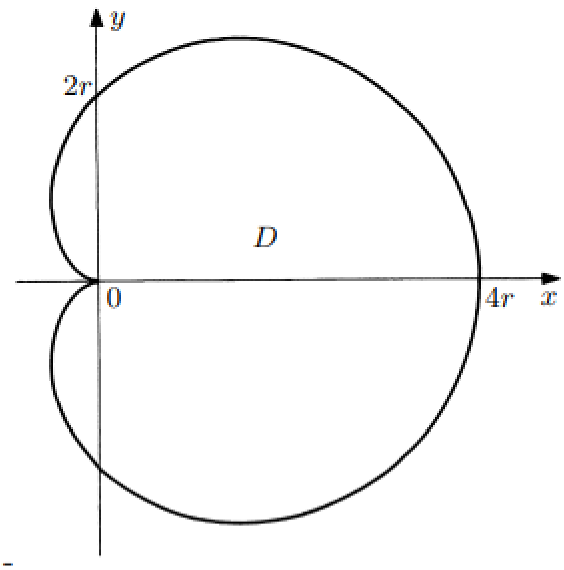
❻ En faisant le chagement de variable $x = t^2 - 4$ avec $t \geq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(D) &= \iint_D dxdy = \int_{-4}^{0} dx \int_{-x^2\sqrt{x+4}}^{x^2\sqrt{x+4}} dy = 2\int_{-4}^{0} x^2\sqrt{x+4}dx \\ &= 4\int_0^2 t^2\left(t^2-4\right)^2 dt = 4\left(\frac{t^7}{7} - \frac{8}{5}t^5 + \frac{16}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = \frac{2^{12}}{105},\end{aligned}$$



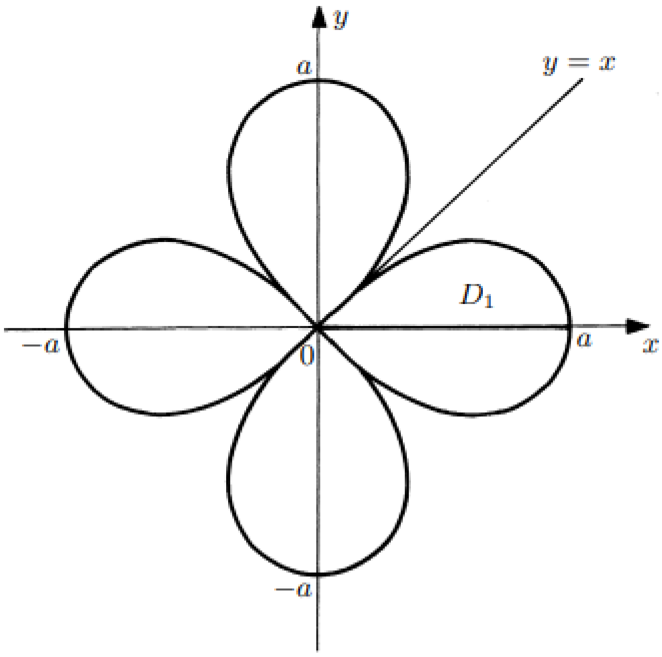
❼ Puisque $D = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < 2r(1+\cos\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(D) &= \iint_D dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2r(1+\cos\theta)} \rho d\rho = 2r^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta \\ &= 2r^2\left(\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi r^2.\end{aligned}$$



❽ Posons $D_1 = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) : 0 < \rho < a\sqrt{\cos 2\theta}, 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\operatorname{Aire}(D) &= \iint_D dxdy = 8\iint_{D_1} dxdy = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho d\rho \\ &= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 2a^2.\end{aligned}$$



❾ Puisque D admet la première bissectrice $y = x$ pour axe de symétrie, on peut écrire

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)+f(y)}dxdy,$$

ce qui entraine, entre autres, que

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \iint_D \frac{f(x)+f(y)}{f(x)+f(y)}dxdy = 2\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy,$$

ou encore $\displaystyle\iint_D \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}dxdy = \frac{\text{Aire}(D)}{2} = 2\pi.$

