



Faculté des Sciences et de la Technologies

Domaine : Sciences et Technologie  
Filière : Génie Mécanique  
**1<sup>ère</sup> Master**  
Energétique & Installation Energétique et Turbomachine

## Polycopie de cours

# Mécanique Des Fluides Approfondie

**Bernoulli's Principle**

$P + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

$r = 1.2\text{ m}$   
 $h = 1.2\text{ m}$   
 $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$   
 $v = 5\text{ m/s}$   
 $P = 3\text{ atm}$

$r = 0.6\text{ m}$   
 $h = 3.1\text{ m}$   
 $v_2 = 20\text{ m/s}$   
 $P_2 = ?$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$   
 $(\pi \cdot 1.2^2) 5_{\text{m/s}} = (\pi \cdot 0.6^2) v_2$   
 $v_2 = \frac{4.52\text{ m}^2 \cdot 5\text{ m/s}}{1.13\text{ m}^2}$

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$3\text{ atm} + (1000 \cdot 9.8 \cdot 1.2\text{ m}) + \frac{1000}{2} (5)^2 = P_2 + (1000 \cdot 9.8 \cdot 3.1) + \frac{1000}{2} (20)^2$$

$$3\text{ atm} + 24,260\text{ N/m}^2 = P_2 + 230,380\text{ N/m}^2 \Rightarrow 3\text{ atm} + 0.24\text{ atm} = P_2 + 2.27\text{ atm}$$

$$P_2 = 3.24\text{ atm} - 2.27\text{ atm} \Rightarrow P_2 = 0.97\text{ atm}$$

Préparé par :  
Dr. BAGHDAD Mohammed





Faculté des Sciences et de la Technologies

Domaine : Sciences et Technologie  
Filière : Génie Mécanique  
**1<sup>ère</sup> Master**  
Energétique & Installation Energétique et Turbomachine

## Polycopie de cours

# Mécanique Des Fluides Approfondie

**Bernoulli's Principle**  $P + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

$r = 1.2\text{ m}$   
 $h = 1.2\text{ m}$   
 $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$   
 $v = 5\text{ m/s}$   
 $P = 3\text{ atm}$

$r = 0.6\text{ m}$   
 $h = 3.1\text{ m}$   
 $v_2 = 20\text{ m/s}$   
 $P_2 = ?$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$   
 $(\pi \cdot 1.2^2) 5_{\text{m/s}} = (\pi \cdot 0.6^2) v_2$   
 $v_2 = \frac{4.52\text{ m}^2 \cdot 5\text{ m/s}}{1.13\text{ m}^2}$

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$3\text{ atm} + (1000 \cdot 9.8 \cdot 1.2\text{ m}) + \frac{1000}{2} (5)^2 = P_2 + (1000 \cdot 9.8 \cdot 3.1) + \frac{1000}{2} (20)^2$$

$$3\text{ atm} + 24,260\text{ N/m}^2 = P_2 + 230,380\text{ N/m}^2 \Rightarrow 3\text{ atm} + 0.24\text{ atm} = P_2 + 2.27\text{ atm}$$

$$P_2 = 3.24\text{ atm} - 2.27\text{ atm} \Rightarrow P_2 = 0.97\text{ atm}$$

Préparé par :  
Dr. BAGHDAD Mohammed

# Avant-propos

Les fluides sont présents partout. Pour s'en convaincre, il suffit de penser à l'air de l'atmosphère, les eaux des rivières et des océans, les huiles de toute nature, le sang dans les veines. On note aussi que les fluides sont présents dans de très nombreux secteurs industriels, tels que l'aéronautique, le transport maritime, le secteur automobile, les industries pétrolières, chimiques ou nucléaires, le génie biomédical, l'environnement, . . .

Depuis toujours les fluides ont été étudiés, et ils continuent de l'être au sein d'une importante communauté scientifique internationale. Il reste encore beaucoup de problèmes à comprendre, tant au niveau des fondements que des applications.

Ce document présente la suite de la mécanique des fluides II. Il s'adresse principalement aux étudiants suivant une formation universitaire de niveau première année Master Génie Mécanique, spécialité énergétique & Installation énergétique et turbomachine. Il correspond au cours que j'ai enseigné, à l'Université *Ahmed Ben Yahia El-Wancharissi-Tissemsilt*.

L'objectif essentiel est de présenter les lois et notions fondamentales valables pour un milieu fluide et de les illustrer sur des exemples simples et des exercices avec corrections. Dans le chapitre 1, on présente une petite bref historique sur la science en mécanique des fluide, et on décrit quelques notion de base utiles à leur étude. Le chapitre 2 est consacré à la statique des fluides. Après avoir introduit la notion de pression, la loi fondamentale de la statique est formulée. Celle-ci, donnée d'une part pour un volume de fluide et d'autre part en chaque point du milieu fluide, conduit notamment à la définition de la poussée d'Archimède et à flottabilité et la stabilité d'un corps flottant.

Aux chapitres 3, 4 et 5, nous présentons quelques types d'écoulements avec la résolution des équations de Navier-Stokes dans des cas simples. La notion de la couche limite et une introduction à la turbulence a été détaillé dans les chapitre 6 et 7.

# Sommaire

## Chapitre 01 : Concepts de base en mécanique des fluides

1.1	Rappel Mathématique.....	01
1.2	Le concept de fluide.....	02
1.2.1	Le point de vue macroscopique.....	03
1.2.2	Le point de vue microscopique.....	04
1.3	Le fluide comme continuum.....	05
1.4	Forces fluides.....	07
1.4.1	Forces du corps.....	07
1.4.2	Forces de surface.....	08
1.4.3	Le tenseur des contraintes.....	09
1.5	Le concept de pression.....	14
1.6	Tension superficielle.....	17

## Chapitre 02 : Equations de transport en mécanique des fluides

2.1	Conservation de la Masse.....	19
2.1.1	Dérivée particulaire.....	19
2.1.2	Equation de continuité.....	19
2.2	Fonction de courant pour un écoulement bidimensionnel.....	22
2.3	Equation de Mouvement (Equations de Navier-Stokes).....	24
2.4	Equation de l'Energie.....	29

## Chapitre 03 : Flux de fluides parfaits

3.1	Équations de mouvements.....	33
3.1.1	Autres formes de l'équation d'Euler.....	33
3.2	Quelques propriétés des mouvements fluides parfaits.....	34
3.2.1	Théorème de Bernoulli.....	34
3.3	Flux irrotationnels.....	37
3.4	Flux avec tourbillon.....	39
3.4.1	La dynamique du tourbillon.....	39
3.4.2	Exemples d'écoulements vortex	42

## Chapitre 04 : Ecoulement de fluides visqueux incompressibles

4.1	Introduction.....	48
-----	-------------------	----

4.2	Flux D'entrée.....	49
4.3	Écoulement laminaire entre plaques parallèles.....	51
4.3.1	L'approche élémentaire.....	51
4.3.2	Application des équations de Navier-Stokes.....	53
4.3.3	Grandeurs d'intérêt.....	54
4.4	Flux laminaire dans une conduite.....	56
4.4.1	L'approche élémentaire.....	56
4.4.2	Application des équations de Navier-Stokes.....	58
4.4.3	Grandeurs d'intérêt.....	59
4.5	Flux laminaire entre cylindres tournants.....	61
4.5.1	L'approche élémentaire.....	61
4.5.2	Application des équations de Navier-Stokes.....	63
4.5.3	Grandeurs d'intérêt.....	64
4.6	Flux à canal ouvert.....	66

### **Chapitre 05 : Flux externes**

5.1	Introduction.....	69
5.2	Écoulement autour de corps émoussés.....	71
5.2.1	Coefficients de traînée.....	71
5.2.2	Dégagement des tourbillons.....	74
5.2.3	Cavitations.....	76
5.3	Écoulement autour des profils.....	78

### **Chapitre 06 : Écoulement en couche limite**

6.1	Introduction.....	81
6.2	Equations intégrales.....	83
6.3	Couches limites laminaires et turbulentes.....	85
6.4	Équation différentielle laminaire de couche limite.....	90

### **Chapitre 07 : Introduction à la turbulence**

7.1	Écoulement turbulent dans une conduite.....	95
7.2	Le profil semi-log.....	97
7.3	Le profil de loi de puissance.....	98
7.4	Pertes dans le débit des canalisations.....	100
7.5	Pertes dans les conduits non circulaires.....	103
7.6	Pertes mineures.....	104
7.7	Conduites hydrauliques et énergétiques.....	106

# Chapitre 01

## Concepts de base en mécanique des fluides

Ce chapitre définira un fluide et introduira des concepts importants à la mécanique des fluides, comme l'hypothèse du continuum et les forces exercées par/sur un fluide, qui permettent un traitement mathématique de l'écoulement d'un fluide.

### 1.1 Rappel Mathématique

**Gradient** : C'est une généralisation de la notion de dérivée pour une fonction à plusieurs variables. Soit  $f$  une fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . On peut définir ses trois dérivées partielles. À partir de ces trois valeurs on peut construire un vecteur, le gradient, qu'on note  $grad$  ou  $\nabla$ .

En trois dimensions et coordonnées cartésiennes, le champ de gradients vérifie (en base orthonormée) :

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

**Divergence** : s'applique à un champ de tenseurs d'ordre  $n$  et le transforme en un champ de tenseurs d'ordre  $n-1$ . Pratiquement, la divergence d'un champ de vecteurs exprime sa tendance à fluer localement hors d'un petit volume entourant le point  $M$  où est calculée la divergence.

En trois dimensions et en coordonnées cartésiennes, si  $\vec{F}$  est un tenseur d'ordre 1, alors c'est un vecteur et on peut définir la divergence par la relation :

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.2)$$

**Rotationnel** : transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. Plus difficile à se représenter aussi précisément que le gradient et la divergence, il exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point : sa circulation locale sur un petit lacet entourant le point  $M$  est non nulle. Par exemple :

le rotationnel du champ des vitesses  $\vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overline{OM}$  d'un solide qui tourne à vitesse constante  $\vec{\Omega}_0$  est constant, dirigé selon l'axe de rotation et orienté de telle sorte que la rotation ait lieu, par rapport à lui, dans le sens direct, et vaut simplement  $2\vec{\Omega}_0$ .

Dans un espace à 3 dimensions et en coordonnées cartésiennes, on peut définir le rotationnel par la relation :

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z / \partial y - \partial F_y / \partial z \\ \partial F_x / \partial z - \partial F_z / \partial x \\ \partial F_y / \partial x - \partial F_x / \partial y \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Où  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  désigne le champ de vecteurs auquel est appliqué l'opérateur rotationnel.

Cela peut aussi s'écrire, à l'aide d'un déterminant :

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

### *En coordonnées sphériques*

$$\overline{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (1.5)$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}}(\vec{A}) = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right) \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (1.7)$$

## **1.2 Le concept de fluide**

Afin de décrire ce qu'est un fluide, deux points de vue sont introduits : le macroscopique et le microscopique.

Le point de vue macroscopique consiste à observer la matière du point de vue sensoriel : la matière est constituée de ce que l'on touche et de ce que l'on voit. Il s'agit essentiellement du point de vue de l'ingénierie.

A l'opposé, le point de vue microscopique consiste à décrire la matière à travers sa structure moléculaire.

### 1.2.1 Le point de vue macroscopique

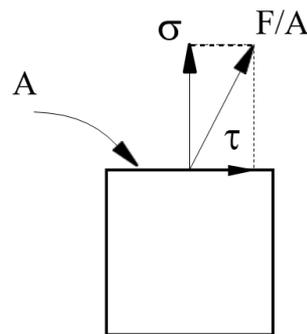
L'expérience nous apprend que, alors qu'à l'état solide la matière est plus ou moins rigide, les fluides sont cet état de la matière caractérisé par son mouvement et sa déformation sans fin.

Cependant, bien que l'observation ci-dessus soit très courante, une définition plus rigoureuse est nécessaire. Afin de formuler une telle définition, introduisons la notion de contrainte normale et de cisaillement.

#### *Contraintes normales et de cisaillement*

Étant donné une surface d'un corps sur laquelle une force agit, il existe deux types de contraintes agissant sur cette surface : la contrainte normale et la contrainte de cisaillement (ou tangentielle).

**Définition 1.1** (Contrainte normale). La contrainte normale  $\sigma$  est la force par unité de surface exercée perpendiculairement à la surface sur laquelle elle agit.



**Figure 1.1.** Contraintes normales  $\sigma$  et de cisaillement  $\tau$  dues à la force  $F$  agissant sur la surface  $A$ .

**Définition 1.2** (Contrainte de cisaillement). La contrainte de cisaillement (ou tangentielle)  $\tau$  est la force par unité de surface exercée tangentiellement à la surface sur laquelle elle agit.

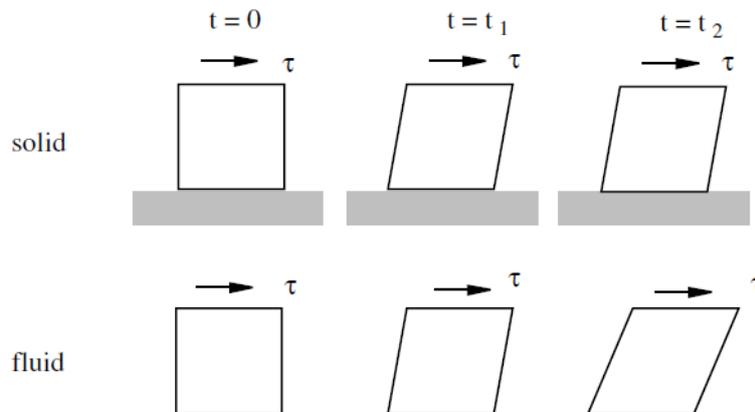
**Remarque 1.1.** L'unité SI de contrainte est le pascal  $Pa = N/m^2$ . Le pascal étant une très petite unité, dans les applications techniques, Mégapascal,  $1 MPa = 10^6 Pa$ , est plus fréquemment utilisé.

#### **Définition d'un fluide**

Avec le concept de contrainte de cisaillement à portée de main, nous pouvons définir formellement un fluide. Ensuite, deux définitions équivalentes d'un fluide sont présentées.

**Définition 1.3 (Fluide).** Un fluide est une substance qui se déforme continuellement sous l'action d'une contrainte de cisaillement.

Définition 1.4 (Fluide). Un fluide est une substance qui au repos ne peut résister aux contraintes de cisaillement.



**Figure 1.2.** Comportement d'une petite pièce rectangulaire de solide et de fluide sous l'action d'une contrainte de cisaillement.

### Différences entre solides, liquides et gaz

Afin de mieux comprendre ce qu'est un fluide, il est utile de comparer un fluide à un solide. Sur la figure 1.2, on peut observer que (en dessous de la limite élastique de déformation) un solide soumis à une contrainte de cisaillement se déforme jusqu'à atteindre la déformation d'équilibre, conservant ensuite sa forme. Une fois la force supprimée, le solide retrouve sa forme initiale.

À l'inverse, lorsqu'il est soumis à une contrainte de cisaillement, un fluide se déforme continuellement jusqu'à ce que la force soit relâchée. Un fluide ne retrouve pas sa forme initiale lorsque la contrainte de cisaillement est supprimée. Des exemples de fluides courants sont l'eau, l'huile et l'air.

Cependant, la distinction entre solides et fluides n'est pas toujours claire. Il existe des substances qui se comportent comme des solides lorsque la contrainte agit pendant une courte période de temps, mais se transforment en fluides lorsque la contrainte se prolonge dans le temps. Deux exemples de telles substances sont l'asphalte et la croûte terrestre. Il existe d'autres solides qui se comportent comme des fluides lorsque la contrainte qui les exerce atteint un certain seuil, comme le dentifrice, la pâte à modeler et le fromage fondu.

### 1.2.2 Le point de vue microscopique

L'origine du comportement des substances repose sur leur structure microscopique. La matière est formée de molécules en mouvement, soumises à divers types de forces intermoléculaires.

Ces forces maintiennent la liaison des molécules, et c'est la force de ces forces qui distingue les états solide et fluide (liquide ou gazeux) de la matière.

Dans un solide, les forces intermoléculaires sont fortes, permettant aux molécules de rester à une position approximativement fixe dans l'espace. Pour les liquides, ces forces de cohésion sont intermédiaires, suffisamment faibles pour permettre des mouvements relatifs entre les molécules, mais suffisamment fortes pour maintenir constante la distance relative. Les liquides, lorsqu'ils se trouvent à l'intérieur d'un récipient ouvert dans un champ gravitationnel, prennent la forme du récipient et forment une surface de séparation avec l'air, appelée surface libre. Enfin, dans les gaz, les forces intermoléculaires sont si faibles qu'elles permettent une distance intermoléculaire variable. Les gaz ont tendance à se dilater et à occuper tout le volume disponible.

### 1.3 Le fluide comme continuum

Un écoulement de fluide est caractérisé par la spécification de variables de fluide (parfois également appelées propriétés du fluide) telles que la densité  $\rho$ , la pression  $p$ , la température  $T$ , le vecteur vitesse  $v$ , la concentration chimique du composant, etc. Mais selon la structure moléculaire de la nature, si la matière est constituée de vides et de particules en mouvement rapide, comment pouvons-nous définir chacune des variables fluides ci-dessus ?

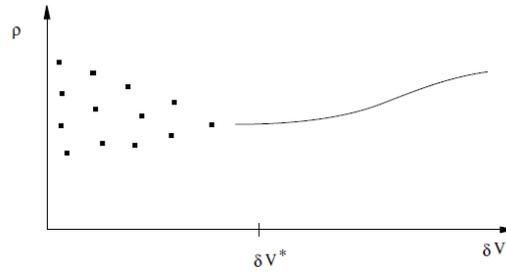
Par exemple, examinons la densité du fluide. Pour cela, prenons un volume de matière  $\delta V$ , qui aura une masse  $\delta m$ . En principe, la densité peut être calculée comme le rapport entre la masse  $\delta m$  et son volume  $\delta V$ ,

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V} \quad (1.8)$$

Cependant, selon la taille du volume  $\delta V$ , on retrouvera différentes valeurs de la densité.

Si  $\delta V$  est très petit, disons microscopique, en raison d'un mouvement moléculaire aléatoire, on peut tantôt trouver une molécule, tantôt trois, etc. La valeur de la densité variera donc d'une mesure à l'autre. Ce type d'incertitude est appelé incertitude microscopique et est provoqué par la nature discontinue et fluctuante de la matière.

En revanche, si le volume d'échantillonnage est très grand, comme une pièce, statistiquement parlant, le nombre de molécules à l'intérieur sera constant. Cependant, en raison des variations de densité à l'intérieur du volume, la densité moyenne peut différer de la densité réelle au centre de la pièce. Ce type d'incertitude est appelé incertitude macroscopique et est provoqué par la variation spatiale des variables du fluide.



**Figure 1.3.** Comportement de la densité mesurée en fonction du volume de l'échantillon

En conséquence, afin de calculer une valeur raisonnable de la densité, nous avons besoin d'une taille spécifique du volume d'échantillonnage  $\delta V^*$ , ni trop grande ni trop petite. Ce volume doit également contenir suffisamment de molécules pour pouvoir atteindre des moyennes statistiquement significatives. Ainsi, la densité en un point de l'espace est définie comme :

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \frac{\delta m}{\delta V} \quad (1.9)$$

On a estimé que pour une mesure stable, ce volume doit contenir environ 106 molécules. Par conséquent, la taille de  $\delta V^*$  doit être de  $\sqrt[3]{\delta V^*}/\delta \approx 100$  où  $\delta$  est la distance entre les molécules. Par exemple, pour de l'air à température ambiante, un volume  $\delta V^*$  de l'ordre de  $10^{-9}$  mm<sup>3</sup> contient environ  $3 \times 10^7$  molécules, nombre suffisamment grand pour atteindre une valeur de densité correcte.

De plus, afin de pouvoir utiliser le calcul différentiel, on supposera que la définition ci-dessus de la densité donne une fonction continue et continûment différentiable. Les substances traitées selon cette hypothèse sont appelées milieux continus et sont étudiées dans la branche de la physique appelée mécanique des continus.

En conclusion, l'hypothèse du continuum nous permet de modéliser la matière discontinue comme continue. Certes, chaque hypothèse a une certaine plage de validité. L'hypothèse du continuum est valable tant qu'une longueur caractéristique de l'écoulement  $L$  est bien supérieure à celle de  $\delta V^*$ , soit  $\sqrt[3]{\delta V^*} \ll L$ . C'est le cas des écoulements courants à vitesses modérées, comme ceux rencontrés dans les usines chimiques, les applications d'ingénierie et l'aérodynamique des véhicules. Cependant, cette hypothèse ne peut pas être appliquée par exemple à des écoulements à des pressions proches de zéro (appelés gaz raréfiés), comme lors de la rentrée des engins spatiaux dans l'atmosphère. Également dans les applications microfluidiques, où les phénomènes de transport des fluides interviennent dans des dispositifs à l'échelle micro et nano, l'hypothèse du continuum peut facilement s'effondrer.

## 1.4 Forces fluides

L'intensité des processus de transport dépend essentiellement du mouvement des fluides. C'est l'une des caractéristiques saillantes des phénomènes de transport dans les fluides. Et puisque le mouvement du fluide est poussé par les forces appliquées au fluide, ces forces du fluide sont d'une importance primordiale dans la détermination des processus mentionnés. Par conséquent, ce chapitre présente les principales forces qui, à des fins d'ingénierie, agissent sur un fluide, à savoir les forces corporelles, les forces superficielles et la tension superficielle. Le concept de pression statique est également expliqué.

Nous nous intéressons à la description des phénomènes de transport dans les fluides en mouvement. En mécanique classique, un mouvement est décrit par la deuxième loi de Newton. Par exemple, l'accélération  $a$  d'une particule de masse  $m$  soumise à des forces extérieures  $\Sigma F$  est donnée par :

$$\sum F = m a \quad (1.10)$$

Par conséquent, pour déterminer le mouvement du fluide, nous devons connaître les forces qui agissent sur les particules du fluide.

Généralement, dans les applications d'ingénierie des fluides, trois types de forces sont considérés : Forces du corps, Forces de surface et Forces linéaires ou tension superficielle.

### 1.4.1 Forces du corps

Ce type de force agit sur tout le volume matériel à distance, sans contact. Un exemple est la force gravitationnelle. Ce champ de force peut être défini de deux manières différentes.

La première méthode est la force volumique, qui est définie comme la force exercée par unité de volume.

$$f_v = \frac{\text{force}}{\text{volume}} \quad (1.11)$$

Elle peut également être définie comme une force de masse, la force exercée sur le corps par unité de masse,

$$f_m = \frac{\text{force}}{\text{mass}} \quad (1.12)$$

La force différentielle  $dF_v$  agissant sur un élément différentiel de volume  $dV$  et de masse  $dm = \rho dV$  peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned} dF_v &= f_v dV \\ dF_v &= f_m dm = f_m \rho dV \end{aligned} \quad (1.13)$$

La force totale sur un domaine V donné peut être calculée par intégration :

$$\begin{aligned} F_v &= \int_V f_v dV \\ F_v &= \int_V \rho f_m dV \end{aligned} \quad (1.14)$$

Notez que les deux types de forces (par unité de masse ou de volume) peuvent être utilisés pour calculer la force totale  $F_v$  exercée sur un corps. En conséquence,

$$f_v = \rho f_m \quad (1.15)$$

Comme exemples de ce type de force, on peut citer

(a) La gravité

$$f_v = \rho g \quad (1.16)$$

où  $\rho$  est la masse volumique \* du fluide ( $ML^{-3}$ ), et  $g$  l'accélération du champ gravitationnel (de dimensions  $LT^{-2}$  et  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

(b) La force électromagnétique

$$f_v = \rho_e E + J \times B \quad (1.17)$$

(c) Forces d'inertie dues à l'accélération des systèmes de référence relatifs

$$f_m = -(a_0 + \dot{\Omega} \times r + \Omega \times (\Omega \times r) + 2\Omega \times v) \quad (1.18)$$

où  $a_0$  est l'accélération de l'origine du système relatif ;  $\Omega$  est la vitesse angulaire du système de référence ;  $\dot{\Omega}$ , son accélération angulaire ;  $r$ , le vecteur position et  $v$ , la vitesse du fluide par rapport au référentiel relatif.

### 1.4.2 Forces de surface

Comme leur nom l'indique, ces forces agissent sur la surface de la particule fluide ou sur la surface du domaine fluide considéré. Ces forces sont calculées à partir des contraintes :

$$f_s = \frac{\text{force}}{\text{surface}} \quad (1.19)$$

La force agissant sur un élément différentiel de la surface  $dS$  est

$$dF_s = f_s dS \quad (1.20)$$

dont l'intégration sur la surface donnée  $S$  donne la force globale

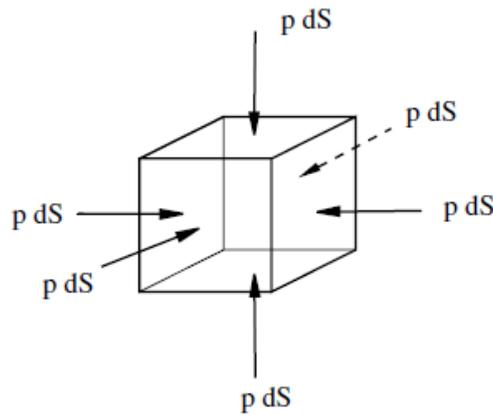
$$F_s = \int_S f_s dS \quad (1.21)$$

Des exemples de contraintes qui produisent des forces de surface sont

(a) La pression  $p$ , où la contrainte agissant sur la direction  $s$  est donnée par

$$f_s = -pn \quad (1.22)$$

(b) La force de frottement



**Figure 1.4.** Forces de pression agissant sur la particule fluide.

### 1.4.3 Le tenseur des contraintes

La formulation mathématique pour calculer les contraintes (et les forces) de surface est beaucoup plus complexe que celle des forces corporelles car elles dépendent de l'orientation de la surface. En effet, en un point de l'espace, il existe une infinité de plans, et il faut en tenir compte.

L'idée fondamentale est que pour calculer  $f_s$  dans n'importe quel plan, les contraintes agissant sur trois plans perpendiculaires sont nécessaires. Autrement dit, nous avons besoin de 3 plans  $\times$  (3forces/plan) = 9 données par point. Ces contraintes sont regroupées dans le tenseur des contraintes.

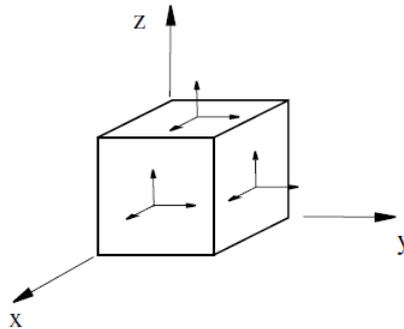
**Définition 1.3** (Tenseur des contraintes). Le tenseur des contraintes est la matrice  $\tau$  dont les composantes  $\tau_{ij}$  représentent les contraintes, c'est-à-dire les rapports

$$stress = \frac{force}{surface} \quad (1.23)$$

Pour les flux tridimensionnels,  $1 \leq i, j \leq 3$ , et

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

**Définition 1.4** (Composantes du tenseur des contraintes). La composante  $\tau_{ij}$  du tenseur des contraintes est la contrainte qui agit sur le plan perpendiculaire à l'axe  $i$  et dans la direction de l'axe  $j$  pour les faces de premier plan et dans la direction opposée pour les faces d'arrière-plan.



**Figure 1.5.** Contraintes positives qui agissent sur les faces de premier plan d'un cube élémentaire

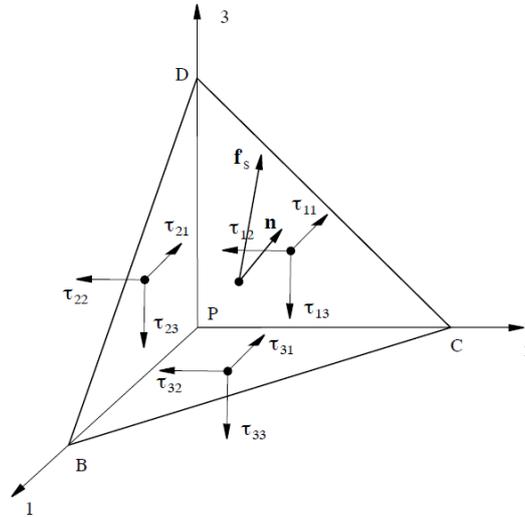
**Remarque 1.3** Les faces de premier plan sont celles où le vecteur normal est aligné sur un axe de coordonnées et les faces d'arrière-plan celles où le vecteur normal est dans la direction opposée à un axe de coordonnées.

**Remarque 1.4** La convention opposée pour  $i$  et  $j$  se trouve également. Cela n'a aucune implication pratique puisque, comme indiqué ci-dessous, le tenseur des contraintes est symétrique.

**Définition 3.5** (Contrainte normale). Les contraintes normales sont celles perpendiculaires à la face sur laquelle elles agissent, soit  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$  et  $\tau_{33}$ .

**Définition 3.6** (Cisaillement ou contrainte tangentielle). Les contraintes de cisaillement ou tangentielles sont celles tangentes à la surface sur laquelle elles agissent, c'est-à-dire  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{21}$ ,  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$  et  $\tau_{32}$ .

**Remarque 1.5** En coordonnées cartésiennes, les composantes du tenseur de contraintes sont également désignées par  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ ,  $\tau_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$ .



