République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

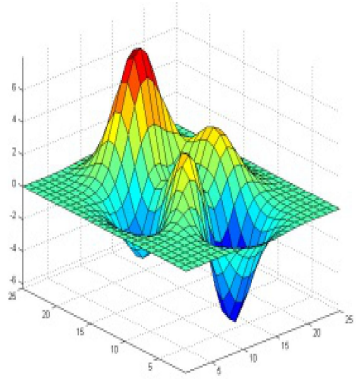
Université Ahmed Ben Yahia El Wancharissi-Tissemsilt

Faculté des Sciences & de la Technologie

Département des Sciences & de la Technologie

Polycopié :

Méthodes numériques
Cours et travaux dirigés

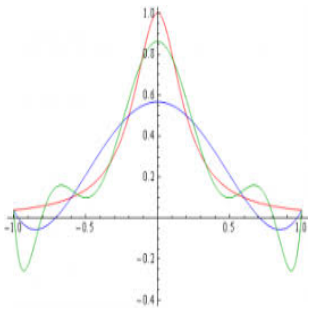


Présenté par :

Dr. Dellal Abdelkader

Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année LMD spécialité :

- *Génie Mécanique*
- *Génie Electrique*
- *Génie Civil*
- *Industries Pétrochimiques*



Algérie 2022

Table des matières

1 Equations non linéaires **6**

1.1 Méthode de dichotomie (ou bisection) 6

1.1.1 Algorithme 7

1.1.2 Estimation de l'erreur 7

1.2 Méthode de Newton 8

1.2.1 Algorithme 9

1.3 Méthode de point fixe 10

1.4 Méthode de Newton-Raphson 12

1.5 Exercices-corrigés 13

1.6 Exercices 17

2 Interpolation polynomiale **18**

2.1 Polynôme de Lagrange 18

2.2 Polynômes de Newton 19

2.3 Exercices 23

3 Approximation des fonctions. **24**

3.1 Approximation des fonctions dans le cas discret 24

3.2 Approximation des fonctions dans le cas continue 26

3.3 Systèmes orthogonaux ou pseudo-Orthogonaux. Approximation par des polynômes orthogonaux. 28

3.4 Système orthogonal et approximation des fonctions 28

3.5 Approximation par des polynômes orthogonaux. 29

3.5.1 Polynômes de Legendre. 29

3.5.2 Polynômes de Tchebychev. 30

3.6 Exercices 32

4 Approximation trigonométrique. **33**

4.1 Définition. Position du problème 33

4.1.1 Détermination des coefficients de la série au moyen des formules de Fourier. 34

4.2 Exemples de développement de fonctions en séries de Fourier 37

4.3 Exercices 39

5 Intégration numérique **41**
5.1 Méthode des rectangles (Formule du point milieu) . . . 42
5.1.1 Calcul de l'erreur . . . 43
5.2 Méthode des Trapèzes . . . 45
5.2.1 Calcul de l'erreur . . . 45
5.3 Méthode de Simpson . . . 46
5.3.1 Calcul de l'erreur . . . 48
5.4 Exercices-corrigés . . . 50
5.5 Exercices . . . 52

6 Equations différentielles ordinaires **54**
6.1 Rappel - solutions d'EDO simples . . . 54
6.1.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre . . . 54
6.1.2 Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants . 56
6.2 Le problème de Cauchy . . . 57
6.3 Méthodes d'Euler . . . 58
6.4 Méthodes Crank-Nicolson . . . 60
6.5 Méthode de Runge-Kutta . . . 62
6.6 Exercices-corrigés . . . 67
6.7 Exercices . . . 71

7 Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires **72**
7.1 Méthode de Cramer . . . 74
7.2 Méthode de matrice inverse . . . 75
7.2.1 Inversion des matrices 2×2 . . . 75
7.2.2 Inversion des matrices 3×3 . . . 76
7.3 Méthode de Gauss (Pivot) . . . 78
7.4 Méthode de factorisation $A = LU$ . . . 78
7.5 Exercices . . . 84

8 Systèmes linéaires et méthodes itératives **85**
8.1 Evaluation d'erreur du processus itératif . . . 86
8.2 Méthode de Jacobi . . . 87
8.3 Gauss-Seidel . . . 88
8.4 Exercices . . . 91

9 Annexe A. Développement limité **92**
9.1 Formules de Taylor . . . 92
9.1.1 Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ . . . 92
9.1.2 Formule de Taylor-Young . . . 93
9.2 Développements limités au voisinage d'un point . . . 94
9.2.1 Définition , existence et unicité . . . 94
9.2.2 DL des fonctions usuelles à l'origine . . . 95
9.2.3 DL des fonctions en un point quelconque . . . 96
9.3 Opérations sur les DL . . . 96