Par conséquent $\displaystyle\iint_D \frac{2f(x)+5f(y)}{f(x)+f(y)}dxdy = 14\pi.$

❿ Pour commencer, on va supposer que les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes et que $g \neq 0$ (sinon l'égalité est évidence). Alors, il existe un nombre réel λ tel que $f = \lambda g$ et l'on a

$$\begin{aligned}\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy\right)^2 &= \left(\iint_D \lambda g^2(x,y)dxdy\right)^2\\ &= \left(\iint_D f^2(x,y)dxdy\right)\left(\iint_D g^2(x,y)dxdy\right).\end{aligned}$$

Montrons à présent la réciproque. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire
$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}F(t) &= \iint_D (f+tg)^2(x,y)dxdy\\ &= t^2\iint_D g^2(x,y)dxdy + 2t\iint_D fg(x,y)dxdy + \iint_D f^2(x,y)dxdy,\end{aligned}$$

et supposons à nouveau pour la même raison que $g \neq 0$. Alors,

$$\iint_D g^2(x,y)dxdy > 0,$$

et, en posant

$$\alpha = -\frac{\iint_D fg(x,y)dxdy}{\iint_D g^2(x,y)dxdy},$$

on obtient $F(\alpha) = 0$, ce qui entraîne que $f + \alpha g = 0$ ou encore que les deux fonctions f et g sont linéairement dépendantes.

Exercice 5.7.

❶ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} dxdy.$$

❷ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}.$$

❸ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{\left(1+x^4\right)\left(1+y^4\right)}.$$

❹ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} dxdy.$$

❺ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} \cos\left(x^2+y^2\right) dxdy.$$

❻ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1+y^2}{\left(1+y^4\right)\left(1+\left(1+y^2\right)^2 x^2\right)} dxdy.$$

❼ Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout couple de nombres réels $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\iint_D |fg|(x,y)dxdy \leq \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)dxdy} \times \sqrt[q]{\iint_D |g|^q(x,y)dxdy}$$

Cette relation est appelée l'inégalité de Hölder. Lorsque $p = q = 2$, il est d'usage de l'appeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

❽ Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$:

$$\sqrt[p]{\iint_D |f+g|^p(x,y)dxdy} \leq \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)dxdy} + \sqrt[p]{\iint_D |g|^p(x,y)dxdy}.$$

Cette relation est appelée l'inégalité de Minkowski.

❾ Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que

$$\iint_D f(x-y)dxdy = 2\int_0^2 (2-t)f(t)dt$$

❿ Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \int_0^x dr \int_0^y f(r,s)ds.$$

Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y)$. Calculer

Solution

❶ Rappel : $\forall a, b \geq 0 : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
Puisque pour $f = 0$ ou $g = 0$ le résultat est évident, on fera l'hypothèse supplémentaire que $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Alors, $I_D\left(|f|^p\right) > 0$ et $I_D\left(|g|^q\right) > 0$. Ainsi, puisque pour tout $(x, y) \in D$:

$$\frac{|fg|(x,y)}{\left(I_D\left(|f|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(I_D\left(|g|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f(x,y)|^p}{p\left(I_D\left(|f|^p\right)\right)} + \frac{|g(x,y)|^q}{q\left(I_D\left(|g|^q\right)\right)},$$

on a

$$\frac{\displaystyle\iint_D |fg|(x,y)dxdy}{\left(I_D\left(|f|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(I_D\left(|g|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leq \frac{\displaystyle\iint_D |f(x,y)|^p dxdy}{p\left(I_D\left(|f|^p\right)\right)} + \frac{\displaystyle\iint_D |g(x,y)|^q dxdy}{q\left(I_D\left(|g|^q\right)\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ou encore $\displaystyle\iint_D |fg|(x,y)dxdy \leq \left(I_D\left(|f|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(I_D\left(|g|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}$.
❷ Puisque pour $p = 1$ ou $|f+g| = 0$ le résultat est évident on fera les hypothèses supplémentaires que $p > 1$ et $|f+g| \neq 0$. Ainsi, en constatant que pour
$q = \frac{p}{p-1} : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et