**Figure 1.6.** Tétraèdre infinitésimal utilisé pour obtenir le tenseur des contraintes au point P

### Dérivation du tenseur des contraintes

Afin de déterminer l'expression générale de la contrainte en un point P à partir des contraintes sur trois plans perpendiculaires, sélectionnons le volume de fluide infinitésimal de la Fig. 3.3 et appliquons la deuxième loi de Newton.

$$\sum F = ma \quad (1.25)$$

La notation suivante est utilisée pour les vecteurs et les zones,

$$PB = dx_1$$

$$PC = dx_2$$

$$PD = dx_3$$

$$dA = BCD \quad (1.26)$$

$$dA_1 = CPD = n_1 dA$$

$$dA_2 = BPD = n_2 dA$$

$$dA_3 = BPC = n_3 dA$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_s &= \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{n} &= \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \\
\mathbf{a} &= \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \\
\mathbf{f}_v &= \rho \mathbf{g} = \rho \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

L'élément infinitésimal est un tétraèdre de volume

$$dV = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} dx_1 dx_2 \right) dx_3 = \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3 \tag{1.28}$$

et la masse

$$dm = \rho dV \tag{1.29}$$

La première composante de l'équation du mouvement est

$$f_{s1} dA - \tau_{11} n_1 dA - \tau_{21} n_2 dA - \tau_{31} n_3 dA + \rho g_1 \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3 = \rho a_1 \frac{1}{6} dx_1 dx_2 dx_3 \tag{1.30}$$

En ignorant les infinitésimaux du troisième ordre  $dx_1 dx_2 dx_3$  par rapport aux infinitésimaux du deuxième ordre  $dA$ ,

$$f_{s1} - \tau_{11} n_1 - \tau_{21} n_2 - \tau_{31} n_3 = 0 \tag{1.31}$$

De même, pour les directions 2 et 3 on a respectivement :

$$f_{s2} - \tau_{12} n_1 - \tau_{22} n_2 - \tau_{32} n_3 = 0 \tag{1.32}$$

$$f_{s3} - \tau_{13} n_1 - \tau_{23} n_2 - \tau_{33} n_3 = 0 \tag{1.33}$$

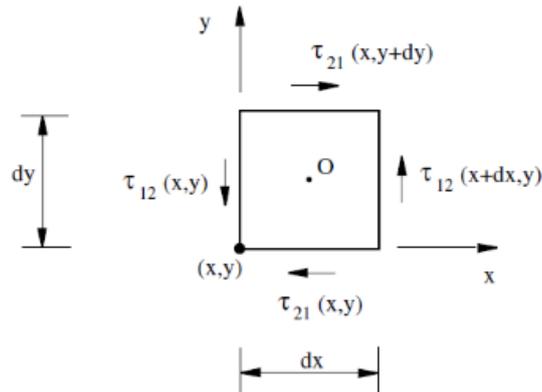
En résumé,

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ f_{s3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{1.34}$$

Comme nous le montrerons, le tenseur des contraintes est symétrique et, par conséquent, en notation tensorielle, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{f}_s = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \quad (1.35)$$

**Conclusion :** Si  $\boldsymbol{\tau}$  est connu, la force de surface agissant dans n'importe quelle direction peut être calculée.



**Figure 1.7.** Contraintes sur un cube agissant sur l'équilibre du couple autour de l'axe  $z$

### Symétrie du tenseur des contraintes

Le tenseur  $\boldsymbol{\tau}$  est symétrique, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \tau_{21} \\ \tau_{13} &= \tau_{31} \\ \tau_{23} &= \tau_{32} \end{aligned} \quad (1.36)$$

**Preuve :** Prenons un cube infinitésimal de côtés  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  ( Figure 1.7). L'équation du moment cinétique par rapport à un axe parallèle à  $z$  qui passe par le point  $O$  implique

$$\sum M_O = I \dot{\Omega} \quad (1.37)$$

avec  $\sum M_O$  les moments externes autour de l'axe  $z$  agissant sur le cube,  $I$  le moment d'inertie et  $\dot{\Omega}$  l'accélération angulaire autour de l'axe  $z$ . La figure 1.7 montre toutes les composantes du tenseur de contraintes qui contribuent à l'équilibre des moments ci-dessus.

Comme dans la section précédente, le moment extérieur est un infinitésimal du troisième ordre tandis que le moment d'inertie est un infinitésimal du quatrième ordre. Par conséquent, dans la limite  $dV \rightarrow 0$ , l'équation ci-dessus tend à

$$\sum M_O = 0 \quad (1.38)$$

Prendre des moments par rapport au point O et utiliser les séries de Taylor,

$$\begin{aligned} \sum M_O &= \left( \tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} (dydz) + \tau_{12} \frac{dx}{2} (dydz) \\ &- \left( \tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial y} dy \right) \frac{dy}{2} (dxdz) - \tau_{21} \frac{dy}{2} (dxdz) = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ignorer les infinitésimaux du quatrième ordre par rapport à ceux du troisième ordre donne

$$\tau_{12} dx dy dz - \tau_{21} dx dy dz = 0 \quad (1.40)$$

et puisque  $dx dy dz \neq 0$ ,

$$\tau_{12} = \tau_{21} \quad (1.41)$$

De même pour le reste des contraintes.

### 1.5 Le concept de pression

Afin d'introduire la notion de pression, prenons un fluide au repos. Selon la définition d'un fluide, un fluide au repos ne peut résister à aucune contrainte tangente, ce qui implique que toutes les composantes hors diagonale du tenseur des contraintes disparaissent,

$$\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad (1.42)$$

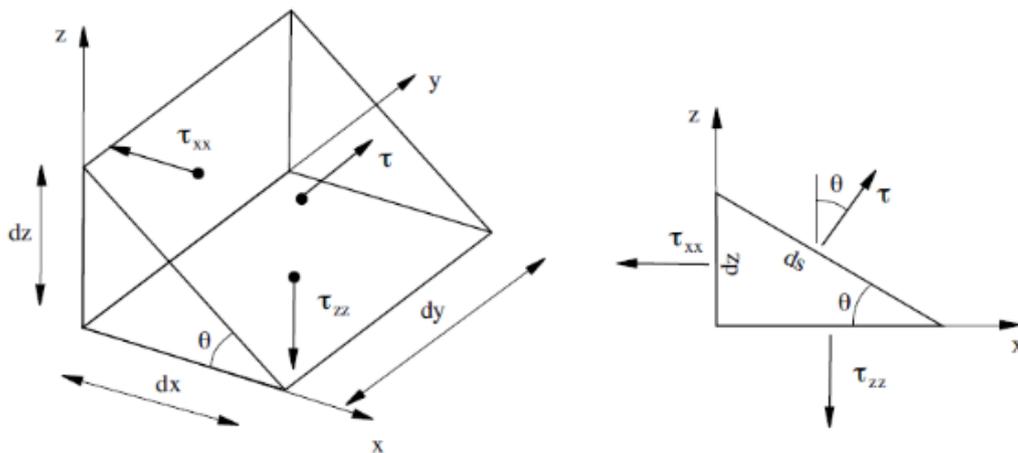
et le tenseur des contraintes se réduit aux contraintes normales,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Prenons le prisme rectangulaire de la figure 1.8. L'équilibre des forces dans la direction x implique

$$-\tau_{xx} dz dy + \tau ds dy \sin \theta = 0 \quad (1.44)$$

En tenant compte de la géométrie du prisme



**Figure 1.8.** Volume infinitésimal pour en déduire la notion de pression

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta \quad (1.45)$$

nous concluons

$$\tau_{xx} = \tau \quad \text{for any plane } \theta \quad (1.46)$$

De même, il tient

$$\tau_{xx} = \tau_{zz} \quad (1.47)$$

Conséquence. Dans un fluide au repos, les contraintes normales sont identiques dans n'importe quelle direction spatiale. Cette contrainte normale est appelée pression,  $p > 0$ , et comme il s'agit d'une contrainte de compression, elle est négative, de sorte que

$$\tau = \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p \quad (1.48)$$

Le tenseur des contraintes dans un fluide au repos est donc :

$$\tau = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Notez que la pression est un scalaire et qu'elle agit de la même manière dans n'importe quelle direction spatiale. La direction de la force provoquée par la pression est déterminée par la normale à la surface  $n$ . Le signe moins indique que la pression est une contrainte normale

négative, également appelée compression, qui agit dans la direction opposée à la normale extérieure. Lorsque la contrainte normale est positive, elle agit alors dans la direction de la normale extérieure, produisant une traction.

Remarque 3.4. Ce type de tenseur, proportionnel au tenseur identité, est appelé tenseur isotrope.

Remarque 3.5. Pour un fluide en mouvement, le tenseur des contraintes est la somme de l'action due à la pression plus une contribution du mouvement, appelé tenseur des contraintes visqueux  $\tau'$ , qui est introduit au chapitre 7.

Remarque 3.6. Pour un liquide, la pression est une variable mécanique. Elle peut également être définie comme la contrainte normale moyenne de la particule fluide, techniquement parlant, la trace du tenseur des contraintes.

Remarque 3.7. Pour un gaz, la pression est une variable thermodynamique. Dans ce cas, la pression ne peut pas être définie comme la contrainte normale moyenne de la particule fluide.

Unités de pression

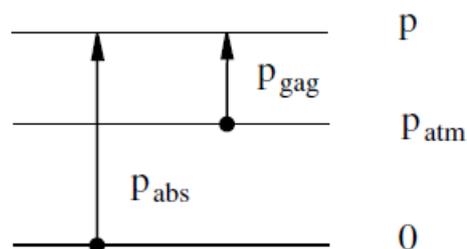
En tant que contrainte normale, les unités de pression sont équivalentes à :

$$\frac{\text{force}}{\text{surface}} \quad (1.50)$$

Voir le tableau 3.1.

**Tableau 3.1.** Unités de pression communes SI et non SI.

Name	Symbol	Equivalence
pascal (SI)	Pa	1 Pa = 1 N/m <sup>2</sup>
bar	bar	1 bar = 10 <sup>5</sup> Pa
atmosphère (standard)	atm	1 atm = 101 300 Pa
mètre d'eau	mH <sub>2</sub> O	1 mH <sub>2</sub> O = 1 000 g Pa
millimètre de mercure	mmHg	1 mmHg = 13 600 g Pa
kilogramme-force/centimètre carré (TS)	kgf/cm <sup>2</sup>	1 kgf/cm <sup>2</sup> = 10 <sup>4</sup> g Pa



**Figure 1.9.** Pression absolue et relative

### Pression absolue et relative

La pression absolue  $p_{abs}$  représente la force par unité de surface exercée par les molécules contre les parois. Elle est toujours positive et dans le cas d'un gaz, elle correspond à la pression thermodynamique.

La pression relative  $p_{gag}$  est la pression mesurée par rapport à la pression atmosphérique  $p_{atm}$ ,

$$p_{gag} = p_{abs} - p_{atm} \quad (1.51)$$

Elle peut être positive ou négative, sa valeur minimale étant  $-p_{atm}$  (voir Fig. 3.6).

La pression atmosphérique est prise comme

$$p_{atm} = 101.3 \text{ kPa} = 1.013 \text{ bar} \quad (1.52)$$

### 1.6 Tension superficielle

Aux interfaces entre deux substances, les forces intermoléculaires des deux côtés diffèrent, apparaissant comme une force supplémentaire. Au niveau macroscopique, les forces interfaciales peuvent être modélisées par la tension superficielle  $\sigma$ ,

$$\text{surface tension} = \frac{\text{force}}{\text{length}} \quad (1.53)$$

qui provoque une force tangente à l'interface et orthogonale à toute ligne passant par l'interface, de module

$$dF_l = \sigma \, dl \quad (1.54)$$

La tension superficielle dépend du couple de substances qui forment l'interface et de la température. Lorsque la tension superficielle est positive, les molécules de chaque phase ont tendance à être repoussées vers leur propre phase. C'est le cas par exemple de deux liquides non miscibles. Lorsque la tension superficielle est négative, les molécules des deux phases ont tendance à se mélanger, comme deux liquides miscibles. Dans le cas d'une interface liquide/gaz, la tension superficielle a tendance à maintenir l'interface (ou surface libre) droite. Une situation importante apparaît lorsque trois substances se rencontrent en formant trois interfaces, par exemple au niveau d'une interface paroi/liquide/gaz. Dans ce cas, la ligne qui constitue l'intersection des trois interfaces est appelée ligne de contact. L'angle que forment deux interfaces au niveau de la ligne de contact est appelé angle de contact et dépend de la

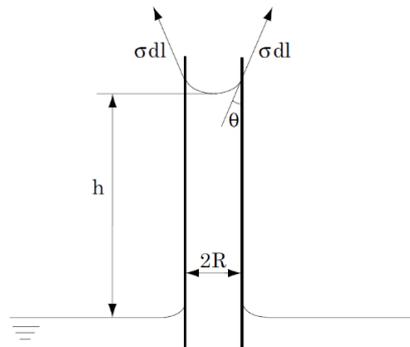
tension superficielle de toutes les interfaces. L'angle de contact dépend donc uniquement des trois substances et de la température.

Le nombre sans dimension qui contrôle la signification de la force de tension superficielle est appelé nombre de Weber,

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \quad (\text{Nombre de Weber}) \quad (1.55)$$

**Tableau 3.2.** Tension superficielle pour différentes paires de fluides à 20° en N/m × 10<sup>3</sup>.

	Eau	Mercure	Éthanol	Benzène
Air	72.8	487	22	29
Eau		375	< 0	35



**Figure 1.10.** Liquide montant à travers un capillaire.

où  $U$  et  $L$  sont respectivement une échelle caractéristique de vitesse et de longueur du problème.

# Chapitre 2

## Equations de transport en mécanique des fluides

### 2.1 Conservation de la Masse

#### 2.1.1 Dérivée particulaire

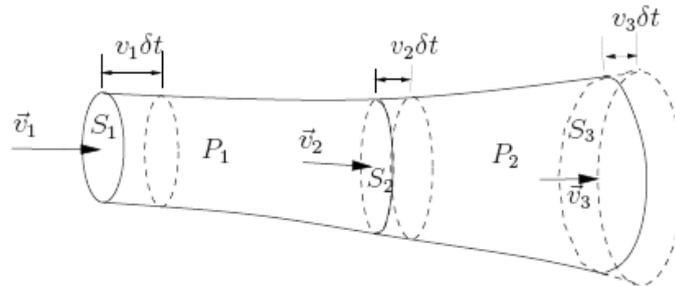
Dans la description Eulérienne, la variation d'une fonction scalaire  $F(\vec{r}, t)$  dérivable au cours du temps est constituée de deux parties : une variation locale liée à la position où se trouve la particule à l'instant donné, et une variation provenant de son mouvement en espace. Soit  $\vec{r}$  la position de la particule à l'instant  $t$  et  $\vec{r} + \Delta\vec{r}$  celle à l'instant  $t + \Delta t$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - F(\vec{r}, t)}{\Delta t}, \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(\vec{r}, t + \Delta t) - F(\vec{r}, t)}{\Delta t} + \frac{F(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - F(\vec{r}, t + \Delta t)}{\Delta t} \right\} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} + O(\Delta t) + \frac{\text{grad}F(\vec{r}, t + \Delta t) \cdot \Delta\vec{r} + O(\Delta r^2)}{\Delta t} \right\} \\
 &= \frac{\partial F}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\text{grad}F(\vec{r}, t + \Delta t) \cdot [\vec{v}(\vec{r}, t)\Delta t + O(\vec{v}^2\Delta t^2)]}{\Delta t} \right\} \tag{2.1} \\
 &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}}_{\text{variation locale}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \text{grad}F}_{\text{variation due à la convection}}
 \end{aligned}$$

On appelle la *dérivée matérielle* ou *dérivée particulaire* car il s'agit de la dérivée associée à une particule lors de son mouvement.

#### 2.1.2 Equation de continuité

Une loi fondamentale de la mécanique est la conservation de la masse. Pour fixer les idées on considère d'abord un fluide de densité  $\rho$  en écoulement à vitesse uniforme  $\vec{v}$  à toute section  $S$  d'un tube de courant ou d'une conduite à section variable.



**Figure 2.1.** Écoulement dans une conduite à section variable de  $S_1$  à  $S_3$  avec  $S_1 < S_2 < S_3$ ; la vitesse étant supposée uniforme à toute section  $S$ .

La masse est nécessairement conservée, on conclut alors qu'à tout instant :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (2.2)$$

Pour exprimer cette loi sous forme différentielle, on considère maintenant un volume  $V$  fixe dans l'espace et enfermé par une surface dérivable  $S$ . Le débit massique de fluide entrant dans  $V$  est :

$$\text{Flux massique} = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad (2.3)$$

Le signe négatif indiquant que  $dS$  est compté positivement vers l'extérieur de  $V$ , car  $dS = \vec{n} \cdot dS$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire extérieur à  $S$ . Le taux d'accroissement de la masse dans  $V$  est :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV \quad (2.4)$$

et comme  $V$  est fixe dans l'espace on déduit que :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV. \quad (2.5)$$

or, la conservation de la masse implique

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.6)$$

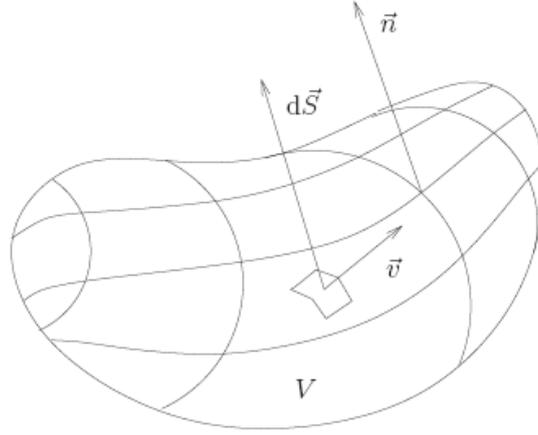
soit

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (2.7)$$

qui est l'équation de continuité sous forme intégrale.

Le théorème de la divergence :

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0. \quad (2.8)$$



**Figure 2.2.** Volume de contrôle  $V$  fixe dans l'espace par rapport à un référentiel galiléen;  
 $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à  $S$ .

En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradsky (dit théorème de la divergence), Eq. 2.8 s'écrit sous la forme :

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right\} dV = 0, \quad (2.9)$$

qui est valable quel que soit  $V$ . Ainsi, on tire l'équation de continuité sous forme différentielle:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.10)$$

Compte tenu de la dérivée matérielle, on peut calculer le taux Lagrangien (en suivant toute particule dans son mouvement) en fonction des mesures eulériennes, soit

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \quad (2.11)$$

et de (2.8), l'équation de continuité prend la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.12)$$

On conclut alors que pour une particule à masse volumique constante lors de son mouvement l'équation (2.9) se réduit à :

$$\nabla \vec{v} = \vec{0} \quad (2.13)$$

qui est l'équation de continuité pour un fluide (ou un écoulement) incompressible.

## 2.2 Fonction de courant pour un écoulement bidimensionnel

Considérons l'écoulement conservatif d'un fluide incompressible. Dans ce cas, l'équation de continuité se formule simplement par :  $\nabla \vec{v} = \vec{0}$ . Par ailleurs, quelle que soit la quantité vectorielle  $\vec{A}$ , en tout point de l'espace la relation mathématique  $\nabla(\nabla \wedge \vec{A}) = \vec{0}$  doit être vérifiée. Donc, par identification, on peut définir en tout point de l'espace le vecteur de la vitesse comme résultant de :  $\vec{v} = \nabla \wedge \vec{A}$ , où  $\vec{A}$  peut alors être qualifié de « potentiel vecteur ». La connaissance de ce potentiel vecteur en tout point de l'espace permet donc d'en déduire les trois composantes du vecteur de vitesse en ce même point :

$$\vec{v} = \nabla \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} v_x = \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z \\ v_y = \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x \\ v_z = \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Considérons maintenant que l'écoulement est bidimensionnel, dans le plan  $(\vec{i}, \vec{j})$ , impliquant que  $v_z = 0$  et qu'il y ait invariance par translation suivant  $z$ , d'où  $\partial / \partial z = 0$ . Il reste alors :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \partial A_z / \partial y \\ v_y = -\partial A_z / \partial x \\ v_z = 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Dans ces conditions, on note que chaque vecteur de vitesse est défini au moyen de seulement deux composantes et que celles-ci dérivent d'une seule composante parmi les trois du potentiel vecteur. On peut donc en conclure que le champ de vecteurs de vitesse d'un écoulement plan dérive d'une quantité scalaire, la fonction de courant  $\psi(x, y) = A_z$ . La connaissance de cette seule fonction de courant permet alors d'en déduire le champ de vecteurs vitesse en tout point de l'écoulement, par simple application de :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dans un système de coordonnées cylindriques, la démarche reste la même et conduit à définir  $\psi(r, \theta)$  pour exprimer les composantes cylindriques du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\v_\theta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r}\end{aligned}\tag{2.17}$$

### **Propriétés de la fonction de courant**

Partant de la fonction de courant pour définir le vecteur de vitesse, l'équation de continuité appliquée dans le cadre d'un écoulement plan et conservatif d'un fluide incompressible permet d'établir une propriété remarquable de la fonction de courant :

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0\tag{2.18}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}\tag{2.19}$$

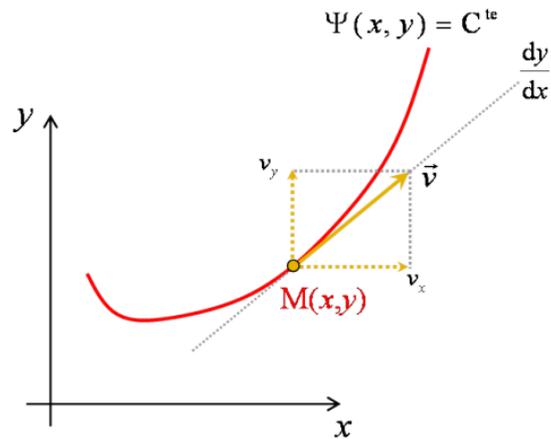
On en déduit par conséquent que  $d\Psi$  est une **différentielle totale exacte** et que  $d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$  possède une seule et unique primitive. En pratique, lorsqu'on intègre  $d\Psi$  d'un point A à un point B du plan, le résultat de l'intégration ne dépend donc pas du chemin suivi entre ces deux points :

$$\int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A = \Psi(x_B, y_B) - \Psi(x_A, y_A)\tag{2.20}$$

Dans le plan de l'écoulement, l'ensemble des points pour lesquels la fonction de courant renvoie une valeur constante définit une courbe particulière : il s'agit d'une courbe le long de laquelle  $d\Psi = 0$ , où doit être vérifié :  $\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0$ . Or, puisque  $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  et  $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ , on peut écrire :  $-v_y dx + v_x dy = 0$ , ce qui signifie qu'en chaque point de cette courbe, doit être vérifié :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}\tag{2.21}$$

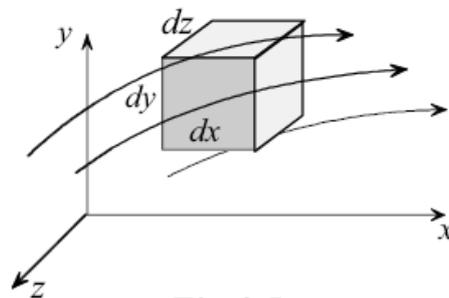
Autrement dit, la tangente à la courbe est en tout point identique à l'orientation du vecteur vitesse. Une courbe qui présente cette propriété est alors une courbe que l'on a déjà définie comme étant une ligne de courant. Il en résulte que **la fonction de courant est constante le long d'une ligne de courant.**



**Figure 2.3.** Fonction de courant

### 2.3 Equation de Mouvement (Equations de Navier-Stokrs)

Nous notons tout d'abord que l'élan est une grandeur vectorielle. Ainsi, la conservation de l'élan (loi du mouvement de Newton) fournit trois équations, une dans chacune des trois coordonnées. Application de la loi de Newton sur le mouvement à l'élément représenté sur la figure. 2.4.



**Figure 2.4.** Élément de fluide

$$\sum \delta \vec{F} = (\delta m) \vec{a} \quad (2.22)$$

Où  $a$  est accélération de l'élément,  $F$  est la force extérieure agissant sur l'élément et  $dm$  est la masse de l'élément.

Application de (2.22) dans la direction  $x$ , donne

$$\sum \delta F_x = (\delta m) a_x \quad (2.23)$$

La masse de l'élément est :  $\delta m = \rho dx dy dz$

Sur la base de l'hypothèse de continuum, l'accélération totale de l'élément dans la direction  $x$ , est

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.24)$$

En substituant (2.24) en (2.23), on donne :

$$\sum \delta F_x = \rho \frac{Du}{Dt} dx dy dz \quad (2.25)$$

La somme de toutes les forces extérieures agissant sur l'élément sur la direction x :

- ✓ La force du volume : est une force qui agit sur chaque particule du matériau ou de l'élément. Des exemples comprennent la gravité et des forces magnétiques.
- ✓ La force de la surface : est une force qui agit sur la surface de l'élément. Les exemples incluent les forces tangentielles (de cisaillement) et les forces normales (de pression et de stress).

$$\sum \delta F_x = \sum \delta F_x)_{body} + \sum \delta F_x)_{surface} \quad (2.26)$$

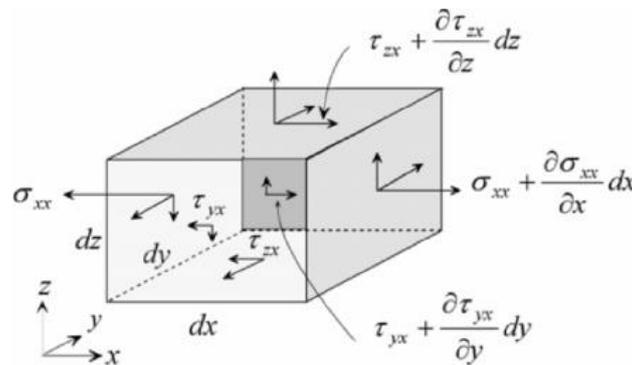
On considère que la gravité comme la seule force du corps agissant sur l'élément. Le Composant suivant x de cette force est :

$$\sum \delta F_x)_{body} = \rho g_x dx dy dz \quad (2.27)$$

où est la composante de l'accélération gravitationnelle dans la direction x.

Ensuite, nous formulons une expression pour les forces de surface dans la direction x.

Ces forces sont présentées dans la Fig. 4.2. Ils sont :



**Figure 2.5** Forces surfaciques sur un élément de fluide

En résumant toutes les forces de composante x de la Fig. 2.5 donne :

$$\sum \delta F_x)_{surface} = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.28)$$

Expressions similaires sont obtenus pour les forces de surface dans les directions y et z.

En substituant (2.26), (2.27) et (2.28) dans (2.25), donne l'équation x-direction

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.29)$$

De même, l'application de la loi du mouvement de Newton dans les directions  $y$  et  $z$  donne les deux équations de quantité de mouvement correspondantes. Par analogie avec (2.8a), ces équations sont :

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.30)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (2.31)$$

L'examen de ces équations montre qu'ils contiennent 13 inconnues:

$u, v, w, \rho, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$  et  $\tau_{zy}$

Application du principe moment de quantité de mouvement à un élément différentiel donne :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Pour réduire encore le nombre de variables inconnues, une restriction importante est introduite. L'idée de base est de relier contraintes normales et de cisaillement au champ de vitesse. Ceci est accompli grâce à l'introduction de relations fondées expérimentalement appelées équations constitutives. Ces équations sont :

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $\mu$  est la viscosité et  $p$  est la pression hydrostatique. Un fluide qui obéit (2.32) est appelé fluide newtonien. Des exemples de fluides newtoniens comprennent l'air, l'eau et la plupart des huiles. Fluides tels que le goudron, le miel et les polymères sont appelés non-newtonien.

En substituant (2.32) en (2.29), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\
\rho \frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
\rho \frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ces équations sont connues comme les équations de Navier-Stokes du mouvement. Elles s'appliquent à des fluides newtoniens.

Le nombre d'inconnues dans les trois équations sont six:  $u, v, w, p, \rho$ , et  $\mu$

Les hypothèses conduisant à (2.33) sont: continuum et fluide newtonien.

Exprimant équations (2.33) dans une forme vectorielle, donne :

$$\begin{aligned}
\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} &= \rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \frac{4}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{V}) + \nabla (\vec{V} \cdot \nabla \mu) \\
&\quad - \vec{V} \nabla^2 \mu + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V}) - (\nabla \cdot \vec{V}) \nabla \mu - \nabla \times (\nabla \times \mu \vec{V})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

### Cas simplifiées

**Viscosité constante** : Pour ce cas

$$\nabla \mu = 0 \tag{2.35}$$

et

$$\nabla \times (\nabla \times \mu \vec{V}) = \nabla (\nabla \cdot \mu \vec{V}) - \nabla \cdot \nabla \mu \vec{V} = \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \mu \nabla^2 \vec{V} \tag{2.36}$$

L'équation de Navier-Stokes du mouvement s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \bar{p} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.37)$$

### Viscosité constante et la densité

L'équation de continuité pour un fluide incompressible est donnée par l'équation :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.38)$$

L'équation de Navier-Stokes du mouvement s'écrit

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.39)$$

Notez que cette équation vectorielle représente les trois composantes des équations de Navier-Stokes du mouvement.

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

### Coordonnées cylindriques

Application de la loi du mouvement de Newton à un élément  $r d\theta dr dz$  infinitésimale dans les coordonnées cylindriques, donne les trois équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) &= \\ \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \right) &= \\ \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \\ \rho \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) &= \\ \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

### Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) = \\
 & \quad \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\
 & \rho \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \right) = \\
 & \quad \rho g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\
 & \rho \left( v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial t} \right) = \rho g_\phi \\
 & \quad - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left( \nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right)
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

avec

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{2.43}$$

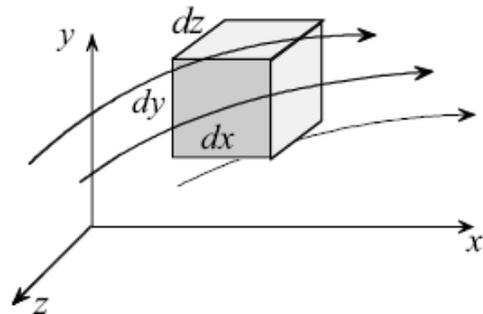
### 2.4 Equation de l'Energie

Considérons un élément  $dx dy dz$  en tant que volume de contrôle dans le champ d'écoulement,

Le fluide pénètre et quitte l'élément intermédiaire de ses six surfaces :

Introduire le principe de conservation de l'énergie (première loi de la thermodynamique). Nous commençons par la déclaration : « L'énergie ne peut être créée ou détruite ».