9.3.1 Somme et produit 96
9.3.2 Composition 97
9.3.3 Division 97
9.3.4 Intégration 98
9.4 Applications 99
9.4.1 Calculs de limites 99
9.4.2 Calcul scientifique 99
9.4.3 Calcul d'un extremum local d'une fonction 99

10 Annexe B. Dérivée numérique **101**

Bibliography **102**

Ce polycopié est destiné principalement aux étudiants en deuxième année LMD-Sciences etTechniques, pour leur donner les outils essentiels en tant qu'ingénieur dans un cadre mathématique solide et simple. Les questions classiques du Calcul Scientifique sont abordées : la recherche des zéros ou le calcul d'intégrales de fonctions continues, la résolution de systèmes linéaires, l'approximation de fonctions par des polynômes, la résolution approchée d'équations différentielles.

Chapitre 1

Equations non linéaires

Calculer les zéros d'une fonction f réelle (c'est-à-dire les racines d'une équation $f(x) = 0$) est un problème que l'on rencontre très souvent en Calcul Scientifique. par exemple il n'existe pas de formule explicite donnant les racines d'un polynôme quelconque de degré supérieur à 4. La situation est bien sûr encore plus complexe quand f n'est pas un polynôme.

Pour résoudre le problème, on utilise donc des méthodes itératives : partant d'une ou plusieurs valeurs initiales, on construit une suite de valeurs $x^{(k)}$ qui, converge vers un zéro α de la fonction f considérée.

L'existence des solutions utilisent le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 1.0.1. *(valeurs intermédiaires)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que f est continue sur le segment $[a, b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors f possède une racine dans $]a, b[$

Théorème 1.0.2. *Soit α la racine exacte et x^* la racine approchée de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ de plus $m = \min_{[a,b]} f'(x)$ alors* $|\alpha - x^*| \leq \frac{|f(x^*)|}{m}$.

Le theorème 1.0.2 est une application directe du théorème suivant des accroissements finis

Théorème 1.0.3. *(Accroissements finis)*
Pour toute fonction réelle d'une variable réelle $f : [a, b] \to \mathbb{R}$(a et b réels tels que $a < b$), supposée continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un réel c dans $]a, b[$ vérifiant : . $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

1.1 Méthode de dichotomie (ou bisection)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Nécessairement f a au moins un zéro dans $]a, b[$ (ce résultat est un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires). Supposons pour simplifier qu'il est unique et notons le α

La méthode de dichotomie consiste à diviser en deux un intervalle donné, et à choisir le sousintervalle où f change de signe. Plus précisément, si on note $I^{(0)} =]a, b[$ et $I(k)$ le sous-intervalle retenu à l'étape k, on choisit le sous-intervalle $I^{(k+1)}$ de $I^{(k)}$ pour lequel f a un signe différent à ses deux extrémités. En répétant cette procédure, on est assuré que chaque $I(k)$ ainsi construit contiendra α. La suite $\{x^{(k)}\}$ des milieux des intervalles $I^{(k)}$ convergera vers α puisque la longueur de ces intervalles tend vers zéro quand k tend vers l'infini.

1.1.1 Algorithme

- La méthode est initialisée en posant

$$a^{(0)} = a, b^{(0)} = b, I^{(0)} =]a^{(0)}, b^{(0)}[, x^{(0)} = (a^{(0)} + b^{(0)})/2.$$

- A chaque étape $k \geq 1$, on choisit le sous-intervalle $I^{(k)} =]a^{(k)}, b^{(k)}[$ de $I^{(k-1)} =]a^{(k-1)}, b^{(k-1)}[$ comme suit étant donné $x^{(k-1)} = (a^{(k-1)} + b^{(k-1)})/2$,
  - si $f(x^{(k-1)} = 0$, alors $\alpha = x^{(k-1)}$ et on s' arrête ;
  - sinon,
    - si $f(a^{(k-1)})f(x^{(k-1)}) < 0$ poser $a^{(k)} = a^{(k-1)}, b^{(k)} = x^{(k-1)}$;
    - si $f(x^{(k-1)})f(b^{(k-1)}) < 0$ poser $a^{(k)} = x^{(k-1)}, b^{(k)} = b^{(k-1)}$;
- On définit alors $x^{(k)} = (a^{(k)} + b^{(k)})/2$ et on incrémente k *de* 1.