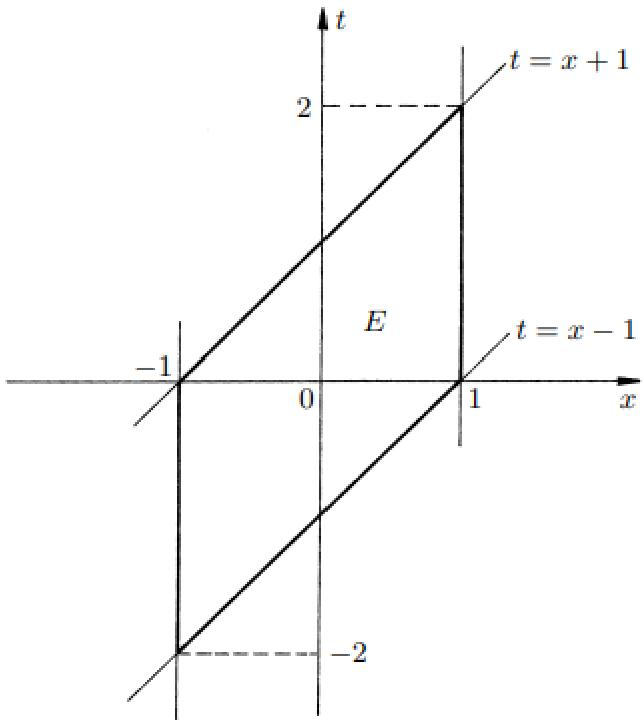
$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1},$$

on peut écrire, en utilisant l'inégalité de Hölder (exercice précédent), que

$$\begin{aligned} I_D\left(|f+g|^p\right) &\leq I_D\left(|f||f+g|^{p-1}\right) + I_D\left(|g||f+g|^{p-1}\right) \\ &\leq \left(I_D\left(|f|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(I_D\left(|f+g|^p\right)\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(I_D\left(|g|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(I_D\left(|f+g|^p\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

ou encore $\left(I_D\left(|f+g|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(I_D\left(|f|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(I_D\left(|g|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}$.
❸ En effet, en posant $E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, x-1 < t < x+1\}$, on obtient, puisque la fonction est paire, que

$$\begin{aligned} \iint_D f(x-y)dxdy &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} f(x-y)dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt \\ &= \iint_E f(t)dxdt = \int_{-2}^{0} dt \int_{-1}^{1+t} f(t)dx = \int_{0}^{2} dt \int_{t-1}^{1} f(t)dx \\ &= \int_{-2}^{0} (2+t)f(t)dt + \int_{0}^{2} (2-t)f(t)dt = 2\int_{0}^{2} (2-t)f(t)dt. \end{aligned}$$



❹ Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(r, y) = \int_0^y f(r, s) ds.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g(x, y) = \int_0^y f(x, s) ds \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y).$$

De même, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \int_0^x \frac{\partial g}{\partial y}(r, y) dr = \int_0^x f(r, y) dr \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = f(x, y).$$

❺ En faisant le changement de variable $t = 1 + \rho^2$, on peut écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\iint_{B(\mathbf{0},k)} \frac{\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k \frac{\ln\left(1 + \rho^2\right)}{\left(1 + \rho^2\right)^2} \rho d\rho = \pi \int_1^{1+k^2} \frac{\ln t}{t^2} dt \\ &= -\pi \left(\frac{\ln\left(1 + k^2\right)}{1 + k^2} + \frac{1}{1 + k^2} - 1 \right),\end{aligned}$$

ce qui donne, par passage à la limite,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} dx dy = \lim_{k \to +\infty} \iint_{B(0,k)} \frac{\ln\left(1 + x^2 + y^2\right)}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} dx dy = \pi.$$

❻ Posons $D_k =]-k, k[\times]-k, k[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout $k > 0$:

$$\iint_{D_k} \frac{dx dy}{\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right)} = \left(\int_{-k}^k \frac{dt}{1 + t^2} \right)^2 = 4 \left(\int_0^k \frac{dt}{1 + t^2} \right)^2 = 4 \operatorname{Arctg}^2 k,$$

on obtient, par passage à la limite,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = 4 \lim_{k\to+\infty} \operatorname{Arctg}^2 k = \pi^2.$$