Cette déclaration n'est pas très utile pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur. On réécrit comme une équation et l'appliquer à l'élément:



<b>A</b>	<b>B</b>
Taux de variation de l'énergie interne et cinétique de l'élément =	Taux net de transport de l'énergie cinétique interne par convection +
<b>C</b>	<b>D</b>
Taux net de chaleur ajoutée par conduction–	Taux net de travail effectué par l'élément sur environnement

Notez que le taux net de l'équation de bilan se réfère au taux de l'énergie ajoutée moins le taux d'énergie extraite. L'objectif est d'exprimer chaque terme de l'équation en termes de température pour obtenir ce qu'on appelle l'équation énergétique. Dans cette section, nous allons vous expliquer la signification physique de chaque terme et son rapport à la température. L'équation d'énergie qui en résulte se présente sous plusieurs formes. La formulation suppose que: (1) continu, (2) un fluide newtonien, et (3) nucléaire négligeable, le transfert de l'énergie électromagnétique et le rayonnement.

Ainsi, nous devons tenir compte de toutes les forces de surface agissant sur chaque côté de l'élément ainsi que sur la masse de l'élément (des forces du corps). L'examen des Figure 4.2 montre qu'il y a trois forces de chaque côté pour un total de 18 forces. Chaque force se déplace avec sa propre vitesse. Les forces agissent sur le corps de masse de l'élément. Voici la seule force de corps considérée est la gravité. Comptabilisation des toutes les forces et leurs vitesses respectives détermine le travail net fait par l'élément sur les environs.

Formulation des quatre termes A, B, C et D donne l'équation d'énergie suivantes :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.44)$$

$c_p$  : la chaleur spécifique à pression constante

$k$  : conductivité thermique

$p$  : pression

$\beta$  : coefficient de dilatation thermique (compressibilité)

$\Phi$  : fonction de dissipation

Le coefficient de dilatation thermique  $\beta$  est une propriété de matériau définie comme :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_p \quad (2.45)$$

La fonction de dissipation  $\Phi$  est associée à la dissipation d'énergie due au frottement. Il est important dans le flux à grande vitesse et pour les fluides très visqueux. En coordonnées cartésiennes  $\Phi$  est donnée par :

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (2.46)$$

### Forme simplifiée de l'équation de l'énergie

L'équation (2.46) est basée sur les hypothèses suivantes: (1) continu, (2) des fluides newtoniens, et (3) nucléaires négligeable, transfert d'énergie électromagnétique et le rayonnement. Il peut être simplifié sous certaines conditions. Trois cas sont considérés :

#### - *Fluide incompressible :*

D'après (2.46),  $\beta = 0$  pour fluide incompressible. En outre, les relations thermodynamiques montrent que :  $c_p = c_v = c$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \mu \Phi \quad (2.47)$$

#### - *Fluide incompressible avec une conductivité constante :*

L'équation (5.4) est simplifiée davantage si la conductivité  $k$  est supposé constant. Le résultat est :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi \quad (2.48)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi \quad (2.49)$$

Notez que pour un fluide incompressible, le dernier terme de la fonction de dissipation disparaît. En outre, si la dissipation est l'équation négligeable est simplifiée par la mise en  $\Phi = 0$ .

#### - *Gaz idéal :*

La loi des gaz parfaits donne  $\rho = \frac{P}{RT}$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{\rho} \frac{p}{RT^2} = \frac{1}{T} \quad (2.50)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T + \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi \quad (2.51)$$

Ce résultat peut être exprimé en termes d'utilisation l'équation de continuité et le loi des gaz parfaits :

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot k \nabla T - p \nabla \cdot \vec{V} + \mu \Phi \quad (2.52)$$

# Chapitre 3

## Flux de fluides parfaits

### 3.1 Équations de mouvements

Dans le premier chapitre nous avons présenté le fluide parfait comme un fluide qui ne conduit pas la chaleur et pour lequel les éléments fluides interagissent uniquement par pression. Nous avons ensuite dérivé les équations du mouvement d'un tel fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P \quad (3.2)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad (3.3)$$

Ces équations expriment respectivement la masse, la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie. L'équation du moment est également appelée équation d'Euler et la troisième équation montre que le mouvement des particules fluides s'effectue à entropie constante. En d'autres termes, une particule de fluide parfait ne subit que des transformations adiabatiques réversibles au cours de son mouvement.

#### 3.1.1 Autres formes de l'équation d'Euler

L'équation d'Euler (3.2) peut être réécrite sous plusieurs formes. Tout d'abord, en utilisant la relation vectorielle  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \nabla \frac{1}{2}v^2$ , on obtient la forme de Lamb :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \frac{1}{2}v^2 \quad (3.4)$$

Mais la forme de Crocco est souvent plus intéressante. Introduisons l'enthalpie  $h$  dont la dérivée totale est reliée à celle de la pression et de l'entropie par

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dP \quad (3.5)$$

Cette expression met en relation les formes différentielles des trois fonctions (pression, enthalpie et entropie). Elle concerne également les dérivées partielles et donc les gradients. Ainsi on peut écrire :

$$\nabla h = T \nabla s + \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3.6)$$

ce qui conduit à l'équation de Crocco :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} + T \nabla s - \nabla \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) \quad (3.7)$$

La quantité  $h + \frac{1}{2} v^2$  est parfois appelée enthalpie totale.

### 3.2 Quelques propriétés des mouvements fluides parfaits

La forme des équations (3.1) et (3.3) confère certaines propriétés de conservation au mouvement d'un fluide parfait et nous en étudierons les aspects les plus simples. Ces propriétés sont résumées par deux théorèmes (Bernoulli et Kelvin) qui expriment la conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique.

#### 3.2.1 Théorème de Bernoulli

##### a. Déclaration et preuve

Considérons un flux constant. Elle est régie par les équations :

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + T \nabla s - \nabla \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (3.10)$$

où nous avons toujours écarté les dérivées temporelles comme l'exige la stabilité. La dernière équation montre que l'entropie est constante le long des lignes de courant. Si l'on projette maintenant l'équation de quantité de mouvement (3.5) sur le vecteur  $\mathbf{v}$ , on obtient

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + h \right) = 0 \quad (3.11)$$

de sorte que

$$\frac{1}{2} v^2 + h = \text{Cst} \quad (3.12)$$

le long d'une ligne droite.

Ce résultat constitue le théorème de Bernoulli dans sa forme fondamentale. Cela peut être généralisé au cas où l'écoulement du fluide est entraîné par une force potentielle  $\mathbf{f} = -\rho\nabla\phi$ . Dans ce cas

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + h + \phi = \text{Cst} \quad (3.13)$$

le long d'une ligne aérodynamique. Ce théorème exprime simplement la conservation de l'énergie mécanique par unité de masse le long d'un courant. On remarque que dans cette expression, l'enthalpie joue le rôle d'une énergie potentielle. Si le fluide est incompressible (3.8) conduit à

$$\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + P + \rho\phi = \text{Cst} \quad (3.14)$$

et la pression joue le rôle d'un potentiel. La quantité  $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$  est appelée pression dynamique. Si le fluide est un gaz parfait,

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \quad (3.15)$$

et (3.8) s'écrit maintenant

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \phi = \text{Cst} \quad (3.16)$$

aussi appelée relation de Saint-Venant.

Enfin, il convient de noter que la constante dans (3.7) ou (3.8) est spécifique à chaque rationalisation (voir exercices).

## b. Le champ de pression

L'équation d'Euler stable

$$\rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = -\nabla P \quad (3.17)$$

conduit à une propriété intéressante du champ de pression associé aux écoulements constants. Considérons une rationalisation. On note  $s$  l'abscisse curviligne d'un point de cette courbe et par  $\mathbf{e}_s$  le vecteur tangent en  $s$ . On voit immédiatement que  $\mathbf{v} \cdot \nabla \equiv v\partial/\partial s$ , donc

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = v \frac{\partial(v\mathbf{e}_s)}{\partial s} = v \frac{\partial v}{\partial s} \mathbf{e}_s + v^2 \frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} \quad (3.18)$$

Maintenant

$$\frac{\partial \mathbf{e}_s}{\partial s} = \mathbf{n}/R_s \quad (3.19)$$

où  $R_s$  est le rayon de courbure de la ligne de courant en  $s$  et  $\mathbf{n}$  un vecteur unitaire perpendiculaire à  $s$ . Si on projette (3.11), on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -\rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (3.20)$$

ce qui conduit au théorème de Bernoulli comme nous l'avons vu plus haut. Or, si l'on projette (3.11) selon  $\mathbf{n}$ , on a

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\rho v^2}{R_s} \quad (3.21)$$

où  $n$  est la coordonnée selon  $\mathbf{n}$ . Cette équation exprime l'équilibre qui existe entre la force centrifuge locale  $\frac{\rho v^2}{R_s}$  et la composante normale du gradient de pression lorsque l'écoulement est stable. Cette équation montre également que *la pression ne varie pas dans la direction perpendiculaire à un courant si celui-ci est droit (rayon de courbure infini)*.

Enfin, on remarque que la relation (3.13) s'applique également à un écoulement instationnaire car le terme  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  n'a pas de composante selon  $\mathbf{n}$  ; dans ce cas il faut remplacer les lignes de courant par les trajectoires des particules fluides et  $R_s$  est le rayon de courbure d'une telle trajectoire.

### c. Influence de la compressibilité

Le théorème de Bernoulli permet également de déterminer les circonstances dans lesquelles la compressibilité d'un gaz a un rôle soit négligeable, soit important.

Pour voir cela, il faut considérer l'écoulement d'un gaz parfait et la relation de Saint-Venant.

Nous l'appliquons à un courant qui relie des points très en amont où la vitesse du fluide est  $V_\infty$ , la pression  $P_\infty$  et la densité  $\rho_\infty$ , à un point de stagnation sur une surface solide où la pression et la densité sont respectivement  $P_m$  et  $\rho_m$ . Alors

$$\frac{1}{2} v_\infty^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_\infty}{\rho_\infty} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_m}{\rho_m} \quad (3.22)$$

Nous verrons que  $\frac{\gamma P}{\rho}$  est simplement le carré de la vitesse locale du son.

Le gaz parfait circulant comme un fluide parfait, les éléments fluides évoluent de manière isentropique et donc  $P \propto \rho^\gamma$ . De cette relation et (3.20), on déduit l'expression de la densité au point de stagnation en fonction de celui très en amont. On obtient

$$\rho_m = \rho_\infty \left( 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) \frac{v_\infty^2}{c_\infty^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.23)$$

Cette expression montre qu'à faible vitesse, les changements de densité induits par l'écoulement sont de l'ordre de  $v_\infty^2/c_\infty^2$ , qui est le nombre de Mach au carré de l'écoulement. De ce cas particulier, on obtient en fait un résultat général, à savoir qu'on peut considérer un fluide comme incompressible tant que sa vitesse est très petite en comparaison de la vitesse du son. Par exemple, le flux d'air autour d'une voiture circulant à 100 km/h provoque des variations de densité inférieures à un pour cent, qui sont donc négligeables en première approximation.

### 3.3 Flux irrotationnels

Un flux est dit irrotationnel si :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

ou, de manière équivalente, s'il existe une fonction  $\Phi$  telle que

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (3.25)$$

Ce type de flux est également appelé flux potentiel et  $\Phi$  est le potentiel de vitesse.

Considérons le cas d'écoulements irrotationnels de fluides parfaits, dont le mouvement est entraîné par un champ de force dérivé d'un potentiel  $\Phi_{ext}$ . On recherche les équations satisfaites par le potentiel de vitesse  $\Phi$ . L'équation d'Euler se transforme de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla P - \rho \nabla \phi_{ext} \\ \iff \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) &= -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \phi_{ext} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Notons que pour que cette équation ait un sens, il faut que

$$\nabla \times \frac{1}{\rho} \nabla P = \mathbf{0} \iff \nabla \rho \times \nabla P = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

à savoir que  $P \equiv P(\rho)$ , comme on l'a vu dans le chapitre précédent. On peut donc introduire  $h'$  tel que  $\nabla h' = \frac{1}{\rho} \nabla P$ . Ainsi,

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h' + \phi_{ext} \right) = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h' + \phi_{ext} = \text{Cst} \quad (3.29)$$

On note la similitude de cette expression avec celle obtenue pour le théorème de Bernoulli, mais il faut faire attention au fait que dans cette nouvelle équation la constante est la même dans tout le volume occupé par le fluide et donc identique pour toutes les lignes de courant. De plus, l'expression est également valable pour des écoulements instationnaires.

A (3.22), on ajoute l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \Phi) = 0 \quad (3.30)$$

Cette dernière équation prend une forme particulière pour les fluides incompressibles où  $\rho = \text{Cst}$ , puisque

$$\Delta \Phi = 0 \quad (3.31)$$

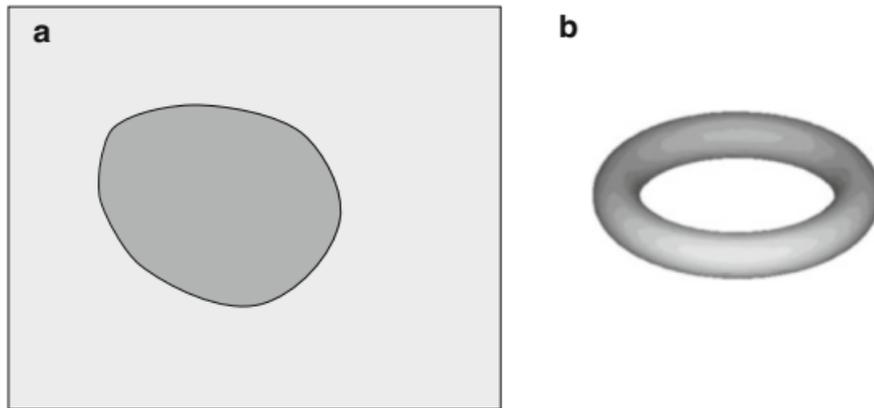
est simplement l'équation de Laplace.

On observe que le potentiel  $\Phi$  est défini en fonction du temps près : puisque  $\Phi$  et  $\Phi + f(t)$  donnent le même champ de vitesse.

La topologie joue un rôle très important dans les flux irrotationnels. Prenons d'abord un exemple illustratif. On considère un fluide qui occupe tout l'espace sauf un cylindre de longueur infinie de rayon  $a$  centré sur l'axe  $Oz$ . Le mouvement du fluide autour du cylindre est donné par son champ de vitesse qui est dérivé du potentiel  $\Phi = a^2 \Omega \varphi$  ( $s, \varphi, z$  sont les coordonnées cylindriques). On remarquera que ce potentiel possède une propriété particulière : il n'est pas uniquement valorisé ; à un moment donné,  $\varphi$  peut prendre un nombre infini de valeurs comme  $\varphi + 2n\pi$ . La conséquence immédiate de cette propriété est que la circulation  $\Gamma$  le long d'une courbe fermée peut prendre plusieurs valeurs selon la courbe choisie. En fait, si la courbe n'entoure pas le cylindre  $\Gamma = 0$ . Si par contre elle l'entoure  $n$  fois  $\Gamma = 2n\pi\Omega \neq 0$ .

Cet exemple illustre l'effet de la topologie sur la circulation. L'espace occupé par le fluide est ici doublement connexe : il existe deux chemins irréductibles<sup>3</sup> pour relier deux points de cet espace.

La double connectivité implique que les solutions de l'équation de Laplace ne sont entièrement définies que lorsque la circulation autour des régions n'appartenant pas à l'espace fluide est donnée.



**Figure 3.1.** Exemples de domaines doublement connectés : en deux dimensions (a) tout obstacle crée une région doublement connectée ; en trois dimensions un tore (b) ou un obstacle infini en une dimension implique une double connectivité

Deux exemples d'espaces doublement connectés sont présentés sur la figure 3.3. On peut noter que la présence d'un obstacle dans un écoulement bidimensionnel rend l'espace occupé par le fluide doublement connecté.

### 3.4 Flux avec tourbillon

Après les écoulements irrotationnels, l'étape suivante nous amène naturellement vers des écoulements propres au tourbillon. Ces flux sont plus complexes que les précédents car la répartition du tourbillon est affectée par le flux que produit le tourbillon. Le problème devient donc largement non linéaire (on n'a plus l'équation du potentiel de vitesse  $\Delta\Phi = 0$ ) et par conséquent seul un petit nombre de problèmes ont des solutions analytiques. Nous présentons maintenant les exemples les plus classiques.

#### 3.4.1 La dynamique du tourbillon

Dans tout ce qui suit nous appelons  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  le tourbillon. L'équation de cette quantité est obtenue en reprenant la boucle de l'équation d'Euler (3.2) qui est explicitée à l'aide de l'égalité vectorielle suivante :

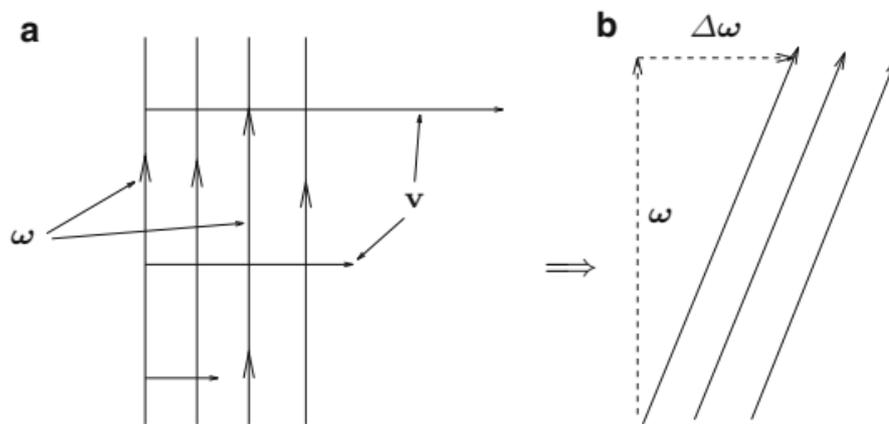
$$\nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} \quad (3.32)$$

On trouve donc que le tourbillon satisfait :

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P \quad (3.33)$$

Cette équation appelle plusieurs commentaires. En premier lieu, on remarque que les variations de  $\boldsymbol{\omega}$  dans une particule fluide résultent de trois sources différentes :

- 1-  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  qui est un terme d'étirement-pivotement : afin de comprendre son effet, prenons l'exemple simple suivant où  $\boldsymbol{\omega}$  est parallèle à  $\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{v}$  représente un cisaillement selon  $z$ .  
L'équation  $\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  devient  $\frac{D\omega}{Dt} = \omega \frac{\partial v}{\partial z}$ .



**Figure 3.2.** Evolution du champ de tourbillon soumis à un écoulement de cisaillement : de (a) à (b) le tourbillon gagne une composante le long du champ de vitesse

Cela montre qu'après chaque particule fluide, un tourbillon est créé parallèlement à  $\mathbf{v}$ , comme le montre la figure 3.2. Nous retrouverons un tel terme lorsque nous analyserons l'évolution du champ magnétique dans un fluide à conductivité électrique.

- 2-  $-(\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\omega}$ . Nous avons vu au Chap. 1 la signification physique de  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ ; il représente les variations de volume des éléments fluides. Ce terme traduit ainsi la variation de tourbillon associée à ces variations de volume : si la particule se contracte son tourbillon augmente. Le tourbillon se crée dans le même sens et proportionnellement à celui existant.
- 3-  $\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P$  est le couple barocline. Ce terme n'existe pas (nous l'avons noté à plusieurs reprises) si  $P \equiv P(\rho)$ . Lorsqu'il est présent, les éléments fluides peuvent acquérir un

tourbillon, et donc un moment cinétique, car la force de pression exerce alors sur eux un couple.

Revenons maintenant au cas barotrope où  $P \equiv P(\rho)$ . L'équation (3.33) se simplifie en

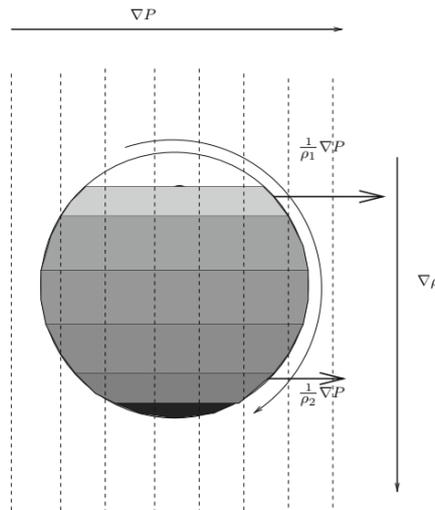
$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.34)$$

Cette équation montre que si initialement  $\boldsymbol{\omega} = 0$  alors  $\boldsymbol{\omega}$  reste nul : le tourbillon ne peut pas être créé. Ce résultat est bien entendu une autre version du théorème de Lagrange.

En deux dimensions, l'équation (3.34) prend une forme très remarquable si le fluide est incompressible. En effet, dans ce cas le membre de droite est nul et

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad (3.35)$$

où  $\omega = \omega_z$  est la seule composante non nulle de  $\boldsymbol{\omega}$ .



**Figure 3.3.** Génération de tourbillon par baroclinicité.

La densité augmente vers le bas de la sphère, donc la force de pression par unité de masse ( $\frac{1}{\rho_1} \nabla P$ ) est supérieure à  $\frac{1}{\rho_2} \nabla P$ . Le spécifique qui en résulte la force de pression exerce ainsi un couple sur l'élément fluide. Cette équation montre que dans ce cas  $\boldsymbol{\omega}$  est un invariant lagrangien. Cela implique le théorème de Kelvin, mais aussi

$$\frac{D\omega^n}{Dt} = 0 \quad \iff \quad \int_{(S)} \omega^n dS = \text{Cst} \quad (3.36)$$

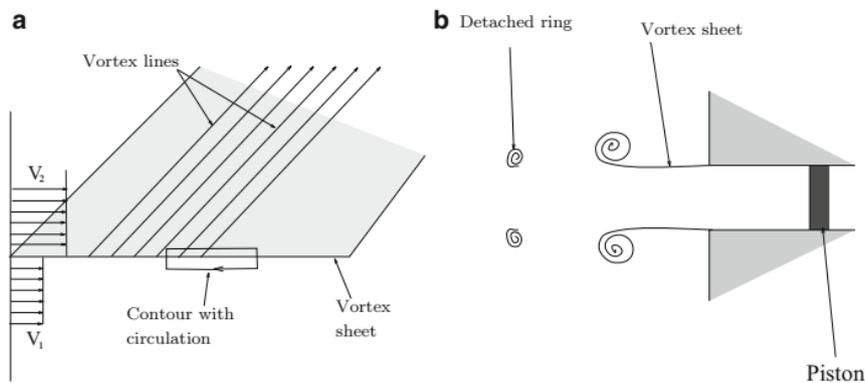
pour tout  $n$ ,  $S$  correspondant à une surface advectée par le fluide. Nous reviendrons sur cette équation lorsque nous étudierons la turbulence en deux dimensions.

### 3.4.2 Exemples d'écoulements vortex

#### a. Feuilles de vortex

Le premier exemple d'écoulements vortex est aussi le plus simple ; il s'agit de la couche de cisaillement également appelée feuille de vortex : elle correspond à une simple discontinuité dans la composante tangentielle du champ de vitesse, comme le montre la Figure 3.3. Il est facile de voir qu'un contour, tel que celui dessiné sur la figure 3.9a, a une circulation ; si la longueur du côté le plus long est  $L$ , la circulation est donnée par  $\Gamma = (V_2 - V_1)L$ .

Nous verrons au qu'une telle feuille est toujours instable. Cette instabilité produit des tourbillons individualisés tels que l'anneau de vortex lorsque la feuille de vortex s'enroule comme indiqué sur le schéma de la figure 3.9b sous le mouvement impulsif du piston.



**Figure 3.4.** (a) Feuille Vortex. (b) Vue schématique de la formation d'un anneau de vortex à partir d'une feuille de vortex

#### b. Vortex de Rankine

C'est le plus simple des flux vortex. Il est constitué d'un noyau cylindrique dans lequel le tourbillon est uniforme et à partir duquel l'écoulement est irrotationnel. Le champ de vitesse associé est alors

$$\begin{cases} \omega = \omega \mathbf{e}_z & s \leq a & \implies & \mathbf{v} = \frac{1}{2} \omega \times \mathbf{r} & s \leq a \\ \omega = \mathbf{0} & s > a & \implies & \mathbf{v} = \frac{\omega a^2}{2s} \mathbf{e}_\varphi & s > a \end{cases} \quad (3.37)$$

où  $a$  est le rayon du cylindre et  $(s, \varphi, z)$  sont les coordonnées cylindriques. On observe que le champ de vitesse est purement azimutal (seule la composante selon  $\mathbf{e}_\varphi$  est non nulle) et donc la distribution du tourbillon ne change pas avec le temps. Le champ de vitesse à l'extérieur du noyau a été choisi de telle sorte que la vitesse soit continue à  $r = a$ .

Le vortex de Rankine est un modèle très simplifié de l'écoulement généré par un cyclone. On montre facilement que la pression passe par un minimum au centre d'un tel vortex.

### c. Vortex de Hill

Une autre solution exacte de l'équation stationnaire d'Euler consiste à répartir le tourbillon au sein d'une sphère de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega r \sin \theta}{a} \mathbf{e}_\varphi \quad \text{si } r \leq a, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{si } r > a \quad (3.38)$$

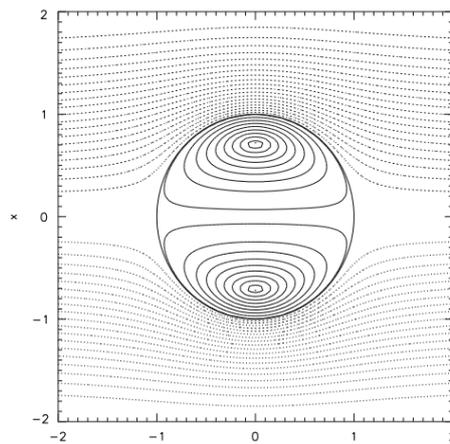
où  $(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques. On formule ainsi le vortex de Hill qui se déplace à vitesse constante sans se déformer. Nous pouvons expliquer cette propriété en examinant d'abord le champ de vitesse de ce vortex.

Les composantes  $v_r$  et  $v_\theta$  du champ de vitesse obéissent aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\omega}{a} r \sin \theta \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta v_\theta}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

qui expriment respectivement  $\nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . On cherche une solution à ce système sous la forme :

$$v_r = f(r) \cos \theta \quad \text{and} \quad v_\theta = g(r) \sin \theta \quad (3.40)$$



**Figure 3.5.** Lignes méridiennes associées au vortex de Hill. Les lignes pointillées représentent le flux irrotationnel

L'équation de continuité donne :

$$g(r) = -\frac{1}{2r} \frac{d}{dr}(r^2 f) \quad (3.41)$$

L'autre équation donne l'équation vérifiée par  $f$  :

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2 f) - 2f = -2\omega r^2/a \quad (3.42)$$

dont la solution est :

$$f(r) = -\frac{\omega}{5a} r^2 + A + B/r^3 \quad (3.43)$$

Les deux constantes  $A$  et  $B$  sont telles que la vitesse est régulière au centre de la sphère (de sorte que  $B = 0$ ) et que la vitesse radiale s'annule en  $r = a$ . On obtient ainsi :

$$v_r = \frac{\omega}{5a}(a^2 - r^2) \cos \theta \quad \text{et} \quad v_\theta = \frac{\omega}{5a}(2r^2 - a^2) \sin \theta \quad \text{pour} \quad r \leq a \quad (3.44)$$

On note que sur la sphère englobante  $v_\theta = \omega a/5 \sin \theta \neq 0$ . En dehors de la sphère le flux est irrotationnel et les constantes d'intégration doivent être ajustées de telle sorte que le champ de vitesse soit continu sur la sphère et régulier à l'infini. Le potentiel de vitesse étant solution de l'équation de Laplace on trouve que

$$\Phi(r, \theta) = (A'r + B'/r^2) \cos \theta \quad (3.45)$$

Les conditions aux limites  $v_r(a) = 0$  et  $v_\theta(a) = \omega a/5 \sin \theta$  permettent le calcul de  $A_0$  et  $B_0$  et on en déduit ainsi le champ de vitesse :

$$v_r = \frac{2\omega a}{15} \left(-1 + \left(\frac{a}{r}\right)^3\right) \cos \theta \quad \text{et} \quad v_\theta = \frac{2\omega a}{15} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right) \sin \theta \quad \text{pour} \quad r > a \quad (3.46)$$

La particularité remarquable de ces expressions est l'existence d'une vitesse non nulle à l'infini. Cette vitesse représente la vitesse du vortex par rapport au fluide à l'infini ; elle est uniforme et le long de l'axe du vortex. Son ampleur est :

$$V = \frac{2\omega a}{15} \quad (3.47)$$

Les équations du champ de vitesse fournissent également l'expression de la fonction du flux à l'intérieur et à l'extérieur du vortex. Pour un écoulement axisymétrique, on constate que :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.48)$$

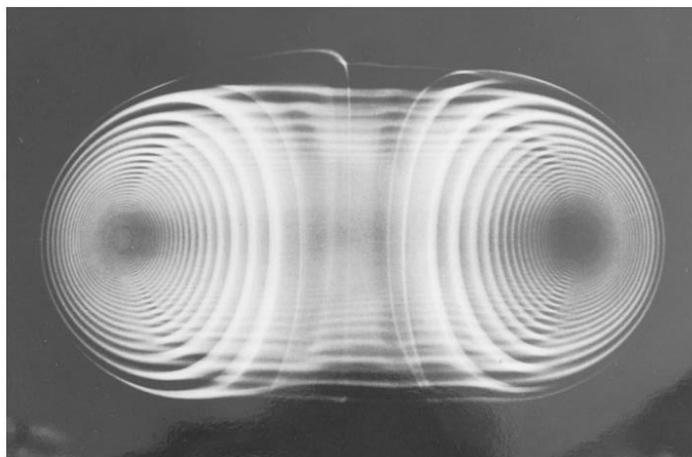
d'où les deux expressions suivantes :

$$\psi = \frac{\omega r^2}{10a} (a^2 - r^2) \sin^2 \theta \quad \text{if } r \leq a \quad \text{and} \quad \psi = \frac{\omega a r^2}{15} \left( -1 + \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right) \sin^2 \theta \quad \text{if } r > a \quad (3.49)$$

Ces deux fonctions de flux donnent la forme des lignes de courant représentées sur la figure 3.5.