❼ Posons $D_k =]-k,k[\times]-k,k[$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout

$$\iint_{D_k} \frac{dxdy}{(1+x^4)(1+y^4)} = \left(\int_{-k}^{k} \frac{dt}{1+t^4}\right)^2 = 4\left(\int_0^k \frac{dt}{1+t^4}\right)^2,$$

on obtient, par passage à la limite,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^4)(1+y^4)} = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} \frac{dxdy}{(1+x^4)(1+y^4)} = \frac{\pi^2}{2}.$$

❽ Posons $D_k =]-k,k[\times]-k,k[$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout $k>0$:

$$\iint_{D_k} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} dxdy = \int_{-k}^{k} dx \int_{-k}^{k} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} dy = 4 \operatorname{Arctg} k \int_0^k e^{-x^2} dx,$$

on obtient, par passage à la limite,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} dxdy = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2} dxdy = \pi\sqrt{\pi}.$$

❾ Puisque pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\left|e^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right)\right| \le e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi \lim_{k\to+\infty}\left(1-e^{-k^2}\right) = \pi,$$

on a, d'après le critère de comparaison, que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left|e^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right)\right| dxdy < +\infty,$$

ce qui nous permet d'écrire, en constatant que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\iint_{B(0,k)} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k e^{-\rho^2}\cos\rho^2 \rho d\rho$$
$$= \pi\int_0^{k^2} e^{-t}\cos t dt = \frac{\pi}{2} e^{-t}(\sin t - \cos t)\Big|_0^{k^2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-k^2}\left(\sin k^2 - \cos k^2\right) + 1\right),$$

que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right) dxdy$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \iint_{B(0,k)} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\cos\left(x^2+y^2\right) dxdy = \frac{\pi}{2}.$$

❿ Soit $f:\mathbb{R}^2 \to]0,+\infty[$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{1+y^2}{(1+y^4)\left(1+\left(1+y^2\right)^2 x^2\right)}.dd$$

1) Posons $D_k =]-k,k[\times]-k,k[$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, puisque pour tout $k > 0$:

$$\begin{aligned}\iint_{D_k} f(x,y)dxdy &= \int_{-k}^{k} dy \int_{-k}^{k} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\left(1+(1+y^2)^2 x^2\right)}dx \\ &= 2\int_{-k}^{k} \frac{\operatorname{Arctg}\left(k\left(1+y^2\right)\right)}{1+y^4}dy < 2\pi \int_0^k \frac{dy}{1+y^4} < 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4},\end{aligned}$$

on a $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy < +\infty$. 2) Soient $\alpha > 0$ et $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g_\alpha(x) = \frac{1+\alpha^2}{1+x^2}.$$

Alors, pour tout $|y| \leq \alpha$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $0 < f(x,y) \leq g_\alpha(x,y)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x)dx = \pi\left(1+\alpha^2\right)$. Ainsi, les hypothèses de la proposition **??** étant vérifiées, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+y^2}{(1+y^4)\left(1+(1+y^2)^2 x^2\right)}dx = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1} + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y-1) + \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}y+1) \right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Biroud Kheireddine et Merzougui Mokhtar : *" Maths 3 cours et exercices"*. Faculté des Sciences et de Technologies, Université de Tissemsilt . 2023.

[2] Kada Allab, *Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle* - O.P.U., 2002.

[3] Jean-Pierre Marco, Philippe Thieullen, Jacques-Arthur Weil, *Mathématiques L2 : Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés*, Pearson, 2007.

[4] Florence Monna, Gilbert Monna, *Suites et séries de fonctions : Exercices corrigés avec rappels de cours*, Cépaduès, 2013.

[5] Nikolaï Piskounov. *Calcul différentiel et intégral*, Tome 1 et 2. Editions Mir, MOSCOU 1980 ou Ed. Ellipses 1993.

[6] Dominique Prochasson, *Analyse 2eme année. Exercices corrigés*, Dunod, 2000.