#### d. L'anneau vortex

L'anneau vortex est une figure spectaculaire d'un mouvement fluide généralement connu sous le nom d'anneau de fumée (Fig. 3.11). En fait il s'agit d'un filament vortex qui se referme sur lui-même et forme un anneau circulaire, d'où son nom. Autour de lui, l'écoulement est irrotationnel et peut être calculé avec la formule (3.43). L'anneau étant axisymétrique, la vitesse est la même en tous ses points et donc son mouvement est une translation uniforme. Le calcul exact de sa vitesse peut être effectué si l'on suppose un rayon intérieur fini, mais il est assez long et nous nous limiterons à en dériver une expression approximative. La vitesse induite par le filament est, d'après (3.43).



**Figure 3.6.** Anneau vortex obtenu avec de la fumée dans l'air.

La structure en anneau montre l'origine de sa formation, à savoir l'enroulement d'une feuille vortex ; le nombre de Reynolds est 104 (tiré de Magarvey et MacLachy, 1964, c Canadian Science Publishing ou ses concédants de licence)

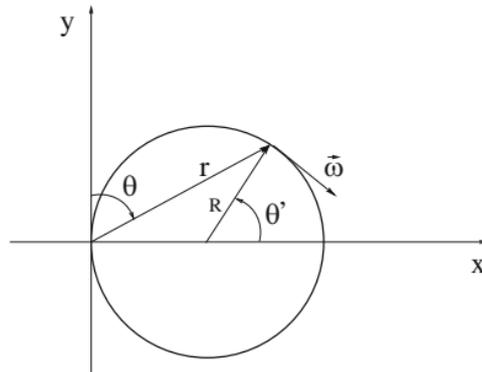
$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}}{r^3} dV \quad (3.50)$$

où nous avons localisé l'origine du système de coordonnées sur le filament (Figure 3.6). L'anneau est supposé être un tore de grand rayon  $R$  et de petit rayon  $a$ , avec  $a \ll R$ . On peut noter que

$$r(\theta) = 2R \sin \theta, \quad \boldsymbol{\omega}(\theta) = \omega(\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (3.51)$$

et

$$dV = \pi a^2 R d\theta' \quad (3.52)$$



**Figure 3.7.** Croquis de l'anneau vortex. Notez qu'avec cette représentation l'équation du cercle est  $r = 2R \sin \theta$

où  $\theta'$  est l'angle mesuré à partir du centre du torus de sorte que  $\theta' = \pi - 2\theta$ . Ainsi,

$$\mathbf{v} = \frac{\omega a^2}{8R} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin \theta} \mathbf{e}_z \quad (3.53)$$

Si l'on se souvient que

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \tan \theta/2 \quad (3.54)$$

Il apparaît que l'intégrale diverge en 0 et  $v$ . En fait, nous n'avons pas pris en compte dans ce calcul le fait que la section du noyau est finie et que cet effet est important pour les points proches de l'origine. Une intégration exacte impliquerait des intégrales elliptiques qui sont lourdes à gérer. On estime donc simplement l'ordre de grandeur de l'intégrale en supposant que les domaines d'intégration sont  $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$  avec  $\varepsilon \approx a/R$ . On trouve

$$\mathbf{v} \approx \frac{\Gamma}{4\pi R} \ln(2R/a) \mathbf{e}_z \quad (3.55)$$

alors que la formule exacte est :

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right) \mathbf{e}_z \quad (3.56)$$

Ces deux expressions ont le même comportement asymptotique que  $R \rightarrow \infty$  or  $a \rightarrow 0$ . Notre dérivation indique que la singularité logarithmique est due aux régions les plus proches du point de calcul.

## Chapitre 4

### Écoulement de fluides visqueux incompressibles

#### 4.1 Introduction

Les variations de masse volumique dans un écoulement de fluide diminuent avec le carré du nombre de Mach (*le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son*). Ainsi, pour de nombreux écoulements de fluides, et notamment pour ceux de liquides, l'incompressibilité est une excellente approximation. De plus, cela simplifie beaucoup les équations du mouvement. Cette simplification nous fournit le contexte le plus simple pour étudier les effets de la viscosité que nous avons négligés jusqu'à présent.

Ainsi, dans ce chapitre, nous étudions les effets de la viscosité en utilisant uniquement des fluides incompressibles. Nous discutons d'abord des lois de similarité, qui apparaissent grâce à la viscosité, puis nous traitons de deux limites : celle des écoulements à forte force visqueuse et celle des écoulements à léger effet visqueux. Ensuite, nous passons en revue quelques solutions classiques de l'équation de Navier et terminons le chapitre par une brève étude des forces exercées sur les solides par les écoulements de fluides visqueux.

Le paramètre qui présente un intérêt primordial dans un flux interne est le nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} \quad (4.1)$$

où  $L$  est la longueur caractéristique principale (par exemple, le diamètre d'un tuyau) dans le problème qui nous intéresse et  $V$  est généralement la vitesse moyenne d'un écoulement.

Si les effets visqueux dominent l'écoulement (cela nécessite une surface de paroi relativement grande), comme dans le cas d'une grande longueur de canalisation, le nombre de Reynolds est important ; si les effets d'inertie dominent, comme dans un virage soudain ou l'entrée d'un tuyau, alors les effets visqueux peuvent souvent être ignorés car ils n'ont pas une surface suffisamment grande sur laquelle agir, rendant ainsi le nombre de Reynolds moins influent.

Nous considérerons de manière assez détaillée les écoulements internes dans les tuyaux, entre plaques parallèles et cylindres rotatifs, et dans les canaux ouverts. Si le nombre de Reynolds est relativement faible, l'écoulement est laminaire ; s'il est relativement élevé, alors l'écoulement est turbulent. Pour les écoulements de canalisations, l'écoulement est supposé laminaire si  $Re < 2000$  ; pour l'écoulement entre larges plaques parallèles, il est laminaire si  $Re = 1500$  ; pour l'écoulement entre cylindres concentriques en rotation, il est laminaire et s'écoule selon un

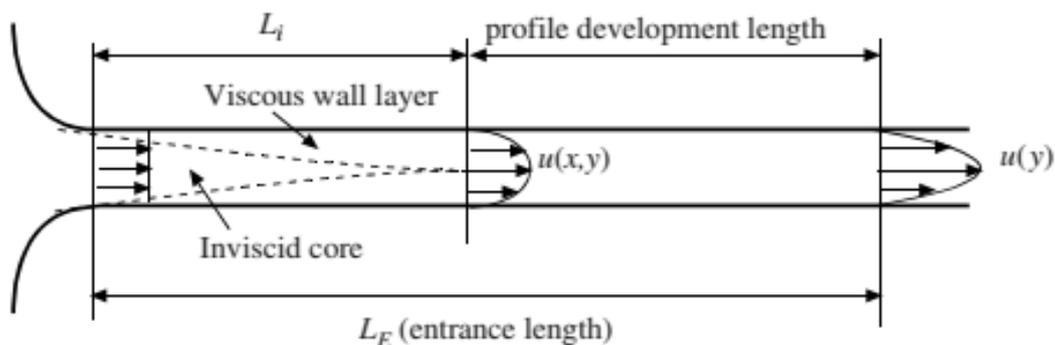
mouvement circulaire inférieur à  $Re = 1700$  ; et dans les canaux ouverts d'intérêt, il est supposé être turbulent. Les longueurs et vitesses caractéristiques seront définies ultérieurement.

## 4.2 Flux D'entrée

Les commentaires et les nombres de Reynolds mentionnés ci-dessus se réfèrent à des écoulements développés, des écoulements dans lesquels les profils de vitesse ne changent pas dans le sens du courant. Dans la région proche d'un changement de géométrie, comme un coude ou une vanne ou près d'une entrée, le profil de vitesse change dans le sens de l'écoulement. Considérons les modifications de la région d'entrée pour un écoulement laminaire dans une conduite ou entre plaques parallèles. La longueur d'entrée  $L_E$  est représentée sur la figure 4.1. Le profil de vitesse très près de l'entrée est essentiellement uniforme, la couche de paroi visqueuse se développe jusqu'à ce qu'elle imprègne toute la section transversale sur la longueur de noyau non visqueuse  $L_i$  ; le profil continue de se développer en un flux développé à la fin de la région de développement du profil.

Pour un écoulement laminaire dans une conduite avec un profil de vitesse uniforme à l'entrée,

$$\frac{L_E}{D} = 0.065Re \quad Re = \frac{VD}{\nu} \quad (4.2)$$



**Figure 4.1.** Région d'entrée à flux laminaire dans un tuyau ou entre des plaques parallèles

où  $V$  est la vitesse moyenne et  $D$  est le diamètre. Le noyau non visqueux représente environ la moitié de la longueur d'entrée. Il convient de mentionner que des écoulements laminaires dans des canalisations ont été observés avec des nombres de Reynolds allant jusqu'à 40 000 dans des écoulements extrêmement contrôlés dans des canalisations lisses dans un bâtiment exempt de vibrations ; pour un tuyau conventionnel à paroi rugueuse, nous utilisons 2000 comme limite pour un écoulement laminaire.

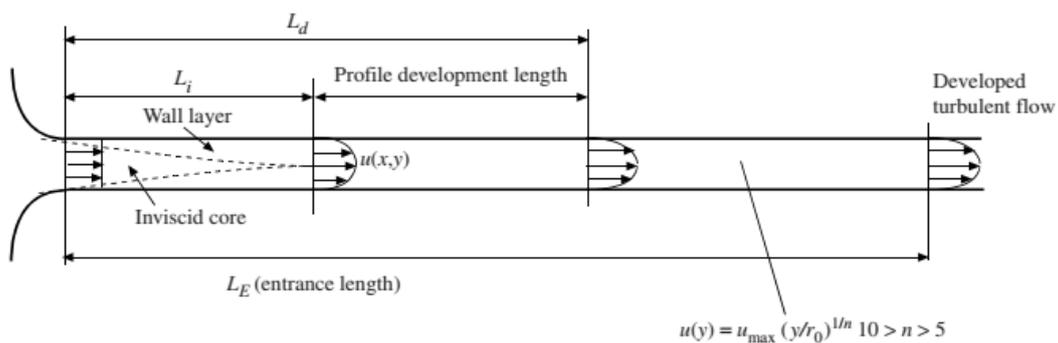
Pour écoulement entre larges plaques parallèles avec un profil uniforme à l'entrée,

$$\frac{L_E}{h} = 0.04Re \quad Re = \frac{Vh}{\nu} \quad (4.3)$$

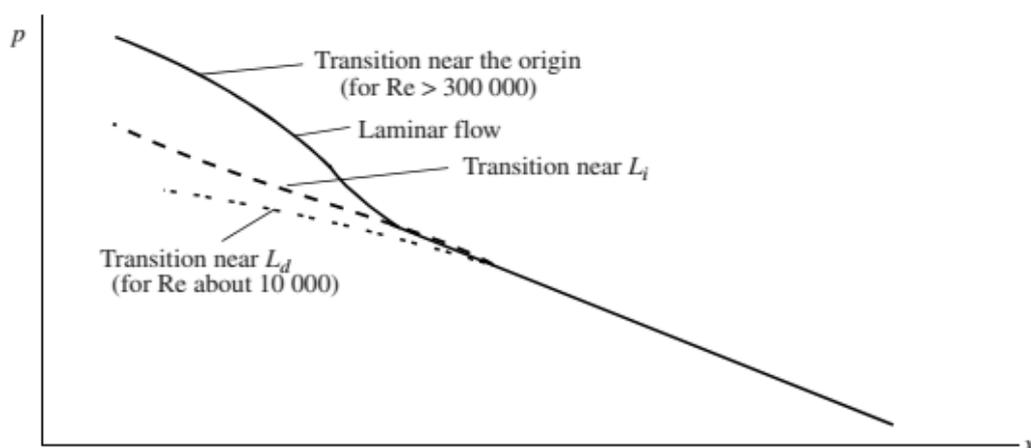
où  $h$  est la distance entre les plaques et  $V$  est la vitesse moyenne. Un écoulement laminaire ne peut pas exister pour  $Re > 7700$  ; une valeur de 1 500 est utilisée comme limite pour un débit conventionnel.

La région d'entrée pour un écoulement turbulent développé est représentée sur la Figure 4.1. Le profil de vitesse se développe à la longueur  $L_d$ , mais les caractéristiques de la turbulence dans l'écoulement nécessitent une longueur supplémentaire. Pour les grands nombres de Reynolds supérieurs à  $10^5$  dans un tuyau, nous utilisons

$$\frac{L_i}{D} \cong 10 \quad \frac{L_d}{D} \cong 40 \quad \frac{L_E}{D} \cong 120 \quad (4.4)$$



**Figure 4.2.** Région d'entrée d'un écoulement turbulent dans une canalisation.



**Figure 4.3.** Variation de pression dans une conduite pour des écoulements laminaires et turbulents.

Pour un flux avec  $Re = 4000$ , les longueurs de développement sont peut-être cinq fois supérieures à celles répertoriées dans l'équation (4.4) en raison du développement laminaire initial suivi du développement de la turbulence. (La recherche n'a pas été rapportée pour les flux dans lesquels  $Re > 10^5$ ).

La variation de pression est représentée sur la figure 4.3. La transition initiale vers la turbulence depuis la paroi du tuyau est notée sur la figure. La variation de pression pour l'écoulement laminaire est plus élevée dans la région d'entrée que dans la région pleinement développée en raison du cisaillement de paroi plus important et de l'augmentation du flux de quantité de mouvement.

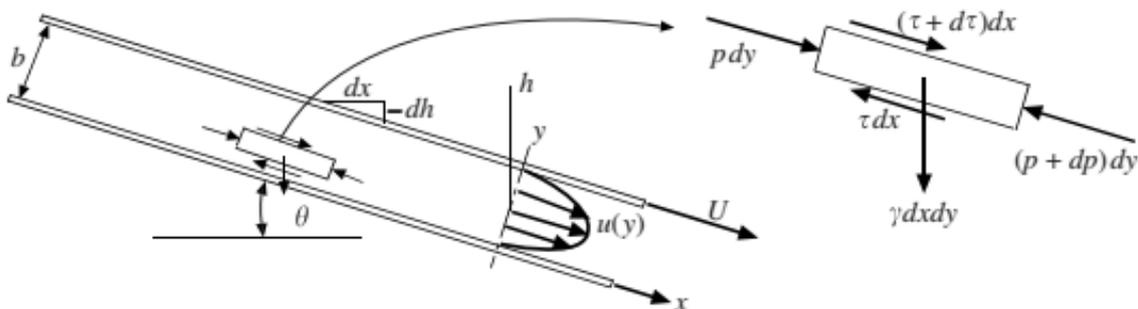
### 4.3 Écoulement laminaire entre plaques parallèles

Un écoulement laminaire constant et développé entre des plaques parallèles (une plaque se déplace avec une vitesse  $U$ ) sera dérivé dans la section 4.4.1 en appliquant la deuxième loi de Newton à l'élément de la Fig. 4.4 ou en utilisant l'équation de Navier-Stokes. L'une ou l'autre dérivée peut être utilisée puisque nous arrivons à la même équation en utilisant les deux approches.

#### 4.3.1 L'approche élémentaire

L'élément de fluide représenté sur la figure 4.4 peut être considéré comme un volume de contrôle dans et à partir duquel le fluide s'écoule ou il peut être considéré comme une masse de fluide à un moment particulier. Considérant qu'il s'agit d'une masse instantanée de fluide qui n'accélère pas dans cet écoulement constant et développé, la deuxième loi de Newton prend la forme

$$\sum F_x = 0 \quad \text{or} \quad p \, dy - (p + dp) \, dy + \tau \, dx - (\tau + d\tau) \, dx + \gamma \, dx \, dy \, \sin \theta = 0 \quad (4.5)$$



**Figure 4.4.** Écoulement stable et développé entre des plaques parallèles.

où  $t$  est le cisaillement sur la paroi de l'élément et  $g$  est le poids spécifique du fluide. Nous avons supposé une longueur unitaire dans le papier (dans la direction  $z$ ). Pour simplifier, divisez par  $dx dy$  et utilisez  $dh = -\sin \theta dx$  avec  $h$  mesuré dans le sens vertical :

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{dx}(p + \gamma h) \quad (4.6)$$

Pour cet écoulement laminaire, la contrainte de cisaillement est liée au gradient de vitesse par  $\tau = \mu du/dy$  de sorte que l'Eq. devient

$$\mu \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d}{dx}(p + \gamma h) \quad (4.7)$$

Le côté gauche est fonction de  $y$  uniquement pour ce flux développé (nous supposons un canal large avec un rapport hauteur/largeur supérieur à 8) et le côté droit est fonction de  $x$  uniquement. On peut donc intégrer deux fois sur  $y$  pour obtenir

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{d(p + \gamma h)}{dx} y^2 + Ay + B \quad (4.8)$$

En utilisant les conditions aux limites  $u(0) = 0$  et  $u(b) = U$ , les constantes d'intégration sont évaluées et il en résulte un profil parabolique :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{d(p + \gamma h)}{dx} (y^2 - by) + \frac{U}{b} y \quad (4.9)$$

Si les plaques sont horizontales et  $U = 0$ , le profil de vitesse se simplifie en

$$u(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} (by - y^2) \quad (4.10)$$

où nous avons laissé  $d(p + \gamma h)/dx = -\Delta p/L$  pour les plaques horizontales où  $\Delta p$  est la perte de charge, une quantité positive.

Si l'écoulement est dû uniquement au déplacement du plateau supérieur, avec un gradient de pression nul, il s'agit d'un écoulement de *Couette* tel que  $u(y) = Uy/b$ . Si les deux plaques sont stationnaires et que l'écoulement est dû uniquement à un gradient de pression, il s'agit d'un écoulement de *Poiseuille*.

### 4.3.2 Application des équations de Navier-Stokes

L'équation du moment différentiel de la composante x en coordonnées rectangulaires est sélectionnée pour cet écoulement stable et développé avec des lignes aérodynamiques parallèles aux parois dans un large canal (au moins un rapport d'aspect de 8:1) :

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{steady}} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{developed}} + v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{streamlines}} + w \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_{\text{parallel to wall}} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \sin \theta + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{developed}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{wide channel}} \right) \quad (4.11)$$

où le canal fait un angle de  $\theta$  avec l'horizontale. En utilisant  $dh = - dx \sin \theta$ , l'équation différentielle partielle ci-dessus se simplifie en

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} (p + \gamma h) \quad (4.12)$$

où les dérivées partielles ont été remplacées par des dérivées ordinaires puisque  $u$  dépend uniquement de  $y$  et  $p$  est fonction de  $x$  uniquement.

Parce que le côté gauche est fonction de  $y$  et le côté droit est fonction de  $x$ , qui peuvent tous deux varier indépendamment l'un de l'autre, les deux côtés peuvent être au plus une constante, disons  $\lambda$ , de sorte que

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \lambda \quad (4.13)$$

Intégrer deux fois fournit

$$u(y) = \frac{1}{2} \lambda y^2 + Ay + B \quad (4.14)$$

Se référer à la Fig. 7.5 : les conditions aux limites sont  $u(0) = 0$  et  $u(b) = U$  à condition

$$A = \frac{U}{b} - \lambda \frac{b}{2} \quad B = 0 \quad (4.15)$$

Le profil de vitesse est donc

$$u(y) = \frac{d(p + \gamma h)/dx}{2\mu} (y^2 - by) + \frac{U}{b} y \quad (4.16)$$

où  $l$  a été utilisé comme membre de droite de l'équation. (4.16).

Dans un canal horizontal, on peut écrire  $d(p + \gamma h)/dx = -\Delta p/L$ . Si  $U = 0$ , le profil de vitesse est :

$$u(y) = \frac{\Delta p}{2\mu L}(by - y^2) \quad (4.17)$$

Il s'agit du flux Poiseuille. Si le gradient de pression est nul et que le mouvement de la plaque supérieure provoque l'écoulement, il s'agit d'un écoulement de Couette avec  $u(y) = U y/b$ .

### 4.3.3 Grandeurs d'intérêt

Considérons plusieurs grandeurs d'intérêt pour le cas de deux plaques fixes avec  $U = 0$ . La première grandeur d'intérêt dans l'écoulement est la vitesse moyenne  $V$ . La vitesse moyenne est, en supposant l'unité de largeur des plaques,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{b \times 1} \int u(y) dy \\ &= \frac{\Delta p}{2b\mu L} \int_0^b (by - y^2) dy = \frac{\Delta p}{2b\mu L} \left[ b \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} \right] = \frac{b^2 \Delta p}{12\mu L} \end{aligned} \quad (4.18)$$

La vitesse maximale se produit à  $y = b/2$  et est

$$u_{\max} = \frac{\Delta p}{2\mu L} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) = \frac{b^2 \Delta p}{8\mu L} = \frac{2}{3} V \quad (4.19)$$

La chute de pression, réécrivant l'équation (4.19), est pour ce canal horizontal,

$$\Delta p = \frac{12\mu L V}{b^2} \quad (4.20)$$

La contrainte de cisaillement au niveau de chaque paroi peut être déterminée en considérant un corps libre de longueur  $L$  dans le canal.

Pour un canal horizontal, la force de pression équilibre la force de cisaillement :

$$(b \times 1)\Delta p = 2(L \times 1)\tau_0 \quad \therefore \tau_0 = \frac{b \Delta p}{2L} \quad (4.21)$$

En termes de facteur de frottement  $f$ , défini par

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} \quad (4.22)$$

la perte de charge pour le canal horizontal est

$$h_L = \frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{L}{2b} \frac{V^2}{2g} \quad (4.23)$$

Plusieurs des équations ci-dessus peuvent être combinées pour trouver

$$f = \frac{48}{Re} \quad (4.24)$$

où  $Re = bV/\nu$ . Si cela est remplacé dans l'équation. (4.24), on voit que la perte de charge est directement proportionnelle à la vitesse moyenne dans un écoulement laminaire.

Les équations ci-dessus ont été dérivées pour un canal avec un rapport hauteur/largeur  $> 8$ . Pour les canaux à faible allongement, les côtés nécessiteraient des termes supplémentaires puisque le cisaillement agissant sur les parois latérales influencerait la partie centrale de l'écoulement. Si l'on s'intéresse à un écoulement de canal horizontal où la plaque supérieure se déplace et où il n'y a pas de gradient de pression, alors le profil de vitesse serait le profil linéaire.

$$u(y) = \frac{U}{b}y \quad (4.25)$$

#### Exemple 4.1

La fine couche de pluie à 20 °C s'écoule sur un parking à une profondeur relativement constante de 4 mm. La zone fait 40 m de large avec une pente de 8 cm sur 60 m de longueur. Estimez (a) le débit, (b) le cisaillement à la surface, (c) le nombre de Reynolds et la vitesse à la surface.

#### **Solution :**

(a) Le profil de vitesse peut être supposé être la moitié du profil illustré sur la figure 4.5, en supposant un écoulement laminaire. La vitesse moyenne resterait telle que donnée par l'équation. (7.39), c'est-à-dire

$$V = \frac{b^2\gamma h}{12\mu L}$$

où  $\Delta p$  a été remplacé par  $\gamma h$ . Le débit est

$$Q = AV = bw \frac{b^2\gamma h}{12\mu L} = 0.004 \times 40 \frac{0.004^2 \times 9810 \times 0.08}{12 \times 10^{-3} \times 60} = 2.80 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) La contrainte de cisaillement n'agit que sur le mur solide, donc l'équation. (4.24) fournirait

$$\tau_0 = \frac{b\gamma h}{L} = \frac{0.004 \times 9810 \times 0.08}{60} = 0.0523 \text{ Pa}$$

(c) Le nombre de Reynolds est

$$\text{Re} = \frac{bV}{\nu} = \frac{0.004}{10^{-6}} \times \frac{0.004^2 \times 9810 \times 0.08}{12 \times 10^{-3} \times 60} = 697$$

Le nombre de Reynolds est inférieur à 1 500, l'hypothèse d'un écoulement laminaire est donc acceptable.

#### 4.4 Flux laminaire dans une conduite

Un écoulement laminaire constant et développé dans un tuyau sera dérivé en appliquant la deuxième loi de Newton à l'élément de la Figure 4.4 ou en utilisant l'équation de Navier-Stokes. L'une ou l'autre dérivée peut être utilisée puisque nous arrivons à la même équation en utilisant les deux approches.

##### 4.4.1 L'approche élémentaire

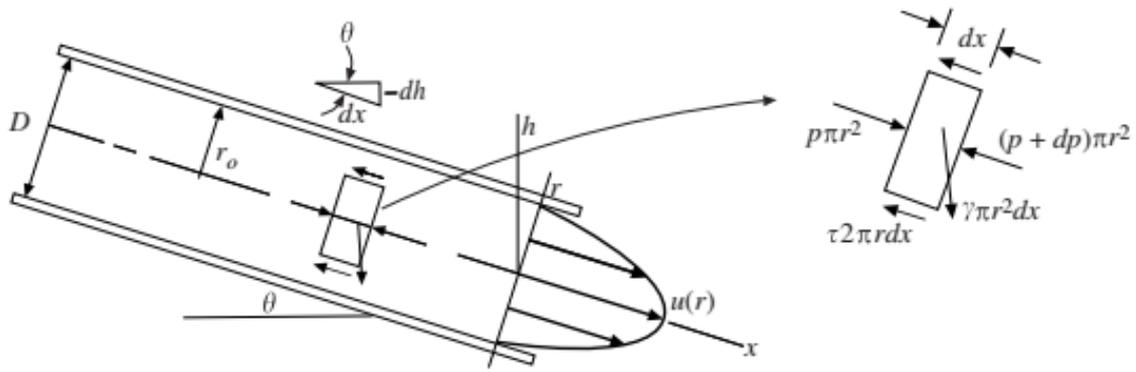
L'élément de fluide représenté sur la figure 4.4 peut être considéré comme un volume de contrôle dans et à partir duquel le fluide s'écoule ou il peut être considéré comme une masse de fluide à un moment particulier. Considérant qu'il s'agit d'une masse instantanée de fluide qui n'accélère pas dans cet écoulement constant et développé, la deuxième loi de Newton prend la forme

$$\sum F_x = 0 \quad \text{or} \quad p \, dy - (p + dp)dy + \tau dx - (\tau + d\tau)dx + \gamma \, dx \, dy \, \sin \theta = 0 \quad (4.26)$$

où  $\tau$  est le cisaillement sur la paroi de l'élément et  $g$  est le poids spécifique du fluide. L'équation ci-dessus se simplifie en

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{d}{dx} (p + \gamma h) \quad (4.27)$$

en utilisant  $dh = -\sin \theta \, dx$  avec  $h$  mesuré dans la direction verticale. Notez que cette équation peut être appliquée à un écoulement laminaire ou turbulent. Pour un écoulement laminaire, la contrainte de cisaillement  $t$  est liée au gradient de vitesse par l'équation. (1.9) :



**Figure 4.5.** Écoulement constant et développé dans une conduite.

$$-\mu \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{d}{dx}(p + \gamma h) \quad (4.28)$$

Parce que nous supposons un écoulement développé (pas de changement du profil de vitesse dans le sens de l'écoulement), le côté gauche est fonction de  $r$  uniquement et donc  $d(p + \gamma h)/dx$  doit être au plus une constante (il ne peut pas dépendre de  $r$  puisqu'il y a il n'y a pas d'accélération radiale et comme on suppose que le tuyau est relativement petit, il n'y a pas de variation de pression avec  $r$ ) ; on peut donc écrire

$$\int du = \int \frac{r}{2\mu} \frac{d}{dx}(p + \gamma h) dr \quad (4.29)$$

Ceci est intégré pour fournir le profil de vitesse

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{d}{dx}(p + \gamma h) + C \quad (4.30)$$

où la constante d'intégration  $C$  peut être évaluée en utilisant  $u(r_0) = 0$  de sorte que

$$u(r) = \frac{(r^2 - r_0^2)}{4\mu} \frac{d}{dx}(p + \gamma h) \quad (4.31)$$

Pour un tuyau horizontal pour lequel  $dh/dx = 0$ , le profil de vitesse devient

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - r_0^2) \quad (4.32)$$

Le profil de vitesse ci-dessus est un profil parabolique ; le flux est parfois appelé flux de Poiseuille.

#### 4.4.2 Application des équations de Navier-Stokes

L'équation du moment différentiel à composante  $z$  utilisant les coordonnées cylindriques est appliquée à un écoulement constant et développé dans un tuyau circulaire. Pour la situation actuelle, nous souhaitons faire référence à la coordonnée dans la direction du flux par  $x$  et à la composante de vitesse dans la direction  $x$  par  $u(x)$  ; alors, remplaçons le  $z$  par  $x$  et le  $v_z$  par  $u$ . L'équation différentielle prend alors la forme

$$\rho \left( \cancel{\frac{\partial u}{\partial r}} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}} + u \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \right) \quad (4.33)$$

no radial velocity
no swirl
developed flow
steady flow
symmetric flow
developed flow

Observez que le côté gauche est nul, c'est-à-dire que les particules de fluide n'accélèrent pas. En utilisant  $\rho g_x = g \sin \theta = 2\gamma dh/dx$ , l'équation ci-dessus se simplifie en

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.34)$$

où les deux premiers termes entre parenthèses à droite de l'équation. (4.34) ont été combinés, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.35)$$

Maintenant, nous voyons que le côté gauche de l'équation (4.35) est au plus fonction de  $x$  et le membre de droite est fonction de  $r$ . Cela signifie que chaque côté est au plus une constante, disons  $\lambda$ , puisque  $x$  et  $r$  peuvent varier indépendamment l'un de l'autre. Nous remplaçons donc les dérivées partielles par des dérivées ordinaires et écrivons l'équation. (4.35) comme

$$\lambda = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) \quad \text{or} \quad d \left( r \frac{du}{dr} \right) = \lambda r dr \quad (4.36)$$

Ceci est intégré pour fournir

$$r \frac{du}{dr} = \lambda \frac{r^2}{2} + A \quad (4.37)$$

Multipliez par  $dr/r$  et intégrez à nouveau. Nous avons

$$u(r) = \lambda \frac{r^2}{4} + A \ln r + B \quad (4.38)$$

Reportez-vous à la Fig. 7.4 : les deux conditions aux limites sont  $u$  est fini en  $r = 0$  et  $u = 0$  en  $r = r_0$ . Ainsi,  $A = 0$  et  $B = -\lambda r_0^2/4$ . Puisque  $\lambda$  est le côté gauche de l'équation. (4.35), nous pouvons écrire l'équation. (4.36) comme

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{d}{dx} (p + \gamma h)(r^2 - r_0^2) \quad (4.39)$$

Il s'agit de la distribution de vitesse parabolique d'un écoulement laminaire développé dans une conduite, parfois appelé écoulement de Poiseuille. Pour un tuyau horizontal,  $dh/dx = 0$  et

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - r_0^2) \quad (4.40)$$

#### 4.4.3 Grandeurs d'intérêt

La première grandeur intéressante dans l'écoulement dans une canalisation est la vitesse moyenne  $V$ . Si l'on exprime le gradient de pression constant sous la forme  $dp/dx = -\Delta p/L$ , où  $\Delta p$  est la chute de pression (un nombre positif) sur la longueur de la canalisation  $L$ , il y a des résultats

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{A} \int u(r) 2\pi r dr \\ &= -\frac{2\pi}{\pi r_0^2} \frac{\Delta p}{4\mu L} \int_0^{r_0} (r^2 - r_0^2) r dr = \frac{r_0^2 \Delta p}{8\mu L} \end{aligned} \quad (4.41)$$

La vitesse maximale se produit à  $r = 0$  et est

$$u_{\max} = \frac{r_0^2 \Delta p}{4\mu L} = 2V \quad (4.42)$$

La chute de pression, réécrivant l'équation (4.42), est

$$\Delta p = \frac{8\mu L V}{r_0^2} \quad (4.43)$$

La contrainte de cisaillement au niveau de la paroi peut être déterminée en considérant un volume de contrôle de longueur  $L$  dans le tuyau. Pour un tuyau horizontal, la force de pression équilibre la force de cisaillement de sorte que le volume de contrôle cède

$$\pi r_0^2 \Delta p = 2\pi r_0 L \tau_0 \quad \therefore \tau_0 = \frac{r_0 \Delta p}{2L} \quad (4.44)$$

Parfois, un cisaillement de mur sans dimension, appelé facteur de frottement  $f$ , est utilisé. Il est défini comme étant

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho V^2} \quad (4.45)$$

On fait également référence à une perte de charge  $h_L$  définie comme  $\Delta p/\gamma$ . En combinant les équations ci-dessus, cela peut être exprimé comme

$$h_L = \frac{\Delta p}{\gamma} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (4.46)$$

Ceci est parfois appelé l'équation de *Darcy-Weisbach* ; elle est valable aussi bien pour un écoulement laminaire que turbulent dans une conduite. En termes de nombre de Reynolds, le facteur de frottement pour un écoulement laminaire est (combinez les équations (4.43) et (4.46))

$$f = \frac{64}{Re} \quad (4.47)$$

où  $Re = VD/\nu$ . Si cela est remplacé dans l'équation (4.47), nous voyons que la perte de charge est directement proportionnelle à la vitesse moyenne dans un écoulement laminaire, un fait qui s'applique également à un écoulement laminaire dans un conduit de n'importe quelle section transversale.

### Exemple 4.2

La chute de pression sur une longueur de 30 m d'une conduite horizontale de 1 cm de diamètre transportant de l'eau à 20 °C est mesurée comme étant de 2 kPa. Un écoulement laminaire est supposé. Déterminez (a) la vitesse maximale dans le tuyau, (b) le nombre de Reynolds, (c) la contrainte de cisaillement de la paroi et (d) le facteur de frottement.

#### Solution :

(a) La vitesse maximale est

$$u_{\max} = \frac{r_0^2 \Delta p}{4\mu L} = \frac{0.005^2 \times 2000}{4 \times 10^{-3} \times 30} = 0.4167 \text{ m/s}$$

Remarque : La pression doit être en pascals pour que les unités puissent être vérifiées. Il est sage de s'assurer que les unités vérifient lorsque les équations sont utilisées pour la première fois. Les unités ci-dessus sont vérifiées comme suit :

$$\frac{\text{m}^2 \times \text{N}/\text{m}^2}{(\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2) \times \text{m}} = \text{m}/\text{s}$$

(b) Le nombre de Reynolds, une quantité sans dimension, est

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(0.4167/2)0.01}{10^{-6}} = 4167$$

Celui-ci dépasse 2 000, mais un écoulement laminaire peut exister à des nombres de Reynolds plus élevés si un tuyau lisse est utilisé et si l'on prend soin de fournir un écoulement exempt de perturbations. Mais notez à quel point la vitesse est faible dans ce tuyau relativement petit. Les écoulements laminaires sont rares dans la plupart des applications techniques, sauf si le fluide est extrêmement visqueux ou si les dimensions sont assez petites.

(c) La contrainte de cisaillement de la paroi due aux effets visqueux s'avère être

$$\tau_0 = \frac{r_0 \Delta p}{2L} = \frac{0.005 \times 2000}{2 \times 30} = 0.1667 \text{ Pa}$$

Si nous avons utilisé la pression en kPa, la contrainte aurait eu des unités de kPa.

(d) Enfin, le facteur de frottement, une quantité sans dimension, est

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{0.1667}{0.5 \times 1000 \times [0.4167/2]^2} = 0.0077$$

## 4.5 Flux laminaire entre cylindres tournants

L'écoulement constant entre cylindres concentriques, comme le montre la figure 7.6, est un autre exemple relativement simple d'écoulement laminaire que nous pouvons résoudre analytiquement. Un tel écoulement existe en dessous d'un nombre de Reynolds de 1 700 ( $\text{Re} = \omega_1 r_1 \delta / \nu$ ,  $\delta = r_2 - r_1$ ). Au-dessus de 1 700, l'écoulement peut être un écoulement laminaire différent ou un écoulement turbulent. Ce flux trouve une application dans la lubrification dans laquelle l'arbre extérieur est stationnaire. Nous résoudrons à nouveau ce problème en utilisant un élément fluide dans la Sec. 7.5.1 et en utilisant l'équation de Navier-Stokes appropriée de la Sec. 7.5.2 ; l'une ou l'autre méthode peut être utilisée.

### 4.5.1 L'approche élémentaire

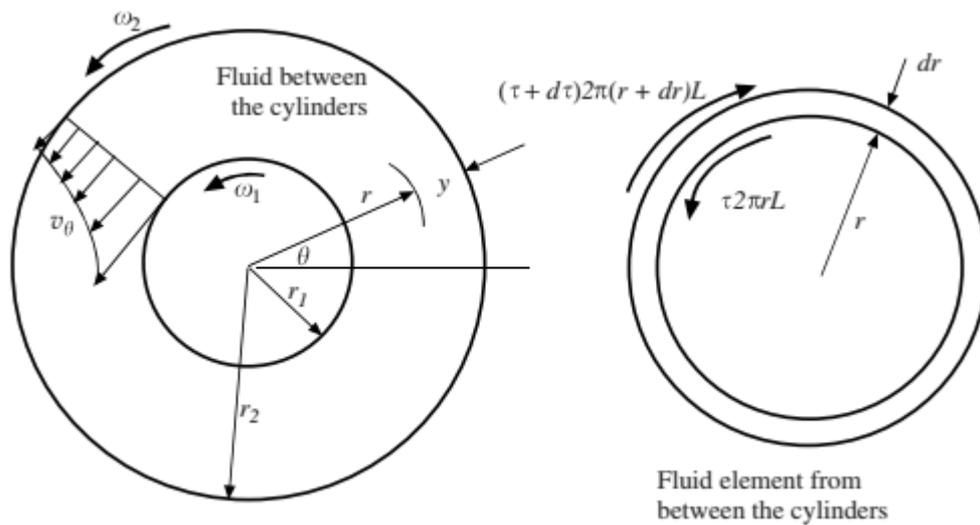
Les deux cylindres concentriques rotatifs sont représentés sur la figure 4.6. Nous supposons des cylindres verticaux, donc les forces du corps agiront normalement par rapport à l'écoulement circulaire dans la direction  $y$  avec la seule composante de vitesse non nulle  $v_\theta$ .

L'élément de fluide sélectionné, illustré sur la figure 4.6, n'a aucune accélération angulaire dans cette condition d'écoulement constant. Par conséquent, la somme des couples agissant sur l'élément est nulle :

$$\tau \times 2\pi r L \times r - (\tau + d\tau) \times 2\pi(r + dr)L \times (r + dr) = 0 \quad (4.48)$$

où  $\tau(r)$  est la contrainte de cisaillement et L est la longueur des cylindres, qui doit être grande par rapport à la largeur de l'espace  $\delta = r_2 - r_1$ . L'équation (7.47) se simplifie en

$$\tau 2r dr + r^2 d\tau + 2r d\tau dr + d\tau(dr)^2 = 0 \quad (4.49)$$



**Figure 4.6.** Flux entre cylindres concentriques.

Les deux derniers termes de l'équation. (4.47) sont des termes d'ordre supérieur qui sont négligeables par rapport aux deux premiers termes, de sorte que l'équation simplifiée est

$$r \frac{d\tau}{dr} + 2\tau = 0 \quad (4.50)$$

Nous devons maintenant reconnaître que le t de l'équation (4.49) est  $-\tau_{r\theta}$  essai du Tableau 4.1 avec entrée sous « Contraintes ». Pour cette application simplifiée, la contrainte de cisaillement est liée au gradient de vitesse par

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial(v_\theta/r)}{\partial r} \quad (4.51)$$

Cela permet à l'équation. (4.49) à écrire, en écrivant les dérivées partielles comme des dérivées ordinaires puisque  $v_\theta$  dépend de  $r$  seulement, comme

$$r\mu \frac{d}{dr} r \frac{d(v_\theta/r)}{dr} + 2\mu r \frac{d(v_\theta/r)}{dr} = 0 \quad (4.52)$$

Multipliez par  $dr$ , divisez par  $\mu r$  et intégrez :

$$r \frac{d(v_\theta/r)}{dr} + 2 \frac{v_\theta}{r} = A \quad (4.53)$$

ou, puisque  $rd(v_\theta/r)/dr = dv_\theta/dr - v_\theta/r$ , cela peut s'écrire

$$\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} = A \quad \text{or} \quad \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} = A \quad (4.54)$$

Maintenant, intégrez à nouveau et obtenez

$$v_\theta(r) = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r} \quad (4.55)$$

En utilisant les conditions aux limites  $v_\theta = r_1\omega_1$  à  $r = r_1$  et  $v_\theta = r_2\omega_2$  à  $r = r_2$ , les constantes s'avèrent être

$$A = 2 \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad B = \frac{r_1^2 r_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.56)$$

#### 4.5.2 Application des équations de Navier-Stokes

L'équation du moment différentiel à composante  $y$  du tableau 4.1 est sélectionnée pour ce mouvement circulaire avec  $v_r = 0$  et  $v_z = 0$  :

$$\begin{aligned} \overset{\text{steady}}{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + \overset{\text{symmetric}}{v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta v_r}{r}} &= - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + g_\theta \\ + v \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & \end{aligned} \quad (4.58)$$

symmetric
away from end walls

Remplacez les dérivées ordinaires par des dérivées partielles puisque  $v_\theta$  dépend uniquement de  $\theta$  et l'équation devient

$$0 = \frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2} \quad (4.59)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dr} \frac{dv_\theta}{dr} = - \frac{d(v_\theta/r)}{dr} \quad (4.60)$$

Multipliez par  $dr$  et intégrez :

$$\frac{dv_\theta}{dr} = - \frac{v_\theta}{r} + A \quad \text{or} \quad \frac{1}{r} \frac{d(rv_\theta)}{dr} = A \quad (4.61)$$

Intégrez à nouveau :

$$v_\theta(r) = \frac{A}{2} r + \frac{B}{r} \quad (4.62)$$

Les conditions aux limites  $v_\theta(r_1) = r\omega_1$  et  $v_\theta(r_2) = r\omega_2$  permettent

$$A = 2 \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad B = \frac{r_1^2 r_2^2 (\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.63)$$

### 4.5.3 Grandeurs d'intérêt

De nombreuses applications des cylindres rotatifs impliquent que le cylindre extérieur soit fixe, c'est-à-dire  $\omega_2 = 0$ . La distribution de vitesse, trouvée dans les deux sections précédentes, avec A et B simplifiés, devient

$$v_\theta(r) = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( \frac{r_2^2}{r} - r \right) \quad (4.64)$$

La contrainte de cisaillement  $\tau_l$  ( $-2\tau_y$  du tableau 4.1) agit sur le cylindre intérieur. C'est

$$\tau_l = - \left[ \mu r \frac{d(v_\theta/r)}{dr} \right]_{r=r_1} = \frac{2\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.65)$$

Le couple  $T$  nécessaire pour faire tourner le cylindre intérieur est

$$T = \tau_1 A r_1 = \frac{2\mu r_2^2 \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} 2\pi r_1 L \times r_1 = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.66)$$

La puissance  $\dot{W}$  nécessaire pour faire tourner le cylindre intérieur avec une vitesse de rotation  $\omega_1$  est alors

$$\dot{W} = T \omega_1 = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L \omega_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.67)$$

Cette puissance, requise en raison des effets visqueux entre les deux cylindres, chauffe le fluide dans les roulements et nécessite souvent un refroidissement pour contrôler la température.

Pour un petit écart  $\delta$  entre les cylindres, comme cela se produit dans les problèmes de lubrification, il est acceptable d'approcher la distribution de vitesse sous la forme d'un profil linéaire, un écoulement de *Couette*. En utilisant la variable  $y$  de la Figure 4.6, la distribution de vitesse est

$$v_\theta(r) = \frac{r_1 \omega_1}{\delta} y \quad (4.68)$$

où  $y$  est mesuré à partir du cylindre extérieur vers le centre.

### Exemple 4.3

La viscosité doit être déterminée en faisant tourner un cylindre long de 6 cm de diamètre et de 30 cm de long à l'intérieur d'un cylindre de 6.2 cm de diamètre. Le couple mesuré est de 0.22 N.m et la vitesse de rotation est mesurée de 3 000 tr/min. Utilisez les équations. (4.62) et (4.66) pour estimer la viscosité. Supposons que  $S = 0,86$ .

*Solution :*

Le couple est trouvé à partir de l'équation. (7.64) basé sur la distribution de vitesse de l'équation. (7.62) :

$$T = \frac{4\pi\mu r_1^2 r_2^2 L \omega_1}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{4\pi\mu \times 0.03^2 \times 0.031^2 \times 0.3 \times (3000 \times 2\pi/60)}{0.031^2 - 0.03^2} = 0.22$$

$$\therefore \mu = 0.0131 \text{ (N}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$$

En utilisant l'équation. (7.66), le couple s'avère être

$$T = \tau_1 A r_1 = \mu \frac{r_1 \omega_1}{\delta} 2\pi r_1 L \times r_1$$

$$0.22 = \mu \frac{0.03(3000 \times 2\pi/60)}{0.031 - 0.03} 2\pi \times 0.03^2 \times 0.3 \quad \therefore \mu = 0.0138 \text{ (N}\cdot\text{s/m}^2\text{)}$$

L'erreur en supposant le profil linéaire est de 5,3 pour cent.

Le nombre de Reynolds est, en utilisant  $\nu = \mu/\rho$ ,

$$Re = \frac{\omega_1 r_1 \delta}{\nu} = \frac{(3000 \times 2\pi/60) \times 0.03 \times 0.001}{0.0131/(1000 \times 0.86)} = 619$$

L'hypothèse d'écoulement laminaire est acceptable depuis  $Re < 1700$ .

#### 4.6 Flux à canal ouvert

Considérons l'écoulement turbulent développé dans un canal ouvert. L'eau s'écoule à une profondeur de  $y$  et le canal se trouve sur une pente  $S$ , qui est supposée petite de sorte que  $\sin \theta \approx S$ . La section transversale pourrait être trapézoïdale, comme illustré, ou elle pourrait être circulaire, rectangulaire ou triangulaire. Appliquons l'équation énergétique entre les deux sections :

$$0 = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + h_L \quad (4.69)$$

La perte de charge est le changement d'altitude, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} h_L &= z_1 - z_2 \\ &= L \sin \theta = LS \end{aligned} \quad (4.70)$$

où  $L$  est la distance entre les deux sections sélectionnées. En utilisant la perte de charge exprimée par l'équation. (4.66), nous avons

$$h_L = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{2g} = LS \quad \text{or} \quad V^2 = \frac{8g}{f} RS \quad (4.71)$$

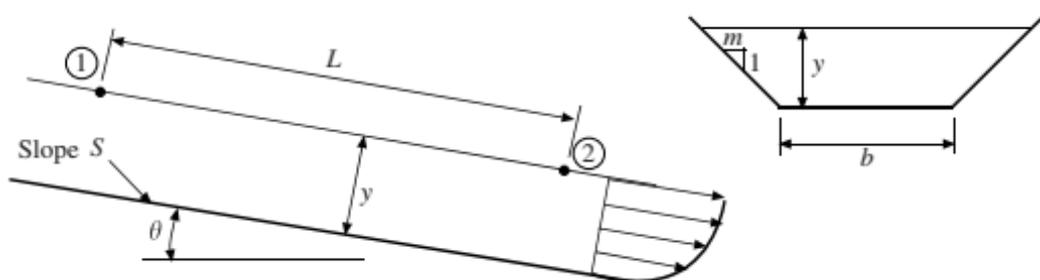


Figure 4.7. Écoulement dans un canal ouvert.

Le nombre de Reynolds de l'écoulement dans un canal ouvert est invariablement grand et le canal est rugueux, de sorte que le facteur de frottement est une constante indépendante de la vitesse (voir le diagramme de Moody) pour un canal particulier. Par conséquent, la vitesse est liée à la pente et au rayon hydraulique par

$$V = C\sqrt{RS} \quad (4.72)$$

où  $C$  est une constante dimensionnelle appelée coefficient de *Chezy* ; elle a été reliée expérimentalement à la rugosité du canal et au rayon hydraulique par

$$C = \frac{1}{n}R^{1/6} \quad (4.73)$$

La constante sans dimension  $n$  est une mesure de la rugosité de la paroi et est appelée *Manning*  $n$ . Les valeurs pour divers matériaux de mur sont répertoriées dans le tableau 4.3.

Le débit dans un canal ouvert découle de  $Q = A.V$  et est

$$Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S^{1/2} \quad (4.74)$$

C'est ce qu'on appelle l'équation de *Chezy-Manning*. Il peut être appliqué en utilisant les unités anglaises en remplaçant le « 1 » au numérateur par « 1.49 ».

**Tableau 4.3** Valeurs du Manning  $n$

Matériau du mur	Manning $n$
Brique	0.016
Fonte ou fer forgé	0.015
Tuyau en béton	0.015
Tôle ondulée	0.025
Terre	0.022
Terre avec pierres et mauvaises herbes	2.035
Béton fini	0.012
Ruisseaux de montagne	0.05
Bois raboté	0.012
Tuyau d'égout	0.013
Acier riveté	0.017
Béton inachevé	0.014
Bois brut	0.013

### Exemple 4.5

De l'eau à 20 °C s'écoule dans un canal rectangulaire en brique de 2 m de large à une profondeur de 120 cm. La pente est de 0,0012. Estimez le débit en utilisant (a) l'équation de *Chezy – Manning* et (b) l'équation de *Darcy – Weisbach* équation.

#### Solution :

Tout d'abord, calculez le rayon hydraulique

$$R = \frac{A}{P} = \frac{by}{b + 2y} = \frac{2 \times 1.2}{2 + 2 \times 1.2} = 0.545 \text{ m}$$

(a) L'équation de *Chezy – Manning* fournit

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2} \\ &= \frac{1}{0.016} \times (2 \times 1.2) \times 0.545^{2/3} \times 0.0012^{1/2} = 3.47 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

(b) Pour utiliser l'équation de *Darcy – Weisbach*, nous devons trouver le facteur de frottement  $f$ . Le diagramme de Moody nécessite une valeur pour  $e$ . Utilisez une valeur relativement grande, comme celle pour un béton plus rugueux, c'est-à-dire  $e = 1 \text{ mm}$ . Puisque le rayon hydraulique  $R = D/4$  pour un cercle, on utilise

$$\frac{e}{D} = \frac{e}{4R} = \frac{0.001}{4 \times 0.545} = 0.00046$$

Le diagramme de Moody donne  $f \approx 0,0165$ . L'équation de *Darcy – Weisbach* prend la forme de l'équation. (7.93) :

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} RS = \sqrt{\frac{8 \times 9.8}{0.0165}} \times 0.545 \times 0.0012 = 1.76 \text{ m/s}$$

Le débit est alors

$$Q = AV = 2 \times 1.2 \times 1.76 = 4.23 \text{ m}^3/\text{s}$$

Vérifiez le numéro Reynolds

$$\text{Re} = \frac{4VR}{\nu} = \frac{4 \times 1.76 \times 0.545}{10^{-6}} = 3.8 \times 10^6$$

C'est suffisamment grand pour que  $f$  soit acceptable. Notez que le  $Q$  de la partie (a) est environ 18 % inférieur à celui de la partie (b) et que celui de la partie (b) est considéré comme plus précis.

# Chapitre 5

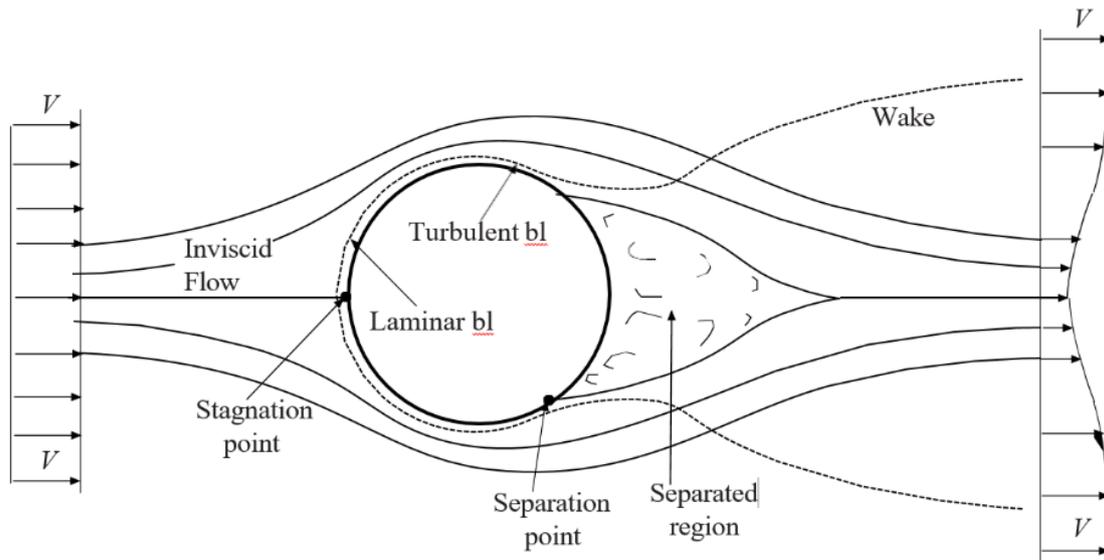
## Flux externes

### 5.1 Introduction

Le sujet des flux externes concerne à la fois les flux à nombre de Reynolds faible et élevé. Les flux à faible nombre de Reynolds ne présentent pas d'intérêt dans la plupart des applications d'ingénierie ; les flux autour des gouttelettes pulvérisées, des sédiments fluviaux, des filaments et des globules rouges seraient des exemples laissés aux spécialistes. Les flux à nombre de Reynolds élevé intéressent de nombreux ingénieurs et incluent les flux autour des profils aérodynamiques, des véhicules, des bâtiments, des câbles de pont, des stades, des aubes de turbine et des panneaux.

Il est assez difficile de résoudre le champ d'écoulement externe à un corps, même le plus simple des corps comme un long cylindre ou une sphère. On peut cependant développer des équations qui permettent d'estimer la croissance de la fine couche visqueuse, la couche limite, qui se développe sur une plaque plane ou sur le nez arrondi d'un véhicule. De plus, des coefficients ont été déterminés expérimentalement qui permettent à la traînée et à la portance d'être des objets d'intérêt. Nous commencerons ce chapitre en présentant de tels coefficients. Mais d'abord, quelques définitions sont nécessaires.

L'écoulement autour d'un corps contondant implique une région séparée, une région dans laquelle l'écoulement se sépare du corps et forme une région de recirculation en aval, comme le montre la figure 5.1. Un sillage, une région influencée par la viscosité, se forme également ; c'est une région diffusive qui continue de croître (à une certaine distance en aval, la vitesse est inférieure à la vitesse du courant libre  $V$ ). Une couche limite laminaire existe près de l'avant du corps, suivie d'une couche limite turbulente, comme le montre la figure 5.1. Un écoulement non visqueux, souvent appelé écoulement libre, existe sur le devant du corps et à l'extérieur de la couche limite, de la région séparée et du sillage. L'écoulement autour d'un corps profilé a toutes les mêmes composantes que celui de la figure 5.1, sauf qu'il n'a pas de région séparée significative et que le sillage est beaucoup plus petit.



**Figure 5.1.** Les détails d'un écoulement autour d'un corps contondant.

L'écoulement non visqueux en courant libre est généralement irrotationnel, bien qu'il puisse s'agir d'un écoulement rotationnel avec tourbillon, par exemple l'écoulement de l'air près du sol autour d'un tronc d'arbre ou de l'eau près du sol autour d'un poteau dans une rivière ; l'eau creuse une dépression dans le sable devant le poteau et l'air creuse une dépression similaire dans la neige devant l'arbre, une observation plutôt intéressante. Le tourbillon dans l'air ou l'eau en approche explique le phénomène observé.

Il convient de noter que la limite de la région séparée est indiquée à un emplacement moyen. Il est cependant très instable et est capable d'échanger lentement de la masse avec le courant libre, même si les lignes de courant moyennes dans le temps restent en dehors de la région séparée. De plus, la région séparée est toujours située à l'intérieur du sillage.

L'intérêt pour l'écoulement autour d'un objet contondant se concentre sur la traînée, la force que l'écoulement exerce sur le corps dans la direction de l'écoulement. La portance est la force exercée normalement par rapport à la direction de l'écoulement et présente un intérêt pour les profils aérodynamiques et les corps profilés. La traînée  $F_D$  et la portance  $F_L$  sont spécifiées respectivement en termes de coefficient de traînée  $C_D$  et de coefficient de portance  $C_L$  par

$$F_D = \frac{1}{2} \rho A V^2 C_D \quad \text{and} \quad F_L = \frac{1}{2} \rho A V^2 C_L \quad (5.1)$$

où, pour un corps arrondi, la zone  $A$  est la zone projetée sur un plan normal à la direction de l'écoulement, et pour un profil aérodynamique, la zone  $A$  est la corde (la distance entre le nez et le bord de fuite) multipliée par la longueur.

La force due à la pression plus faible dans la région séparée domine la force de traînée sur un corps contondant, sujet de la section 5.2. La contrainte visqueuse qui agit sur et parallèlement à chaque élément limite est négligeable et donc peu, voire pas du tout, d'attention est accordée à la couche limite à la surface d'un corps contondant. L'inverse est vrai pour un profil aérodynamique, sujet de la Section 5.3 ; la force de traînée est due principalement aux contraintes visqueuses qui agissent sur les éléments limites. Par conséquent, la couche limite qui se développe sur un corps profilé suscite un intérêt considérable. C'est cet intérêt qui a motivé de nombreuses études sur les couches limites. Les bases de la théorie de la couche limite seront présentées dans la section 5.5. Mais il faut d'abord connaître l'écoulement non visqueux à l'extérieur de la couche limite (Figure 5.1). Par conséquent, la théorie des écoulements non visqueux sera présentée dans la section 5.4. La couche limite est si fine qu'elle peut être ignorée lors de la résolution de l'écoulement non visqueux. La solution d'écoulement non visqueux fournit la portance, qui n'est pas influencée de manière significative par la couche limite visqueuse, et la répartition de la pression sur la surface du corps ainsi que la vitesse sur cette surface (puisque la solution non visqueuse ignore les effets de la viscosité, le fluide ne s'en tient à la limite mais glisse à côté de la limite). La pression et la vitesse à la surface sont nécessaires dans la solution de couche limite.

## 5.2 Ecoulement autour de corps émoussés

### 5.2.1 Coefficients de traînée

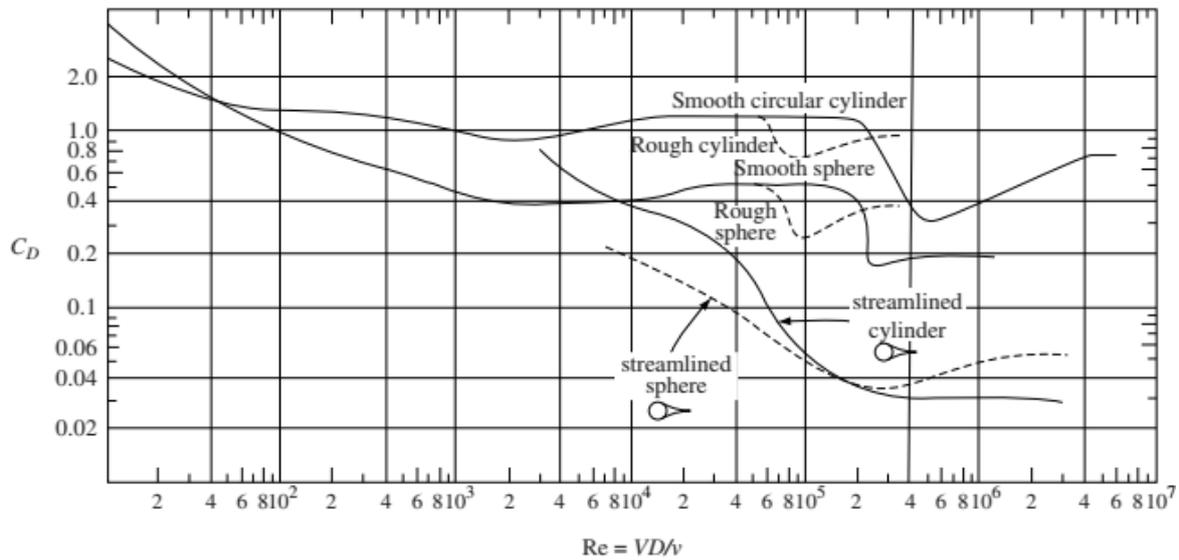
Le principal paramètre d'écoulement qui influence la traînée autour d'un corps contondant est le nombre de Reynolds. S'il n'y a pas de surface libre, les coefficients de traînée pour les cylindres longs et les sphères lisses et rugueux sont présentés sur la figure 5.2 ; les valeurs pour les cylindres et les sphères profilés sont également incluses.

La séparation se produit toujours dans l'écoulement d'un fluide autour d'un corps contondant si le nombre de Reynolds est suffisamment élevé. Cependant, aux faibles nombres de Reynolds (on parle alors de flux de Stokes si  $Re < 5$ ), il n'y a pas de séparation et le coefficient de traînée, pour une sphère, est donné par

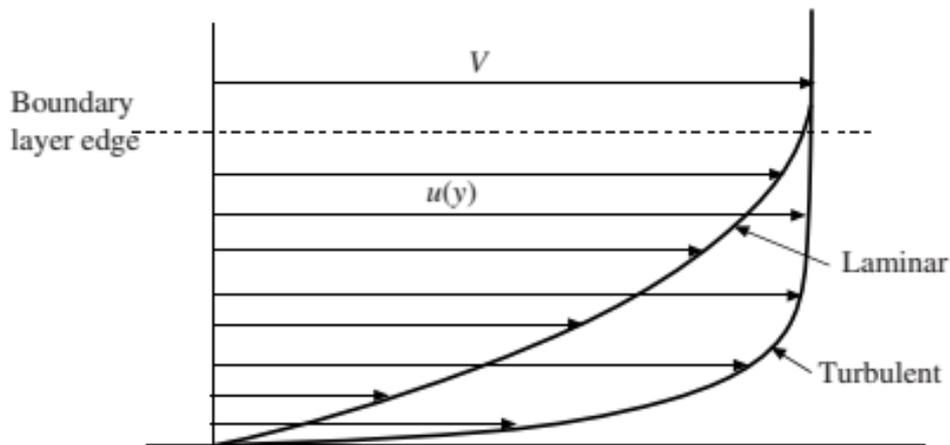
$$C_D = \frac{24}{Re} \quad Re < 1 \quad (5.2)$$

La séparation se produit pour  $Re \geq 10$  en commençant sur une petite zone à l'arrière de la sphère jusqu'à ce que la région séparée atteigne un maximum à  $Re \approx 1000$ . Le coefficient de traînée est alors relativement constant jusqu'à ce qu'une chute soudaine se produise au voisinage de

$Re = 2 \times 10^5$ . Ceci la chute soudaine est due à la transition de la couche limite juste avant la séparation subissant la transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent. Une couche limite turbulente contient beaucoup plus de quantité de mouvement et est capable de déplacer la région de séparation plus vers l'arrière ; voir la comparaison sur la figure 8.3. La diminution soudaine de la traînée pourrait atteindre 80 pour cent. La surface d'un objet peut être rendue rugueuse pour provoquer une transition entre la couche limite prématurément; les alvéoles d'une balle de golf y parviennent et augmentent le vol jusqu'à 100 % par rapport au vol d'une balle lisse.



**Figure 5.2.** Coefficients de traînée pour l'écoulement autour de sphères et de cylindres longs.



**Figure 5.3.** Profils de vitesse laminaire et turbulente pour la même épaisseur de couche limite.

Après la chute soudaine, le coefficient de traînée augmente à nouveau avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Les données expérimentales ne fournissent pas les coefficients de traînée ni pour la sphère ni pour le cylindre pour des nombres de Reynolds élevés. Les valeurs de 0.2 pour les sphères lisses et de 0.4 pour les cylindres longs et lisses pour les nombres de Reynolds supérieurs à  $10^6$  sont souvent utilisées.

La rationalisation peut réduire considérablement les coefficients de traînée des corps contondants. Les coefficients de traînée pour les cylindres et les sphères profilés sont illustrés à la Figure 5.2. L'angle inclus au bord de fuite ne doit pas dépasser environ  $20^\circ$  si la région séparée doit être minimisée. La traînée due à la contrainte de cisaillement agissant sur la surface élargie augmentera certainement pour un corps profilé, mais la traînée due à la basse pression sera beaucoup plus réduite de sorte que la traînée totale sera moindre. En outre, la rationalisation élimine les vibrations qui se produisent souvent lorsque des tourbillons sont émis par un corps contondant.

Pour les cylindres de longueur finie avec extrémités libres, le coefficient de traînée doit être réduit en utilisant les données du tableau 8.1. Si un cylindre de longueur finie a une extrémité fixée à une surface solide, la longueur du cylindre est doublée. Notez que le  $L/D$  d'un cylindre à extrémités libres doit être assez grand pour que les effets finaux ne soient pas significatifs.

**Tableau 5.1** Coefficients de traînée pour les cylindres circulaires de longueur finie avec extrémités libres

$L/D$	$C_D/C_{D1}$
40	0.82
20	0.76
10	0.68
5	0.62
3	0.62
2	0.57

Les coefficients de traînée pour un certain nombre de formes courantes insensibles aux nombres de Reynolds élevés sont présentés dans le tableau 5.2.

**Tableau 5.2** Coefficients de traînée pour divers objets contondants

Objet	$Re$	$C_D$
Cylindre carré de largeur $w$	$L/w = \begin{cases} \infty > 10^4 \\ 1 > 10^4 \end{cases}$	2.0
		1.1
Assiettes rectangulaires	$L/w = \begin{cases} \infty > 10^3 \\ 20 > 10^3 \\ 5 > 10^3 \\ 1 > 10^3 \end{cases}$	2.0
		1.5
		1.2
		1.1
Disque circulaire	$>10^3$	1.1
Parachute	$>10^7$	1.4
Automobile moderne	$>10^5$	0.29
Van	$>10^5$	0.42
Vélo	cavalier droit	1.1
	cavalier penché	0.9
	cavalier de rédaction	0.5

### Exemple 5.1

Un poteau de 5 cm de diamètre et 6 m de haut fixé dans le béton supporte une enseigne plate et circulaire de 4 m de diamètre.

Estimer le moment maximum auquel doit résister le béton pour une vitesse de vent de 30 m/s.

**Solution** : Pour obtenir le moment maximum, le vent est supposé normal au signe. D'après le tableau 5.2, le coefficient de traînée d'un disque est de 1.1. Le moment dû à la force de traînée, qui agit au centre du signe, est

$$M_1 = F_{D1} \times L_1 = \frac{1}{2} \rho A_1 V^2 C_{D1} \times L_1 = \frac{1}{2} \times 1.22 \times \pi \times 2^2 \times 30^2 \times 1.1 \times 8 = 60\,700 \text{ N}\cdot\text{m}$$

où la densité à une altitude au-dessus du niveau de la mer de 0 est utilisée puisque l'altitude n'est pas donnée. Le moment dû au pôle est

$$M_2 = F_{D2} \times L_2 = \frac{1}{2} \rho A_2 V^2 C_{D2} \times L_2 = \frac{1}{2} \times 1.22 \times 0.05 \times 6 \times 30^2 \times 0.7 \times 3 = 346 \text{ N}\cdot\text{m}$$

en utilisant un nombre de Reynolds  $Re = 30 \times 0,05 / 1,5 \times 10^{-5} = 10^{-5}$  et en supposant des fluctuations de haute intensité dans le flux d'air, c'est-à-dire un cylindre rugueux. Le facteur du tableau 8.1 n'a pas été utilisé puisqu'aucune des extrémités n'était libre.

Le moment auquel doit résister la base en béton est

$$M = M_1 + M_2 = 60\,700 + 346 = 61\,000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

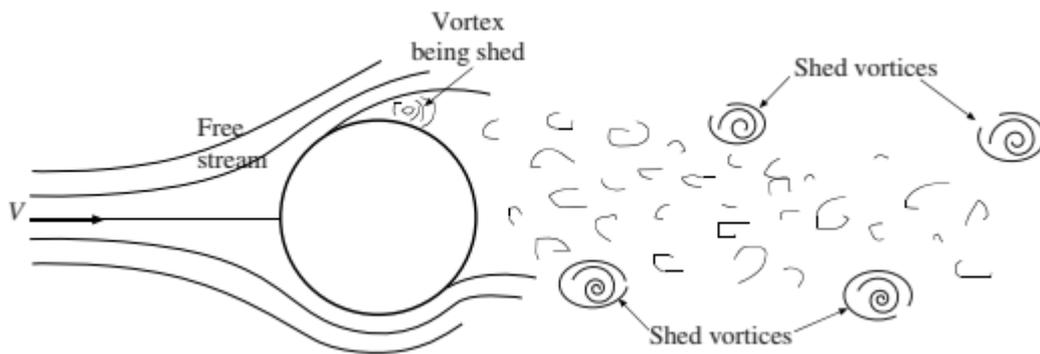
### 5.2.2 Dégagement des tourbillons

Les corps cylindriques longs exposés à un écoulement de fluide peuvent présenter le phénomène de perte de vortex à des nombres de Reynolds relativement faibles. Les tourbillons

sont émis par les fils électriques, les ponts, les tours et les câbles de communication sous-marins et peuvent en réalité causer des dommages importants. Nous considérerons les tourbillons émis par un long cylindre circulaire. La perte se produit alternativement de chaque côté du cylindre, comme le montre la figure 5.4. La fréquence de délestage  $f$ , Hz, est donnée par le nombre de Strouhal,

$$St = \frac{fD}{V} \quad (5.3)$$

Si cette fréquence de délestage est la même ou un multiple de la fréquence d'une structure, il est alors possible que des dommages se produisent en raison de la résonance.



**Figure 5.4.** Vortex émis par un cylindre.

Le nombre de Strouhal ne peut pas être calculé à partir d'équations ; elle est déterminée expérimentalement et représentée sur la figure 5.5. Notez que le déversement de vortex commence à  $Re < 40$  et pour  $Re = 300$ , le nombre de Strouhal est essentiellement indépendant du nombre de Reynolds et est égal à environ 0.21. Le phénomène de délestage des vortex disparaît pour  $Re = 10^4$ .

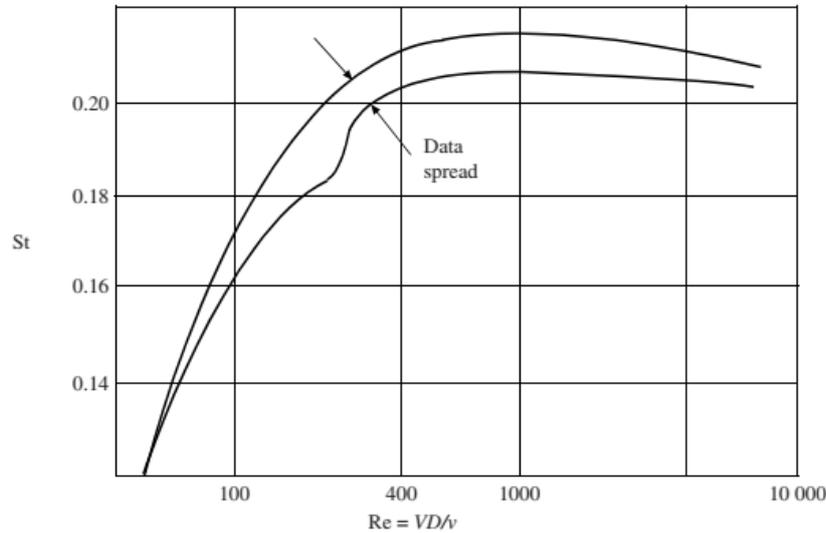
### Exemple 5.2

Un cylindre de 6 cm de diamètre est utilisé pour mesurer la vitesse d'un courant d'air lent. Deux prises de pression sont utilisées pour déterminer que les tourbillons sont émis avec une fréquence de 4 Hz. Déterminez la vitesse du flux d'air.

**Solution :** Supposons que le nombre de Strouhal soit compris entre  $300 < Re < 10\,000$ . Alors

$$\frac{fD}{V} = 0.21 \quad \text{so that} \quad V = \frac{4 \times 0.06}{0.21} = 1.14 \text{ m/s}$$

Il est assez difficile de mesurer la vitesse d'un courant d'air aussi faible. La mesure des tourbillons rejetés est une méthode pour y parvenir.



**Figure 5.5.** Strouhal number for vortex shedding from a cylinder.

### 5.2.3 Cavitations

Lorsqu'un liquide s'écoule d'une région à pression relativement élevée vers une région à basse pression, une cavitation peut se produire, *c'est-à-dire* que la pression peut être suffisamment basse pour que le liquide se vaporise. Cela peut se produire dans les écoulements de canalisations dans lesquels il existe une contraction et une expansion, dans les aubes d'une pompe centrifuge, près des pointes des hélices, sur les hydroptères et les torpilles. Cela peut en fait endommager les hélices et les arbres en acier (en raison des vibrations) des navires et empêcher une pompe de fonctionner correctement. Cependant, il peut également être utile pour la destruction des calculs rénaux, dans les appareils de nettoyage par ultrasons et pour améliorer les performances des torpilles.

La cavitation se produit chaque fois que le nombre de cavitation  $\sigma$ , défini par

$$\sigma = \frac{p_{\infty} - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} \quad (5.4)$$

est inférieur au nombre critique de cavitation scrit, qui dépend de la géométrie et du nombre de Reynolds. Dans l'équation (5.4)  $p_1$  est la pression absolue dans le courant libre et  $p_v$  la pression de vapeur du liquide.

Le coefficient de traînée d'un corps soumis à la cavitation est donné par

$$C_D(\sigma) = C_D(0)(1 + \sigma) \quad (5.5)$$

où  $C_D(0)$  est donné dans le tableau 5.3 pour plusieurs corps pour  $Re \approx 10^5$ .

L'hydroptère, une forme de type aérodynamique utilisée pour soulever un navire au-dessus de la surface de l'eau, ne peut invariablement pas fonctionner sans cavitation. La surface et le nombre de Reynolds sont basés sur la longueur de la corde. Les coefficients de traînée et de portance ainsi que les nombres critiques de cavitation sont présentés dans le tableau 5.4.

**Tableau 5.3** Coefficients de traînée pour des nombres de cavitation nuls à  $Re > 10^5$

Géométrie	Angle	$C_D(0)$
Sphère		0.30
Disque (circulaire)		0.8
Cylindre circulaire		0.50
Assiette plate (rectangulaire)		0.88
		0.74
Coin bidimensionnel	90	0.64
		0.49
Cône (axisymétrique)	30	0.28
		0.64
		0.52
		0.38
	30	0.20

**Tableau 5.4** Coefficients de traînée et de portance et nombres critiques de cavitation pour les hydroptères pour  $10^5 < Re < 10^6$

Angle °	Coefficient de portance	Coefficient de traînée	Numéro de cavitation critique
22	0.2	0.014	0.5
0	0.4	0.014	0.6
2	0.6	0.015	0.7
4	0.8	0.018	0.8
6	0.95	0.022	1.2
8	1.10	0.03	1.8
10	1.22	0.04	2.5

### Exemple 5.3

Un hydroptère de 2 m de long avec une longueur de corde de 40 cm évolue à 30 cm sous la surface de l'eau avec un angle d'attaque de  $6^\circ$ . Pour une vitesse de 16 m/s déterminer la traînée et la portance et décider s'il existe une cavitation sur l'hydroptère.

**Solution :**

La pression  $p_\infty$  doit être absolue. C'est

$$p_\infty = \gamma h + p_{\text{atm}} = 9800 \times 0.3 + 100\,000 = 102\,900 \text{ Pa abs}$$

En supposant que la température de l'eau est d'environ 15 °C, la pression de vapeur est de 1 600 Pa (Tableau C.1) et l'indice de cavitation est de

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{102\,900 - 1705}{0.5 \times 1000 \times 16^2} = 0.79$$

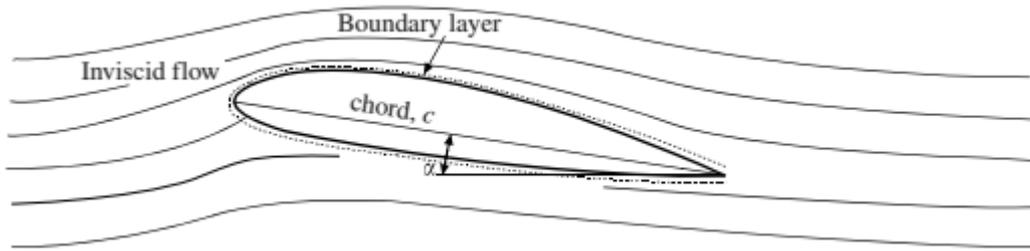
Ceci est inférieur au nombre critique de cavitation de 1,2 indiqué dans le tableau 5.4 et la cavitation est donc présente. Notons que nous aurions pu utiliser  $p_v = 0$ , comme on le fait souvent, avec une précision suffisante.

La traînée et la portance sont

$$F_D = \frac{1}{2}\rho V^2 AC_D = \frac{1}{2} \times 1000 \times 16^2 \times 2 \times 0.4 \times 0.022 = 2250 \text{ N}$$
$$F_L = \frac{1}{2}\rho V^2 AC_L = \frac{1}{2} \times 1000 \times 16^2 \times 2 \times 0.4 \times 0.95 = 97\,300 \text{ N}$$

### 5.3 Écoulement autour des profils

Les profils aérodynamiques sont rationalisés afin qu'aucune séparation ne se produise. Les profils aérodynamiques conçus pour fonctionner à des vitesses subsoniques sont arrondis au bord d'attaque tandis que ceux conçus pour des vitesses supersoniques peuvent avoir des bords d'attaque tranchants. La traînée sur un profil aérodynamique est due principalement à la contrainte de cisaillement qui agit sur la surface ; il y a une certaine traînée due à la répartition de la pression. La couche limite, dans laquelle toutes les contraintes de cisaillement sont confinées, qui se développe sur un profil aérodynamique, est très mince (Figure 5.6) et peut être ignorée lors de la résolution de l'écoulement non visqueux entourant le profil aérodynamique. La distribution de pression déterminée à partir de la solution d'écoulement non visqueuse est très peu influencée par la présence de la couche limite. Par conséquent, la portance est estimée sur un profil aérodynamique en ignorant la couche limite et en intégrant la distribution de pression de l'écoulement non visqueux. La solution d'écoulement non visqueux fournit également la vitesse au bord extérieur de la couche limite mince, une condition aux limites nécessaire pour résoudre les équations de la couche limite ; la solution des équations de la couche limite sera présentée à la section 5.5.



**Figure 5.6** Écoulement autour d'un profil aérodynamique sous un angle d'attaque  $\alpha$ .

La portance et la traînée sur les profils aérodynamiques ne seront pas calculées à partir des conditions d'écoulement mais à partir des valeurs graphiques des coefficients de portance et de traînée. Ceux-ci sont affichés sur la Fig. 8.7 pour un profil aérodynamique conventionnel avec  $Re = 9 \times 10^6$ . Les coefficients de portance et de traînée sont définis comme

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho c L V^2} \quad C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho c L V^2} \quad (5.6)$$

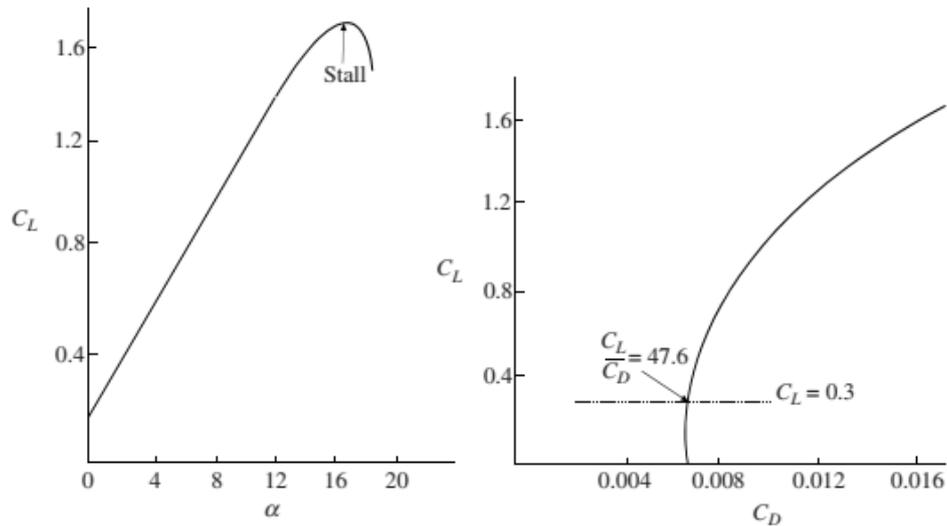
Les profils aérodynamiques conventionnels ne sont pas symétriques et sont conçus pour avoir une portance positive à un angle d'attaque nul, comme le montre la Fig. 8.7. La portance est directement proportionnelle à l'angle d'attaque jusqu'à ce que le décrochage soit rencontré. Le coefficient de traînée est également directement proportionnel à l'angle d'attaque jusqu'à environ  $5^\circ$ . Les conditions de croisière sont à un angle d'attaque d'environ  $5^\circ$  où la traînée est minimale à  $C_L = 0.3$ , comme indiqué.

Ce sont principalement les ailes qui fournissent la portance sur un avion, mais une longueur efficace est la distance bout à bout, l'envergure, puisque le fuselage fournit également une certaine portance.

Le coefficient de traînée est essentiellement constant jusqu'à un nombre de Mach d'environ 0.75. Il augmente ensuite d'un facteur 10 jusqu'à atteindre un nombre de Mach de 1, moment auquel il commence à diminuer lentement. Ainsi, les nombres de Mach de croisière compris entre 0.75 et 1.5 sont évités pour rester à l'écart des coefficients de traînée élevés. Des profils aérodynamiques en flèche sont utilisés car c'est la composante normale de la vitesse qui est utilisée lors du calcul du nombre de Mach, ce qui permet une vitesse plane plus élevée avant que les coefficients de traînée plus élevés ne soient rencontrés.

Des volets à fentes sont également utilisés pour fournir des coefficients de portance plus élevés lors du décollage et de l'atterrissage. L'air s'écoule de la région à haute pression située au bas du profil aérodynamique à travers une fente pour dynamiser l'air lent se déplaçant dans la

couche limite sur la face supérieure du profil aérodynamique, réduisant ainsi la tendance à se séparer et à décrocher. Le coefficient de portance peut atteindre 2,5 avec un volet à simple fente et 3,2 avec deux fentes.



**Figure 5.7** Coefficients de portance et de traînée pour un profil aérodynamique conventionnel à  $Re = 9 \times 10^6$ .

#### Exemple 5.4

Déterminer la vitesse de décollage d'un avion pesant 15 000 N, chargement compris, si son envergure est de 15 m avec une corde de 2 m. Supposons un angle de  $8^\circ$  au décollage.

**Solution :**

Supposons un profil aérodynamique conventionnel et utilisez le coefficient de portance de la figure 5.7 d'environ 0.95. La vitesse est trouvée à partir de l'équation du coefficient de portance

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho c L V^2} \quad 0.95 = \frac{15\,000}{\frac{1}{2} \times 1.2 \times 2 \times 15 \times V^2} \quad \therefore V = 30 \text{ m/s}$$

La réponse est arrondie à deux chiffres significatifs puisque le coefficient de portance de 0.95 est lu sur la figure.

# Chapitre 6

## Écoulement en couche limite

### 6.1 Introduction

Sans aucun doute, l'identification d'une couche limite résulte de l'intérêt porté au profil aérodynamique. L'observation selon laquelle pour un écoulement à nombre de Reynolds élevé, tous les effets visqueux peuvent être confinés à une fine couche de fluide près de la surface a donné naissance à la théorie de la couche limite. En dehors de la couche limite, le fluide agit comme un fluide non visqueux puisque les effets visqueux sont négligeables. Ainsi, la théorie de l'écoulement potentiel de la section précédente fournit la vitesse juste à l'extérieur de la couche limite et la pression à la surface. Dans cette section, nous fournirons à la fois les équations intégrales et différentielles nécessaires pour résoudre la distribution des vitesses. Mais comme ces équations sont difficiles à résoudre pour des surfaces courbes, nous limiterons notre étude à un écoulement sur une plaque plane avec un gradient de pression nul.

Le bord extérieur d'une couche limite ne peut pas être observé, nous attribuons donc arbitrairement son épaisseur  $\delta(x)$ , comme le montre la figure 8.11, au lieu des points où la vitesse est de 99 pour cent de la vitesse du courant libre.

$U(x)$  (la vitesse à la surface de la solution d'écoulement non visqueuse). Rappelons également que la pression à la surface n'est pas influencée par la présence de la fine couche limite, il s'agit donc de la pression sur la surface due à l'écoulement non visqueux. Notez que le système de coordonnées  $x, y$  est orienté de manière à ce que la coordonnée  $x$  soit le long de la surface ; cela est fait pour les équations de couche limite et est possible parce que la couche limite est si mince que les termes de courbure n'apparaissent pas dans les équations de description.

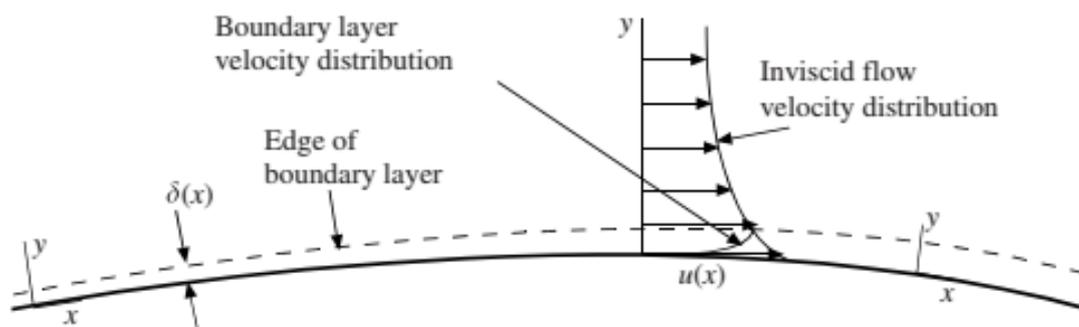
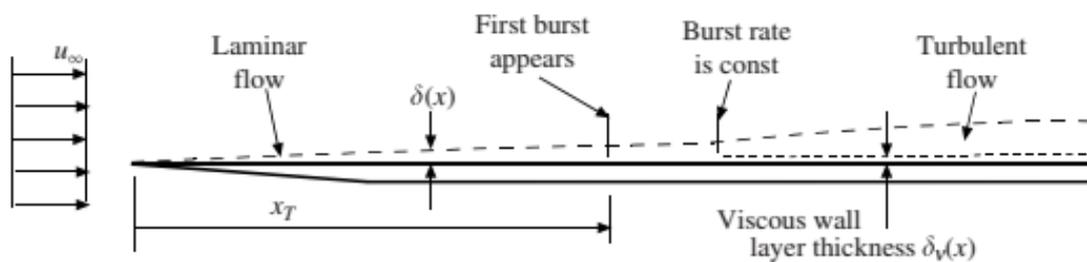


Figure 6.1. Une couche limite.

Une couche limite est laminaire près du bord d'attaque ou près d'un point de stagnation. Il subit une transition vers un écoulement turbulent s'il est suffisamment long, comme le montre la Fig. 6.12. Cette transition se produit lorsque le nombre de Reynolds critique  $U_\infty x_T / \nu = 5 \times 10^5$  sur des plaques planes rigides et lisses dans un écoulement à gradient de pression nul avec une faible intensité de fluctuation en écoulement libre et  $U_\infty x_T / \nu = 3 \times 10^5$  pour un écoulement sur des plaques planes rugueuses ou avec une forte intensité de fluctuation en flux libre (intensité d'au moins 0.1). La région de transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent est relativement courte et est généralement ignorée, de sorte qu'un écoulement turbulent est supposé exister à l'emplacement du premier éclatement.

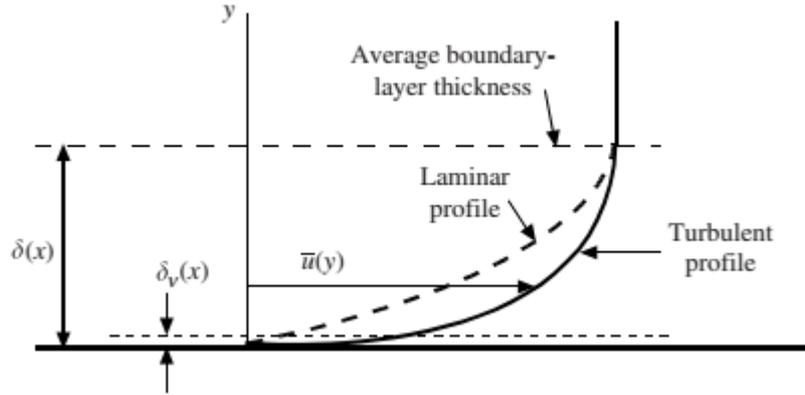


**Figure 6.2.** Une couche limite en transition

La couche limite turbulente s'épaissit plus rapidement qu'une couche limite laminaire et contient beaucoup plus de quantité de mouvement (si elle a la même épaisseur), comme l'observe le croquis des profils de vitesse de la figure 6.3. Il présente également une pente beaucoup plus grande au niveau du mur, ce qui entraîne une contrainte de cisaillement beaucoup plus importante. La couche limite turbulente instantanée varie de manière aléatoire avec le temps et la position et peut être 20 pour cent plus épaisse ou 60 pour cent plus fine à n'importe quelle position à un instant donné ou à tout moment à une position donnée. Ainsi, nous esquissons généralement une épaisseur de couche limite moyenne dans le temps. La couche de paroi visqueuse d'épaisseur  $\delta_v$  dans laquelle les effets visqueux sont censés être concentrés dans une couche limite turbulente est assez mince par rapport à l'épaisseur de la couche limite, telle que représentée.

Il convient de garder à l'esprit qu'une couche limite turbulente est très fine pour la plupart des applications. Sur une plaque plane avec  $U_\infty = 5$  m/s, la couche limite aurait une épaisseur d'environ 7 cm après 4 m. Si cela était dessiné à l'échelle, le fait que la couche limite est très mince serait tout à fait évident. Étant donné que la couche limite est si mince et que la vitesse varie de 0 au niveau de la paroi à  $U(x)$  au bord de la couche limite, il est possible d'approcher

le profil de vitesse dans la couche limite en supposant un profil parabolique ou cubique pour une couche laminaire et un profil de loi de puissance pour une couche turbulente. Avec le profil de vitesse supposé, les équations intégrales qui suivent donnent les quantités d'intérêt.



**Figure 6.3.** Profils de couche limite laminaire et turbulente.

## 6.2 Equations intégrales

Un volume de contrôle infinitésimal d'épaisseur  $dx$  est représenté sur la Figure 6.4 avec des flux de masse en (b) et des flux de quantité de mouvement en (d). L'équation de continuité fournit le flux de masse  $\dot{m}_{top}$  qui traverse le volume de contrôle par le haut ; c'est

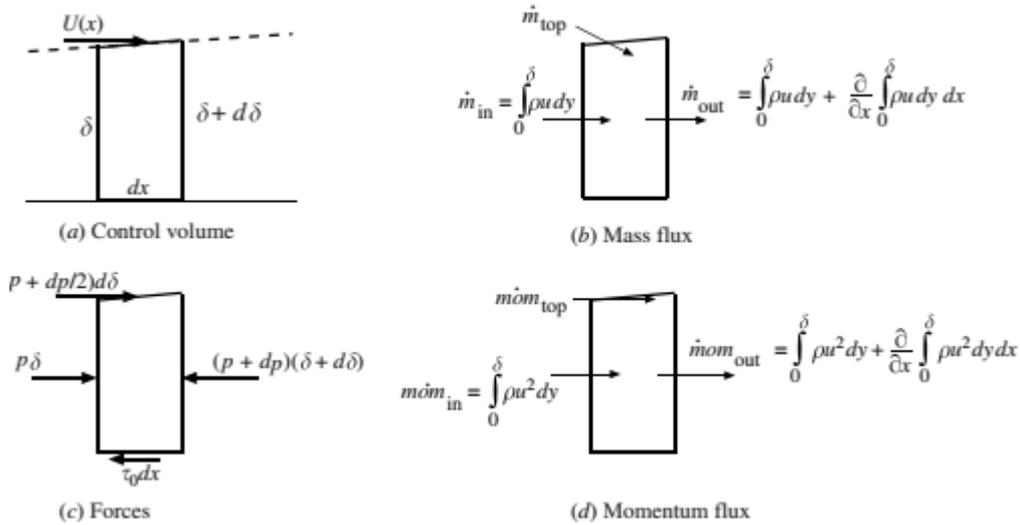
$$\dot{m}_{top} = \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u \, dy \right) dx \quad (6.1)$$

L'équation du moment à composante x (deuxième loi de Newton) s'écrit

$$\sum F_x = \dot{m} \dot{m}_{out} - \dot{m} \dot{m}_{in} - \dot{m} \dot{m}_{top} \quad (6.2)$$

qui devient

$$-\tau_0 \, dx - \delta \, dp = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u^2 \, dy \right) dx - U(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^{\delta} \rho u \, dy \right) dx \quad (6.3)$$



**Figure 6.4** Le volume de contrôle infinitésimal pour une couche limite.

où nous avons négligé  $p d\delta$  et  $dp d\delta$  puisqu'ils sont d'ordre plus petit que les termes restants ; nous avons également utilisé  $\dot{m}om_{top} = U(x)\dot{m}_{top}$ . Divisez par  $(-dx)$  et obtenez l'équation intégrale de Von-Karman :

$$\tau_0 + \delta \frac{dp}{dx} = \rho U(x) \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy - \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy \quad (6.4)$$

Des dérivées ordinaires ont été utilisées car après l'intégration, il ne reste qu'une fonction de  $x$  ( $\delta$  est une fonction de  $x$ ). De plus, la densité  $\rho$  est supposée constante sur la couche limite.

Pour un écoulement sur une plaque plate avec un gradient de pression nul, c'est-à-dire  $U(x) = U_\infty$  et  $\partial p / \partial x = 0$ , Eq. (6.4) peut être mis sous la forme simplifiée

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(U_\infty - u) dy \quad (6.5)$$

Si un profil de vitesse  $u(x, y)$  est supposé pour un flux particulier, Eq. (6.5) avec  $\tau_0 = \mu \partial u / \partial y|_{y=0}$  permet de déterminer à la fois  $\delta(x)$  et  $\tau_0(x)$ .

Deux longueurs supplémentaires sont utilisées dans l'étude des couches limites. Il s'agit de l'épaisseur de déplacement  $\delta_d$  et de l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  définies par

$$\delta_d = \frac{1}{U} \int_0^{\delta} (U - u) dy \quad (6.6)$$

$$\theta = \frac{1}{U^2} \int_0^{\delta} u(U - u) dy \quad (6.7)$$

L'épaisseur de déplacement est la distance sur laquelle la ligne de courant à l'extérieur de la couche limite est déplacée en raison du déplacement plus lent du fluide à l'intérieur de la couche limite. L'épaisseur de l'impulsion est l'épaisseur d'une couche de fluide de vitesse  $U$  qui possède l'impulsion perdue en raison des effets visqueux ; elle est souvent utilisée comme longueur caractéristique pour les études de couche limite turbulente. Notez que l'équation (6.5) peut s'écrire

$$\tau_0 = \rho U_{\infty}^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (6.8)$$

### 6.3 Couches limites laminaires et turbulentes

Les conditions aux limites qui doivent être remplies pour le profil de vitesse dans une couche limite sur une plaque plane avec un gradient de pression nul sont

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{at } y &= 0 \\ u &= U_{\infty} & \text{at } y &= \delta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 & \text{at } y &= \delta \end{aligned} \quad (6.9)$$

#### *Couches limites laminaires*

Pour une couche limite laminaire, nous pouvons soit résoudre l'équation de Navier-Stokes à composante  $x$ , soit supposer un profil tel qu'une parabole. La couche limite étant très mince, un profil supposé donne de plutôt bons résultats. Supposons le profil parabolique

$$\frac{u}{U_{\infty}} = A + By + Cy^2 \quad (6.10)$$

Les trois conditions aux limites ci-dessus nécessitent

$$\begin{aligned} 0 &= A \\ 1 &= A + B\delta + C\delta^2 \\ 0 &= B + 2C\delta \end{aligned} \quad (6.11)$$

dont la solution est

$$A = 0 \quad B = \frac{2}{\delta} \quad C = -\frac{1}{\delta^2} \quad (6.12)$$

ce qui donne le profil de vitesse d'écoulement laminaire

$$\frac{u}{U_\infty} = 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \quad (6.13)$$

Remplacez ce profil dans l'équation intégrale (6.5) et intégrez :

$$\tau_0 = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho U_\infty^2 \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \left( 1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2} \right) dy = \frac{2}{15} \rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (6.14)$$

La contrainte de cisaillement du mur est également donnée par

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu U_\infty \frac{2}{\delta} \quad (6.15)$$

Égalez les deux expressions pour  $\tau_0$  ci-dessus pour obtenir

$$\delta d\delta = \frac{15\nu}{U_\infty} dx \quad (6.16)$$

Intégrez ce qui précède avec  $\delta = 0$  à  $x = 0$  et trouvez l'expression pour  $\delta(x)$

$$\delta(x) = 5.48 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (6.17)$$

C'est environ 10% de plus que la solution plus précise de  $5\sqrt{\nu x/U_\infty}$  trouvée en résolvant l'équation de Navier-Stokes.

La contrainte de cisaillement du mur est trouvée en remplaçant l'équation. (6.17) dans l'équation. (6.15) et est

$$\tau_0(x) = 0.365 \rho U_\infty^2 \sqrt{\frac{\nu}{x U_\infty}} \quad (6.18)$$

Le coefficient de frottement cutané local  $c_f$  est souvent intéressant et est

$$c_f(x) = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0.730\sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}} \quad (6.19)$$

Le coefficient de frottement cutané  $C_f$  est une force de traînée sans dimension et est

$$C_f = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} = \frac{\int_0^L \tau_0 dx}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L} = 1.46\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \quad (6.20)$$

Les coefficients les plus précis pour  $\tau_0$ ,  $c_f$  et  $C_f$  sont respectivement 0.332, 0.664 et 1.33, de sorte que l'hypothèse d'un profil de vitesse parabolique pour l'écoulement laminaire de la couche limite comporte une erreur d'environ 10 %.

#### *Couches limites turbulentes*

Pour une couche limite turbulente, nous supposons souvent un profil de vitesse en loi de puissance, comme nous l'avons fait pour l'écoulement dans un tuyau. C'est

$$\frac{\bar{u}}{U_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \quad n = \begin{cases} 7 & \text{Re}_x < 10^7 \\ 8 & 10^7 < \text{Re}_x < 10^8 \\ 9 & 10^8 < \text{Re}_x < 10^9 \end{cases} \quad (6.21)$$

où  $\text{Re}_x = U_\infty x / \nu$ . Remplacez ce profil de vitesse par  $n = 7$  dans l'équation. (6.5) et intégrez pour obtenir

$$\tau_0 = \frac{7}{72}\rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (6.22)$$

Le profil de vitesse selon la loi de puissance donne  $\tau_0 = \mu \partial \bar{u} / \partial y = \infty$  à  $y = 0$ , il ne peut donc pas être utilisé sur le mur. Une deuxième expression pour  $\tau_0$  est nécessaire ; on sélectionne la formule de *Blasius*, donnée par

$$c_f = 0.046\left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \quad \text{giving} \quad \tau_0 = 0.023\rho U_\infty^2 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4} \quad (6.23)$$

Combinez les équations. (6.22) et (6.23) et trouvez

$$\delta^{1/4} d\delta = 0.237\left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{1/4} dx \quad (6.24)$$

Supposons un écoulement turbulent depuis le bord d'attaque (la partie laminaire est souvent assez courte) et intégrons de 0 à  $x$  :

$$\delta = 0.38x \left( \frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{1/5} \quad \text{Re}_x < 10^7 \quad (6.25)$$

Remplacez-le par la formule de Blasius et trouvez que le coefficient de frottement cutané local est

$$c_f = 0.059 \left( \frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{1/5} \quad \text{Re}_x < 10^7 \quad (6.26)$$

Le coefficient de frottement cutané devient

$$C_f = 0.073 \left( \frac{\nu}{U_\infty L} \right)^{1/5} \quad \text{Re}_x < 10^7 \quad (6.27)$$

Les formules ci-dessus peuvent en réalité être utilisées jusqu'au  $Re = 10^8$  sans erreur substantielle.

S'il existe une partie laminaire importante de la couche limite, elle doit être incluse. Si la transition se produit à  $Re_{crit} = 5 \times 10^5$ , alors le coefficient de frottement cutané doit être modifié comme

$$C_f = 0.073 \left( \frac{\nu}{U_\infty L} \right)^{1/5} - 1700 \frac{\nu}{U_\infty L} \quad \text{Re}_x < 10^7 \quad (6.28)$$

Pour une plaque brute,  $Re_{crit} = 3 \times 10^5$  et la constante de 1700 doivent être remplacées par 1060. Les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement peuvent être évaluées à l'aide du profil de vitesse de la loi de puissance à déterminer.

$$\begin{aligned} \delta_d &= 0.048x \left( \frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{1/5} \\ \theta &= 0.037x \left( \frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{1/5} \end{aligned} \quad \text{Re} < 10^7 \quad (6.29)$$

Il existe des quantités supplémentaires souvent utilisées dans l'étude des couches limites turbulentes. Nous présenterons ici deux de ces quantités. L'une est la vitesse de cisaillement définie comme étant

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (6.30)$$

Il s'agit d'une vitesse fictive qui apparaît souvent dans des relations turbulentes entre couches limites. L'autre est l'épaisseur  $\delta_v$  de la couche de paroi visqueuse très fluctuante, représentée sur les figures. 6.12 et 6.13. C'est de cette couche très fine que l'on pense que les sursauts turbulents proviennent. Elle a été reliée à la vitesse de cisaillement à travers des observations expérimentales par

$$\delta_v = \frac{5\nu}{u_\tau} \quad (6.31)$$

### Exemple 6.1

L'air atmosphérique à 20 °C s'écoule à 10 m/s sur une plaque plate lisse et rigide de 2 m de large et 4 m de long alignée avec l'écoulement. Quelle est la longueur de la partie laminaire de la couche limite ? Prédisez la force de traînée sur la partie laminaire d'un côté de la plaque.

#### *Solution :*

En supposant que l'air soit exempt de perturbations de haute intensité, utilisez le nombre critique de Reynolds comme étant  $5 \times 10^5$ , c'est-à-dire :

$$\frac{U_\infty x_T}{\nu} = 5 \times 10^5$$

de sorte que

$$x_T = 5 \times 10^5 \times 1.51 \times 10^{-5} / 10 = 0.755 \text{ m}$$

La force de traînée, en utilisant l'équation (6.20) et un coefficient de 1.33 au lieu de 1.46 (le coefficient de 1.33 est plus précis comme indiqué), est

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{1.33}{2} \rho U_\infty^2 L w \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \\ &= 0.665 \times 1.2 \times 10^2 \times 0.755 \times 2 \times \sqrt{\frac{1.51 \times 10^{-5}}{10 \times 0.755}} = 0.017 \text{ N} \end{aligned}$$

une force plutôt petite.

### Exemple 6.2

L'eau à 20 °C s'écoule sur une plaque plate de 2 m de long et 3 m de large à une vitesse de 12 m/s. Estimez la vitesse de cisaillement, l'épaisseur de la couche de paroi visqueuse et

l'épaisseur de la couche limite à l'extrémité de la plaque (en supposant une couche turbulente à partir du bord d'attaque). Prédisez également la force de traînée sur un côté de la plaque.

**Solution :**

Le nombre de Reynolds est  $Re = U_\infty x / \nu = 12 \times 2 / 10^{-6} = 2.4 \times 10^7$ . Donc, avec  $n = 7$  Eq. (6.26) fournit

$$\tau_0 = \frac{0.059}{2} \rho U_\infty^2 \left( \frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{1/5} = 0.0295 \times 1000 \times 12^2 \times \left( \frac{10^{-6}}{12 \times 2} \right)^{0.2} = 142 \text{ Pa}$$

La vitesse de cisaillement est alors

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{142}{1000}} = 0.377 \text{ m/s}$$

L'épaisseur de la couche de paroi visqueuse est

$$\delta_v = \frac{5\nu}{u_\tau} = \frac{5 \times 10^{-6}}{0.377} = 1.33 \times 10^{-5} \text{ m}$$

L'épaisseur de la couche limite est, en supposant une couche turbulente à partir du bord d'attaque

$$\delta = 0.38x \left( \frac{\nu}{U_\infty x} \right)^{1/5} = 0.38 \times 2 \times \left( \frac{10^{-6}}{12 \times 2} \right)^{0.2} = 0.0254 \text{ m}$$

La force de traînée sur un côté de la plaque est

$$F_D = \frac{0.073}{2} \rho U_\infty^2 L w \left( \frac{\nu}{U_\infty L} \right)^{1/5} \\ = 0.0365 \times 1000 \times 12^2 \times 2 \times 3 \times \left( \frac{10^{-6}}{12 \times 2} \right)^{0.2} = 1050 \text{ N}$$

#### 6.4 Équation différentielle laminaire de couche limite

La solution à flux laminaire donnée dans la Section 6.3 était une solution approximative. Dans cette section, nous présenterons une solution plus précise utilisant l'équation de Navier – Stokes à composante  $x$ . C'est le cas, pour un écoulement plan horizontal (pas de variation  $z$ )

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.32)$$

Nous pouvons simplifier cette équation et obtenir réellement une solution. Tout d'abord, rappelons que la couche limite est très fine, de sorte qu'il n'y a pas de variation de pression normale à la couche limite, c'est-à-dire que la pression dépend uniquement de  $x$  et qu'il s'agit

de la pression au niveau de la paroi provenant de la solution d'écoulement potentiel. Puisque la pression est considérée comme connue, les inconnues de l'équation. (6.32) sont  $u$  et  $v$ . L'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.33)$$

relie également  $u$  et  $v$ . Nous avons donc deux équations et deux inconnues. Considérez les figures 6.2 et 6.3 ;  $u$  passe de 0 à  $U_\infty$  sur la très petite distance  $d$ , ce qui entraîne de très grands gradients dans la direction  $y$ , alors que  $u$  change assez lentement dans la direction  $x$  (en maintenant  $y$  fixe). Par conséquent, nous concluons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.34)$$

L'équation différentielle (6.32) peut alors s'écrire

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.35)$$

Les deux termes d'accélération à gauche sont conservés puisque  $v$  peut être assez petit mais le gradient  $\partial u / \partial y$  est assez grand et donc le produit est conservé. L'équation (6.35) est l'équation de la couche limite de *Prandtl*.

Pour un écoulement sur une plaque plate avec  $dp/dx = 0$ , et en termes de fonction flux  $\psi$  (rappelons que  $u = \partial\psi/\partial y$  et  $v = -\partial\psi/\partial x$ ), Eq. (6.35) prend la forme

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \quad (6.36)$$

Si nous laissons (essais et erreurs et expérience ont été utilisés pour trouver cette transformation)

$$\xi = x \quad \text{et} \quad \eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (6.37)$$

Éq. (6.36) devient

$$-\frac{1}{2\xi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \xi}} \quad (6.38)$$

Cette équation semble plus formidable que l'équation. (6.36), mais si on laisse et remplacez ceci dans l'équation (6.38), il en résulte

$$\psi(\xi, \eta) = \sqrt{U_\infty \nu \xi} F(\eta) \quad (6.39)$$

Cette équation différentielle ordinaire peut être résolue numériquement avec les conditions aux limites appropriées. Ils sont

$$F \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 F}{d\eta^3} = 0 \quad (6.40)$$

qui résultent des composantes de vitesse

$$F = F' = 0 \text{ at } \eta = 0 \quad \text{et} \quad F' = 1 \text{ at large } \eta \quad (6.41)$$

La solution numérique au problème des valeurs limites est présentée dans le tableau 8.5. Les deux dernières colonnes permettent respectivement de calculer  $\nu$  et  $\tau_0$ . Nous avons défini l'épaisseur de la couche limite comme étant l'épaisseur

où  $u = 0.99U_\infty$  et on observe que cela se produit à  $\eta = 5$ , donc, à partir de cette solution numérique

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (6.42)$$

Aussi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty F'' \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (6.43)$$

de sorte que la contrainte de cisaillement du mur pour cette couche limite avec  $dp/dx = 0$  est

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.332 \rho U_\infty \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \quad (6.44)$$

Les coefficients de frottement sont

$$c_f = 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty x}} \quad C_f = 1.33 \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \quad (6.45)$$

et les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement sont (celles-ci nécessitent une intégration numérique)

$$\delta_d = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad \theta = 0.644 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (6.46)$$

**Tableau 6.5** La solution de couche limite laminaire avec  $dp/dx = 0$

$\eta = y\sqrt{U_\infty/\nu x}$	$F$	$F' = u/U_\infty$	$\frac{1}{2}(\eta F' - F)$	$F''$
0	0	0	0	0.3321
1	0.1656	0.3298	0.0821	0.3230
2	0.6500	0.6298	0.3005	0.2668
3	1.397	0.8461	0.5708	0.1614
4	2.306	0.9555	0.7581	0.0642
5	3.283	0.9916	0.8379	0.0159
6	4.280	0.9990	0.8572	0.0024
7	5.279	0.9999	0.8604	0.0002
8	6.279	1.000	0.8605	0.0000

### Exemple 6.3

L'air à 30 °C s'écoule sur une plaque plane de 2 m de large et 4 m de long avec une vitesse de 2 m/s et  $dp/dx = 0$ . À l'extrémité de la plaque, estimez (a) la contrainte de cisaillement du mur, (b) la valeur maximale de  $v$  dans la couche limite, et (c) le débit à travers la couche limite. Supposons un flux laminaire sur toute la longueur.

#### Solution :

Le nombre de Reynolds est  $Re = U_\infty L/\nu = 2 \times 4 / 1.6 \times 10^{-5} = 5 \times 10^5$  donc le flux laminaire est raisonnable.

(a) La contrainte de cisaillement du mur (cela nécessite  $F''$  au mur) à  $x = 4$  m est

$$\tau_0 = 0.332 \rho U_\infty \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} = 0.332 \times 1.164 \times 2 \times \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \times 2}{4}} = 0.00219 \text{ Pa}$$

(b) La valeur maximale de  $v$  nécessite l'utilisation de  $(\eta F' - F)$ . Sa valeur maximale se situe au bord extérieur de la couche limite et est de 0,860. La valeur maximale de  $v$  est

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\eta F' - F) = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \times 2}{4}} \times 0.860 = 0.0012 \text{ m/s}$$

Notez la petite valeur de  $v$  par rapport à  $U_1 = 2 \text{ m/s}$ .

(c) Pour trouver le débit à travers la couche limite, intégrez le  $u(y)$  à  $x = 4 \text{ m}$

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\delta} u \times 2 dy = \int_0^5 U_{\infty} \frac{dF}{d\eta} \times 2 \times \sqrt{\frac{v x}{U_{\infty}}} d\eta \\ &= 2 \times 2 \times \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{-5} \times 4}{2}} \int_0^{3.283} dF = 0.0743 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

# Chapitre 7

## Introduction à la turbulence

### 7.1 Écoulement turbulent dans une conduite

Les nombres de Reynolds pour la plupart des flux d'intérêt dans les conduits dépassent ceux auxquels les flux laminaires cessent d'exister. Si un écoulement part du repos, il passe assez rapidement à un écoulement turbulent. L'objectif de cette section est d'exprimer la distribution des vitesses dans un écoulement turbulent dans une conduite et de déterminer les grandeurs associées à un tel écoulement.

Un écoulement turbulent est un écoulement dans lequel les trois composantes de vitesse sont non nulles et présentent un comportement aléatoire. De plus, il doit y avoir une corrélation entre le caractère aléatoire d'au moins deux des composantes de vitesse ; s'il n'y a pas de corrélation, il s'agit simplement d'un flux fluctuant. Par exemple, une couche limite turbulente existe généralement près de la surface d'un profil aérodynamique, mais l'écoulement à l'extérieur de la couche limite n'est pas qualifié de « turbulent », même s'il existe des fluctuations dans l'écoulement ; c'est le flux gratuit.

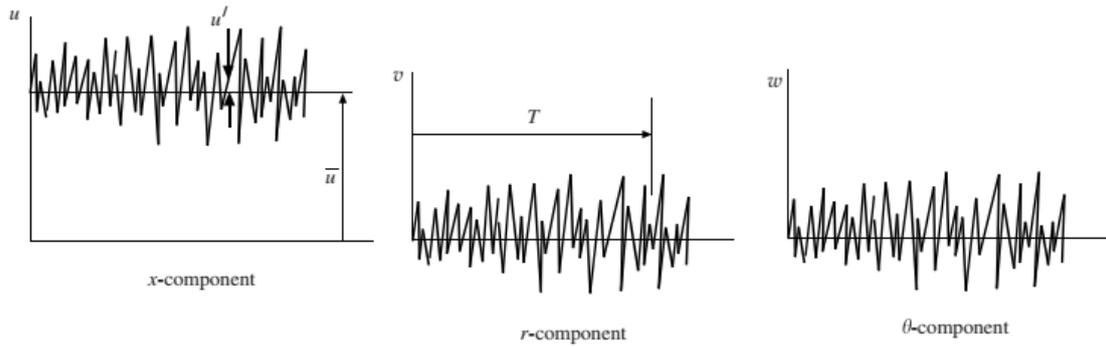
Présentons une manière de décrire un écoulement turbulent. Les trois composantes de la vitesse à un moment donné s'écrivent sous la forme

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad (7.1)$$

où  $\bar{u}$  désigne une partie moyenne dans le temps de la vitesse de la composante  $x$  et  $u'$  désigne la partie aléatoire fluctuante. La moyenne de  $u$  au temps est

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (7.2)$$

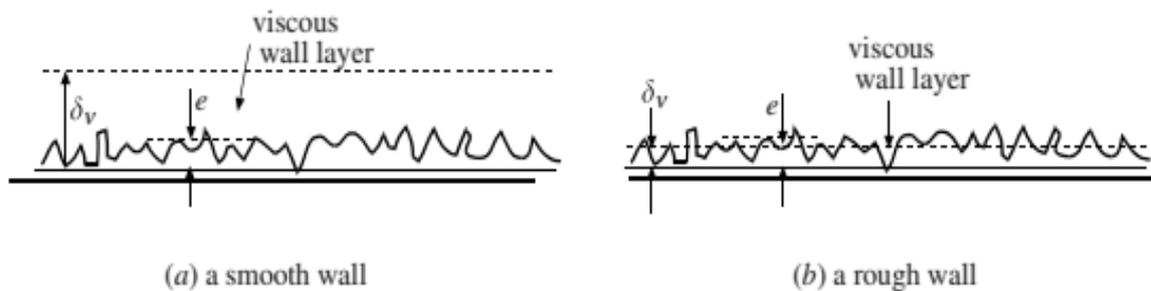
où  $T$  est suffisamment grand par rapport au temps de fluctuation. Pour un écoulement de conduite turbulent développé, les trois composantes de vitesse apparaîtraient comme sur la Figure 7.1. La seule composante moyenne dans le temps serait  $\bar{u}$  dans le sens de l'écoulement. Pourtant, il doit exister une corrélation entre au moins deux des fluctuations aléatoires de vitesse, par exemple  $\overline{u'v'} \neq 0$  ; de telles corrélations de vitesse entraînent un cisaillement turbulent.



**Figure 7.1.** Les trois composantes de vitesse dans un écoulement turbulent en un point où l'écoulement est dans la direction x de sorte que  $\bar{v} = \bar{w} = 0$  et  $\bar{u} \neq 0$

Nous pouvons dériver une équation qui relie  $\overline{u'v'}$  et la composante de vitesse moyenne dans le temps  $\bar{u}$  dans la direction d'écoulement d'un écoulement turbulent, mais nous ne pouvons pas résoudre l'équation même pour le cas le plus simple d'écoulement constant\* dans un tuyau. Nous présenterons donc des données expérimentales pour le profil de vitesse et définirons quelques grandeurs d'intérêt pour un écoulement turbulent dans une conduite.

Tout d'abord, décrivons ce que nous entendons par mur « lisse ». La figure 7.2 représente un mur « lisse » et un mur « rugueux ». La couche de paroi visqueuse est une fine couche proche de la paroi du tuyau dans laquelle les effets visqueux sont importants. Si cette couche visqueuse recouvre les éléments de rugosité du mur, le mur est « lisse », comme sur la figure 7.2(a) ; si les éléments de rugosité dépassent de la couche visqueuse, le mur est « rugueux », comme sur la figure 7.2(b).



**Figure 7.2.** Un mur lisse et un mur brut.

Il existe deux méthodes couramment utilisées pour décrire le profil de vitesse turbulente dans une canalisation. Ceux-ci sont présentés dans les sections suivantes.

## 7.2 Le profil semi-log

Le profil de vitesse moyenne dans le temps dans un tuyau est présenté pour un tuyau lisse sous la forme d'un tracé semi-logarithmique sur la figure 7.3 avec des relations empiriques près de la paroi et de la ligne centrale qui permettent  $\bar{u}(0) = 0$  and  $d\bar{u}/dy = 0$  at  $y = r_0$ . Dans la région des parois, la vitesse caractéristique est la vitesse de cisaillement  $u_\tau = \sqrt{\tau_0/\rho}$  et la longueur caractéristique est la longueur visqueuse  $\nu/u_\tau$ ; les profils sont

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad 0 \leq \frac{u_\tau y}{\nu} \leq 5 \quad (\text{la couche visqueuse de paroi}) \quad (7.3)$$

L'intervalle  $5 < u_\tau y/\nu < 30$  est une zone tampon dans laquelle les données expérimentales ne correspondent à aucune des courbes. Le bord extérieur de la région de la paroi peut être aussi bas que  $u_\tau y/\nu = 3000$  pour un écoulement à faible nombre de Reynolds.

La couche de paroi visqueuse ne joue aucun rôle pour un tuyau rugueux. La longueur caractéristique est la hauteur moyenne de rugosité  $e$  et la région du mur est représentée par

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{y}{e} + 8.5 \quad \frac{y}{r_0} < 0.15 \quad \text{Paroi du tube} \quad (7.4)$$

La région extérieure est indépendante des effets de mur et est donc normalisée pour les murs lisses et rugueux en utilisant le rayon comme longueur caractéristique et est donnée par

$$\frac{u_{\max} - \bar{u}}{u_\tau} = -2.44 \ln \frac{y}{r_0} + 0.8 \quad \frac{y}{r_0} \leq 0.15 \quad \text{la région extérieure} \quad (7.5)$$

Une relation empirique supplémentaire  $h(y/r_0)$  est nécessaire pour compléter le profil de  $y > 0.15r_0$ . La plupart des relations qui satisfont  $d\bar{u}/dy = 0$  à  $y = r_0$  feront l'affaire.

La région murale de la figure 7.4(a) et la région extérieure de la figure 7.4(b) se chevauchent comme indiqué sur la figure 7.4(a).

Pour tuyaux lisses et rugueux respectivement

$$\frac{u_{\max}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{u_\tau r_0}{\nu} + 5.7 \quad \text{tuyaux lisses} \quad (7.6)$$

$$\frac{u_{\max}}{u_\tau} = 2.44 \ln \frac{r_0}{e} + 9.3 \quad \text{tuyaux bruts} \quad (7.7)$$

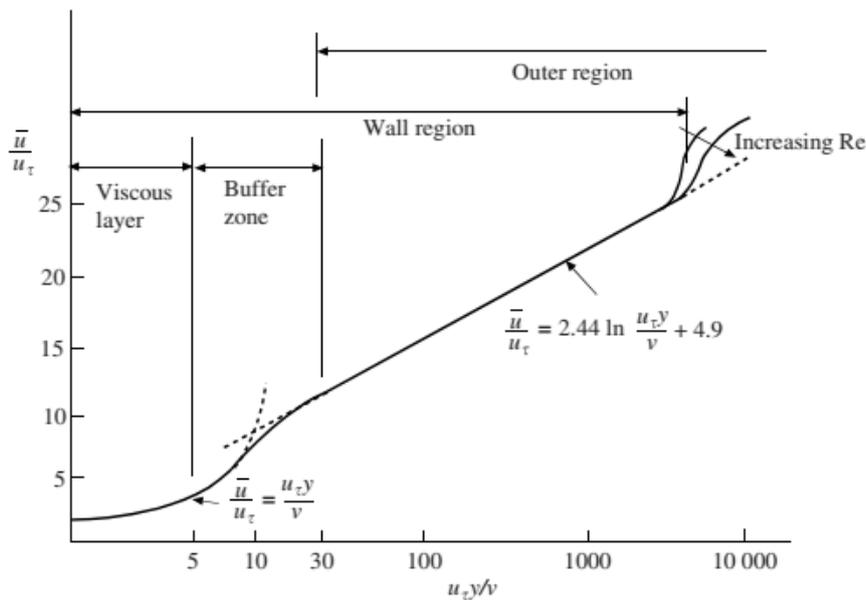
Nous ne désirons pas souvent la vitesse à un endroit particulier, mais si nous le faisons, avant que  $u_{max}$  puisse être trouvé, nous doit être connu. Pour le trouver  $u_\tau$  nous devons connaître  $\tau_0$ . Pour trouver  $\tau_0$ , nous pouvons utiliser (Eq. 7.6)

$$\tau_0 = \frac{r_0 \Delta p}{2L} \quad \text{or} \quad \tau_0 = \frac{1}{8} \rho V^2 f \quad (7.8)$$

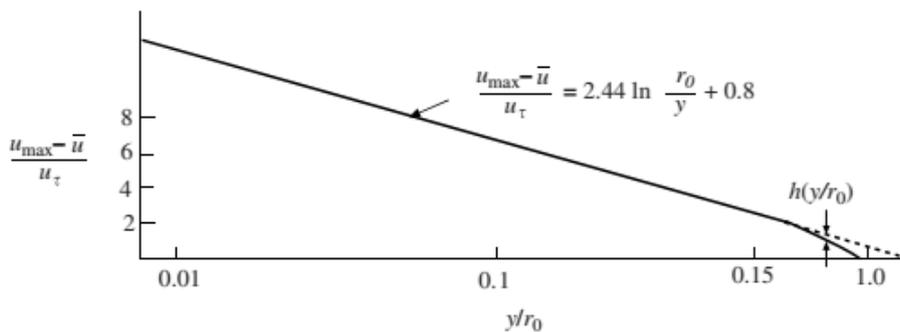
Le facteur de frottement  $f$  peut être estimé à l'aide du profil de loi de puissance qui suit si la chute de pression n'est pas connue.

### 7.3 Le profil de loi de puissance

Une autre approche, bien que moins précise, consiste à utiliser le profil de loi de puissance donné par



(a) La région du mur



(b) La région extérieure

**Figure 7.3.** Données expérimentales pour une paroi lisse dans un écoulement de canalisation développée.

où  $n$  est compris entre 5 et 10, généralement un nombre entier. Ceci peut être intégré pour donner la vitesse moyenne

$$V = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \bar{u}(r) 2\pi r dr = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} u_{\max} \quad (7.9)$$

La valeur de  $n$  dans l'équation (7.8) est lié empiriquement à  $f$  par

$$n = f^{-1/2} \quad (7.10)$$

Pour les tuyaux lisses,  $n$  est lié au nombre de Reynolds, comme indiqué dans le tableau 7.1.

**Tableau 7.1** Exposant  $n$  pour les tuyaux lisses

$Re = VD/\nu$	$4 \times 10^3$	$10^5$	$10^6$	$2 \times 10^6$
$n$	6	7	9	10

Le profil de loi de puissance ne peut pas être utilisé pour estimer le cisaillement du mur car il a une pente infinie au niveau du mur pour toutes les valeurs de  $n$ . Il n'a pas non plus de pente nulle au niveau de l'axe du tuyau, il n'est donc pas valide à proximité de l'axe du tuyau. Il est utilisé pour estimer le flux d'énergie et le flux de quantité de mouvement des écoulements de canalisations.

Enfin, il convient de noter que le facteur de correction de l'énergie cinétique est de 1.03 pour  $n = 7$  ; par conséquent, il est souvent considéré comme une unité pour les écoulements turbulents.

### Exemple 7.1

L'eau à 20°C s'écoule dans un tuyau de 4 cm de diamètre avec un débit de 0.002 m<sup>3</sup>/s. Estimer (a) la contrainte de cisaillement de la paroi, (b) la vitesse maximale, (c) la chute de pression sur 20 m, (d) l'épaisseur de la couche visqueuse, et (e) déterminer si le mur est lisse ou rugueux en supposant que les éléments de rugosité aient une hauteur de 0.0015 mm. Utilisez le profil de loi de puissance.

#### **Solution :**

Premièrement, la vitesse moyenne et le nombre de Reynolds sont

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.002}{\pi 0.02^2} = 1.464 \text{ m/s}, \quad Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.464 \times 0.04}{10^{-6}} = 5.85 \times 10^4$$

(a) Pour trouver la contrainte de cisaillement du mur, trouvons d'abord le facteur de frottement. Dans le tableau 7.1, la valeur  $n = 6.8$  est sélectionnée et dans l'équation (7.10)

$$f = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6.8^2} = 0.0216$$

La contrainte de cisaillement du mur est, voir Eq. (7.75),

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \rho V^2 f = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1.464^2 \times 0.0216 = 23.2 \text{ Pa}$$

(b) La vitesse maximale est trouvée à l'aide de l'équation. (7.9) :

$$u_{\max} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} V = \frac{7.8 \times 14.6}{2 \times 6.8^2} 1.464 = 1.80 \text{ m/s}$$

(c) La chute de pression est

$$\Delta p = \frac{2L\tau_0}{r_0} = \frac{2 \times 20 \times 23.2}{0.02} = 46\,400 \text{ Pa or } 46.4 \text{ kPa}$$

(d) La vitesse de frottement est

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{23.2}{1000}} = 0.152 \text{ m/s}$$

et l'épaisseur de la couche visqueuse est

$$\delta_v = \frac{5\nu}{u_\tau} = \frac{5 \times 10^{-6}}{0.152} = 3.29 \times 10^{-5} \text{ m or } 0.0329 \text{ mm}$$

(e) La hauteur des éléments de rugosité est donnée à 0.0015 mm (tube étiré), ce qui est inférieur à l'épaisseur de la couche visqueuse. Le mur est donc lisse. Remarque : Si la hauteur des éléments muraux était de 0.046 mm (fer forgé), le mur serait brut.

#### 7.4 Pertes dans le débit des canalisations

La perte de charge présente un intérêt considérable dans les écoulements en conduites.

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{or} \quad h_L = \frac{\Delta p}{\gamma} + z_2 - z_1 \quad (7.11)$$

Ainsi, une fois le facteur de frottement connu, la perte de charge et la chute de pression peuvent être déterminées. Le facteur de frottement dépend d'un certain nombre de propriétés du fluide et de la canalisation :

$$f = f(\rho, \mu, V, D, e) \quad (7.12)$$

où la hauteur de rugosité  $e$  représente la turbulence générée par les éléments de rugosité. Une analyse dimensionnelle permet à l'équation. (7.12) s'écrit sous la forme

$$f = f\left(\frac{e}{D}, \frac{VD\rho}{\mu}\right) \quad (7.13)$$

où  $e/D$  est appelé la rugosité relative.

Les données expérimentales ont été collectées et présentées sous la forme du diagramme de Moody, présenté sur la figure 7.4 pour un écoulement développé dans une conduite conventionnelle. Les hauteurs de rugosité sont également incluses dans le diagramme.

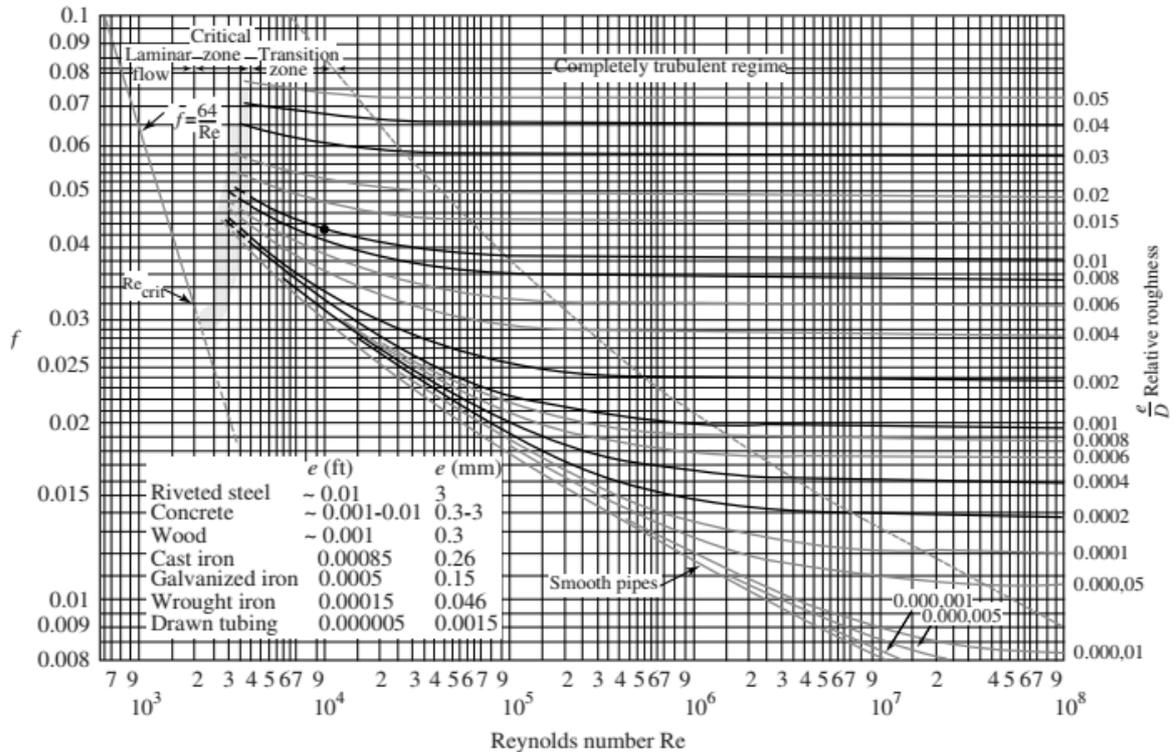
Plusieurs caractéristiques de ce diagramme doivent être soulignées. Ils suivent :

- Un écoulement laminaire existe jusqu'à  $Re \approx 2000$ , après quoi il existe une zone critique dans laquelle l'écoulement subit une transition vers un écoulement turbulent. Cela peut impliquer un écoulement transitoire alternant entre écoulements laminaires et turbulents.
- Le facteur de frottement dans la zone de transition, qui commence à environ  $Re = 4000$  et diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, devient constant à la fin de la zone, comme l'indique la ligne pointillée sur la figure 7.4.
- Le facteur de frottement dans la zone complètement turbulente est constant et dépend de la rugosité relative  $e/D$ . Les effets visqueux, et donc le nombre de Reynolds, n'affectent pas le facteur de frottement.
- La hauteur  $e$  des éléments de rugosité dans le diagramme de Moody concerne les canalisations neuves. Les tuyaux s'encrassent avec l'âge, modifiant à la fois  $e$  et le diamètre  $D$ , ce qui entraîne une augmentation du facteur de friction. Les conceptions des systèmes de tuyauterie doivent tenir compte de ces effets de vieillissement.

Une alternative à l'utilisation du diagramme de Moody consiste à utiliser les formules développées par *Swamee* et *Jain* pour l'écoulement dans les tuyaux ; la formule particulière choisie dépend des informations fournies. Les formules permettant de déterminer les quantités dans les longs tronçons du débit de canalisation développé (ces formules ne sont pas utilisées dans les courtes longueurs ou dans les canalisations comportant de nombreux raccords et changements de géométrie) sont les suivantes :

$$h_L = 1.07 \frac{Q^2 L}{gD^5} \left\{ \ln \left[ \frac{e}{3.7D} + 4.62 \left( \frac{vD}{Q} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \quad \begin{matrix} 10^{-6} < \frac{e}{D} < 10^{-2} \\ 3000 < Re < 3 \times 10^8 \end{matrix} \quad (7.14)$$

$$Q = -0.965 \sqrt{\frac{gD^5 h_L}{L}} \ln \left[ \frac{e}{3.7D} + \left( \frac{3.17v^2 L}{gD^3 h_L} \right)^{0.5} \right] \quad 2000 < Re \quad (7.15)$$



**Figure 7.4.** Le diagramme de Moody.

$$D = 0.66 \left[ e^{1.25} \left( \frac{LQ^2}{gh_L} \right)^{4.75} + vQ^{9.4} \left( \frac{L}{gh_L} \right)^{5.2} \right]^{0.04} \quad \begin{matrix} 10^{-6} < \frac{e}{D} < 10^{-2} \\ 5000 < Re < 3 \times 10^8 \end{matrix} \quad (7.16)$$

Les unités SI ou anglaises peuvent être utilisées dans les équations ci-dessus. Notez également que le diagramme de Moody et les équations ci-dessus sont précis à environ 5%, suffisamment précis pour la plupart des applications d'ingénierie.

### Exemple 7.2

Une chute de pression de 500 kPa est mesurée sur 200 m d'une longueur horizontale de 8 cm de diamètre tuyau en fer transportant de l'eau à 20°C. Estimez le débit en utilisant (a) le diagramme de Moody et (b) une équation alternative.

#### Solution :

(a) La rugosité relative (trouver  $e$  sur la figure 7.4) est

$$\frac{e}{D} = \frac{0.26}{80} = 0.00325$$

En supposant un écoulement complètement turbulent, le facteur de frottement de la figure 7.4 est  $f = 0,026$ . La perte de tête est

$$h_L = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{500\,000}{9800} = 51 \text{ m}$$

La vitesse moyenne, d'après l'équation. (7,79), est

$$V = \sqrt{\frac{2gDh_L}{fL}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 0.08 \times 51}{0.026 \times 200}} = 3.92 \text{ m/s}$$

Nous devons vérifier le nombre de Reynolds pour nous assurer que l'écoulement est complètement turbulent, et c'est

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.92 \times 0.08}{10^{-6}} = 3.14 \times 10^5$$

Ceci est tout simplement acceptable et ne nécessite aucune itération pour améliorer le facteur de friction. Le débit est donc

$$Q = AV = \pi \times 0.04^2 \times 3.92 = 0.0197 \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) Utilisez l'équation alternative qui relie  $Q$  aux autres quantités, c'est-à-dire l'équation (7.15). Nous utilisons la perte de charge de la partie (a) :

$$Q = -0.965 \sqrt{\frac{9.8 \times 0.08^5 \times 51}{200}} \ln \left[ \frac{0.26}{3.7 \times 80} + \left( \frac{3.17 \times 10^{-12} \times 200}{9.8 \times 0.08^3 \times 51} \right)^{0.5} \right] = 0.0193 \text{ m}^3/\text{s}$$

Cette équation était plus facile à utiliser et donnait un résultat acceptable.

### 7.5 Pertes dans les conduits non circulaires

Pour déterminer la perte de charge dans un conduit non circulaire relativement « ouvert », nous utilisons le rayon hydraulique  $R$ , défini comme

$$R = \frac{A}{P} \quad (7.17)$$

où  $A$  est la section transversale et  $P$  est le périmètre mouillé, le périmètre du conduit qui est en contact avec le fluide. Le nombre de Reynolds, la rugosité relative et la perte de charge sont respectivement

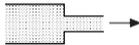
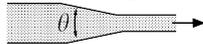
$$\text{Re} = \frac{4VR}{\nu} \quad \text{relative roughness} = \frac{e}{4R} \quad h_L = f \frac{L}{4R} \frac{V^2}{2g} \quad (7.18)$$

Une zone rectangulaire doit avoir un rapport hauteur / largeur de 4. Cette méthode ne doit pas être utilisée avec des formes comme un anneau.

## 7.6 Pertes mineures

Les pertes précédentes concernaient l'écoulement développé dans des conduits longs. Cependant, la plupart des systèmes de tuyauterie incluent des changements soudains tels que des coudes, des vannes, des entrées, etc., qui ajoutent des pertes supplémentaires au système.

**Tableau 7.2** Coefficients de perte mineure  $K$  pour les appareils sélectionnés

Type de raccord	Vissé			À bride		
Diamètre	2.5 cm	5 cm	10 cm	5 cm	10 cm	20 cm
<b>Valeur du globe</b> (entièrement ouvert)	8.2	6.9	5.7	8.5	6.0	5.8
(à moitié ouvert)	20	17	14	21	15	14
(un quart ouvert)	57	48	40	60	42	41
Vanne d'équerre (complètement ouverte)	4.7	2.0	1.0	2.4	2.0	2.0
Clapet anti-retour à battant (entièrement ouvert)	2.9	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0
Vanne (complètement ouverte)	0.24	0.16	0.11	0.35	0.16	0.07
Coude de retour	1.5	0.95	0.64	0.35	0.30	0.25
Té (branche)	1.8	1.4	1.1	0.80	0.64	0.58
Té (ligne)	0.9	0.9	0.9	0.19	0.14	0.10
Coude standard	1.5	0.95	0.64	0.39	0.30	0.26
Coude à balayage long	0.72	0.41	0.23	0.30	0.19	0.15
45° coude	0.32	0.30	0.29			
Entrée à bords carrés			0.5			
Entrée rentrante			0.8			
Entrée bien ronde			0.03			
Sortie de tuyau			1.0			
		Rapport de superficie				
Contraction soudaine		2:1	0.25			
		5:1	0.41			
		10:1	0.46			
		Rapport de superficie $A/A_0$				
Plaque à orifice		1.5:1	0.85			
		2:1	3.4			
		4:1	29			
Contraction générale		(30° angle inclus)	0.02			
		(70° angle inclus)	0.07			

Ces pertes sont appelées pertes mineures et peuvent, en fait, s'additionner pour dépasser la perte de charge trouvée dans les sections précédentes. Ces pertes mineures sont exprimées sous la forme d'un coefficient de perte  $K$ , défini pour la plupart des appareils par

$$h_L = K \frac{V^2}{2g} \quad (7.19)$$

Un certain nombre de coefficients de perte sont inclus dans le tableau 7.2. Il convient de noter que des coefficients de perte relativement faibles sont associés à des contractions progressives, alors que des coefficients relativement élevés sont associés à des élargissements. Cela est dû aux flux séparés lors des élargissements. Des flux séparés et secondaires se produisent également dans les coudes, ce qui entraîne des coefficients de perte relativement importants. Les aubes qui éliminent ces flux séparés ou secondaires peuvent réduire considérablement les pertes, comme indiqué dans le tableau.

Nous assimilons souvent les pertes dans un appareil à une longueur équivalente de tuyau, c'est-à-dire :

$$h_L = K \frac{V^2}{2g} = f \frac{L_e}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (7.20)$$

Cela fournit la relation

$$L_e = K \frac{D}{f} \quad (7.21)$$

Un dernier commentaire relatif aux pertes mineures s'impose : si la conduite est assez longue, 0,1000 de diamètre, les pertes mineures sont généralement négligées. Pour des longueurs aussi courtes que 100 diamètres, les pertes mineures dépassent généralement les pertes par frottement. Pour les longueurs intermédiaires, les pertes mineures doivent être incluses.

### **Exemple 7.3**

Un tuyau en plastique de 1.5 cm de diamètre et 20 m de long transporte l'eau d'un réservoir pressurisé de 400 kPa faire sortir une extrémité ouverte libre située à 3 m au-dessus de la surface de l'eau dans le réservoir. Il y a trois coudes dans la conduite d'eau et une entrée à bords carrés depuis le réservoir. Estimez le débit.

#### **Solution :**

L'équation énergétique s'applique entre le réservoir et la sortie du robinet :

$$0 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + h_L$$

où

$$h_L = \left( f \frac{L}{D} + 3K_{\text{elbow}} + K_{\text{entrance}} \right) \frac{V^2}{2g}$$

Supposons que le tuyau ait  $e/D = 0$  et que  $Re \approx 2 \times 10^5$  de sorte que le diagramme de Moody donne  $f = 0.016$ . L'équation énergétique donne

$$0 = \frac{V_2^2}{2 \times 9.8} - \frac{400\,000}{9800} + 3 + \left( 0.016 \times \frac{20}{0.015} + 3 \times 1.6 + 0.5 \right) \frac{V^2}{2 \times 9.8} \quad \therefore V = 5.18 \text{ m/s}$$

Le nombre de Reynolds est alors  $Re = 5.18 \times 0.15 / 1026 = 7.8 \times 10^4$ . Essayez  $f = 0.018$ . Alors

$$0 = \frac{V_2^2}{2 \times 9.8} - \frac{400\,000}{9800} + 3 + \left( 0.018 \times \frac{20}{0.015} + 3 \times 1.6 + 0.5 \right) \frac{V^2}{2 \times 9.8} \quad \therefore V = 4.95 \text{ m/s}$$

Ainsi  $Re = 4.95 \times 0.15 / 1026 = 7.4 \times 10^4$ . C'est assez proche donc utilisez  $V = 5.0$  m/s. Le débit est :

$$Q = AV = \pi \times 0.0075^2 \times 5 = 8.8 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

## 7.7 Conduites hydrauliques et énergétiques

L'équation de l'énergie est le plus souvent écrite de telle sorte que chaque terme ait des dimensions de longueur, c'est-à-dire

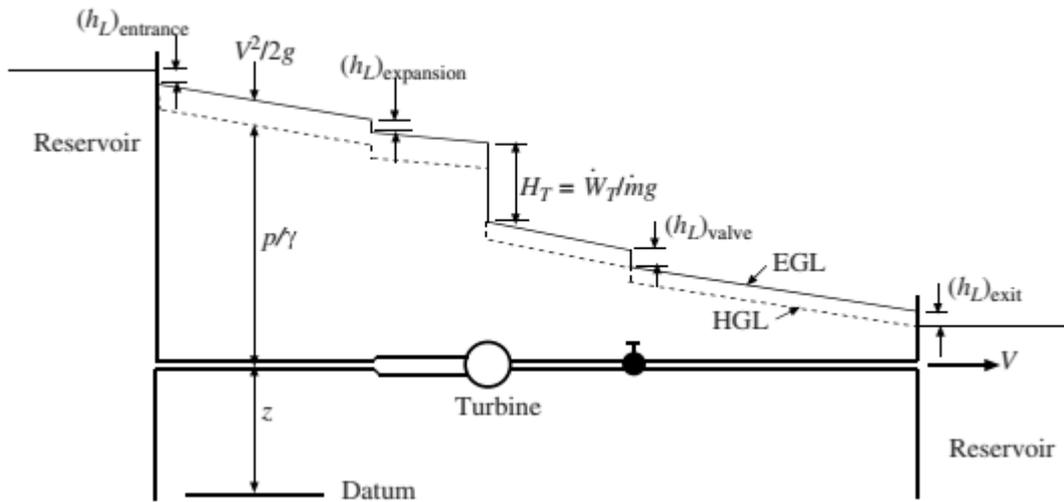
$$-\frac{\dot{W}_S}{\dot{m}g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + z_2 - z_1 + h_L \quad (7.22)$$

Dans les systèmes de tuyauterie, il est souvent conventionnel de faire référence à la conduite de qualité hydraulique (HGL) et à la conduite de qualité énergétique (EGL). Le HGL, la ligne pointillée sur la figure 7.5, est le lieu des points situés à une distance  $p/g$  au-dessus de la ligne médiane d'un tuyau. L'EGL, la ligne continue sur la Figure 7.5, est le lieu des points situés à une distance  $V^2/2g$

au-dessus du HGL. Les observations suivantes concernent le HGL et l'EGL.

- L'EGL se rapproche du HGL lorsque la vitesse tend vers zéro. Ils sont identiques à la surface d'un réservoir.
- L'EGL et le HGL s'inclinent vers le bas dans le sens de l'écoulement en raison des pertes dans la conduite. Plus les pertes sont importantes, plus la pente est importante.

- Une chute soudaine se produit dans l'EGL et le HGL égale à la perte due à un changement soudain de géométrie, comme une entrée, un élargissement ou une valve.
- Un saut se produit dans l'EGL et le HGL dû à une pompe et une baisse due à une turbine.
- Si le HGL est en dessous du tuyau, il y a un vide dans le tuyau, une condition qui est le plus souvent évitée lors de la conception des systèmes de tuyauterie en raison d'une éventuelle contamination.



**Figure 7.5.** Ligne de qualité hydraulique (HGL) et ligne de qualité énergétique (EGL) pour un système de tuyauterie.

## Références Bibliographies

- [1]. B. R. Munson, D. F. Young, T. H. Okiishi, **Fundamentals of Fluid Mechanics**, Fourth Edition, *John Wiley & Sons, Inc.*, 2002, NewYork.
- [2]. G. Currie, **Fundamental Mechanics of Fluids**, Third Edition, Marcedle kkeirn,Inc. 2003, Newyork.
- [3]. H. Yamaguchi, **Engineering Fluid Mechanics**, *Springer*, 2008
- [4]. J. B. Evett, M. S. Liu, **2500 solved problems in Fluid mechanics and hydraulics**, Schaum's solved problems series, *McGraw-Hill, Inc.*, 1979
- [5]. Genick Bar–Meir, **Basics of Fluid Mechanics**, 2011
- [6]. S. K. Som, G. Biswas, **Introduction Fluid mechanics and Fluid Machines**, Second Edition, *Tata McGraw-Hill*, NewDelhi, 2008
- [7]. Y. A. Çengel, J. M. Cimbala, **Fluid Mechanics, Fundamentals and Applications**, *McGraw-Hill*, Boston, 2006
- [8]. M. C. Potter, D. C. Wiggert, **Fluid Mechanics** ,*Schaum's Outline Series McGraw-Hill*, 2008
- [9]. F. M. White, *Fluid Mechanics*, Seventh Edition, *McGraw-Hill*, 2008
- [10]. B. R. Munson, D. F. Young, T. H. Okiishi, W. W. Huebsch, **Fundamentals of Fluid Mechanics**, Sixth Edition, *John Wiley & Sons, Inc.*, 2009, NewYork.
- [11]. G. Hauke, **An Introduction to Fluid Mechanics and Transport Phenomena**, Vol. 86, Springer Science+Business Media, B.V, 2008
- [12]. Genick Bar–Meir, **Basics of Fluid Mechanics**, North Washtenaw Ave Chicago, IL 60645, 2011