1.1.2 Estimation de l'erreur

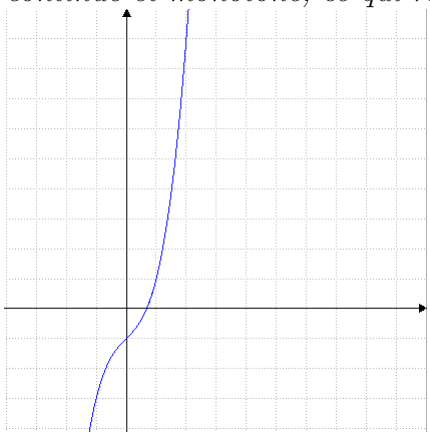
Remarquer que chaque sous-intervalle $I^{(k)}$ contient le zéro α. De plus, la suite $x^{(k)}$ converge nécessairement vers α puisqu'à chaque étape la longueur $|I^{(k)}| = b^{(k)} - a^{(k)}$ de $I^{(k)}$ est divisée par deux. Comme $|I^{(k)}| = (1/2)^k |I^{(0)}|$, l'erreur à l'étape k vérifie

$$|x^{(k)} - \alpha| < \frac{1}{2}|I^{(k)}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(b-a). \tag{1.1.1}$$

Example 1.1.1. *Calculer avec 4 chiffres après la virgule, une racine approchée de l'équation :*

$$f(x) = x^3 + x - 1 = 0$$

Il faut d'abord choisir un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$.
Puisque $f(1)f(0) < 0$, on alors prend $[a, b] = [0, 1]$. En plus dans cet intervalle, la fonction est continue et monotone, ce qui rend la racine unique.



$$a^{(0)} = 0, \quad b^{(0)} = 1, \quad I^{(0)} =]0, 1[, \qquad x^{(0)} = 1/2 = 0,5.$$

$$f(0)f(0,5) > 0$$

donc on pose : $a^{(1)} = 0,5 \quad b^{(1)} = 1\ , \quad I^{(1)} =]0,5,1[, \quad x^{(1)} = (0,5+1)/2 = 0,75$

$$f(0,5)f(0,75) < 0$$

alors on pose : $a^{(2)} = 0,5 \quad b^{(2)} = 0,75\ , \quad I^{(2)} =]0,5,0,75[, \quad x^{(2)} = (0,5+0,75)/2 = 0,625$

$$f(0,5)f(0,625) > 0$$

donc on pose : $a^{(3)} = 0,625 \quad b^{(3)} = 0,75\ , \quad I^{(3)} =]0,625,0,75[, \quad x^{(3)} = (0,625+0,75)/2 = 0,68755$

On continue les calculs, jusqu'à ce que la valeur de $x^{(k)}$ *devienne inchangée à 4 chiffres après la virgule. Le détail du calcul est donné ci-dessous :*

$x^{(0)} = 0,5 \quad x^{(1)} = 0,75 \quad x^{(2)} = 0,625 \quad x^{(3)} = 0,6875 \quad x^{(4)} = 0.6563$

$x^{(5)} = 0,6719 \quad x^{(6)} = 0,6797 \quad x^{(7)} = 0,6836 \quad x^{(8)} = 0,6816 \quad x^{(9)} = 0,6826$

$x^{(10)} = 0,6821 \quad x^{(11)} = 0,6824 \quad x^{(12)} = 0,6823 \quad x^{(13)} = 0,6823$

Estimation de l'erreur :

$$|x^{(13)} - \alpha| < \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \simeq 0,00006104$$

1.2 Méthode de Newton

La seule information utilisée par la méthode de dichotomie est le signe de la fonction f aux extrémités des sous-intervalles. Dans le cas où f est différentiable, on peut construire une méthode plus efficace en exploitant les valeurs de f et de ses dérivées. En partant de l'équation de la tangente à la courbe $(x, f(x))$ au point $x^{(k)}$,

$$y(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

et en faisant comme si $x^{(k+1)}$ vérifiait $y(x^{(k+1)}) = 0$, on obtient

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},\ k \geq 1 \tag{1.2.1}$$

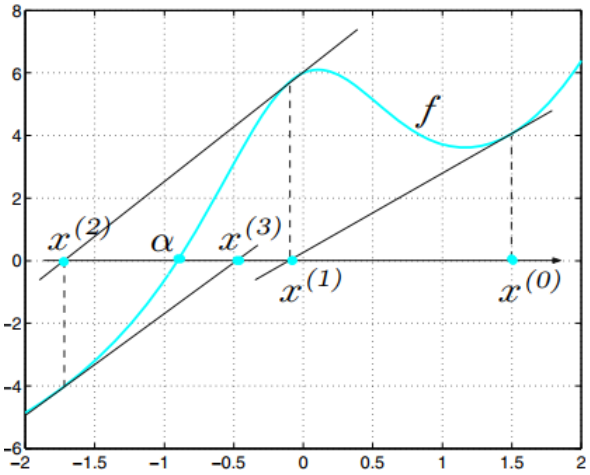


FIGURE 1.1 – Les premières itérations obtenues avec la méthode de Newton

1.2.1 Algorithme

$$\begin{cases} x^0 \text{ Donné : Initialisation} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \\ \text{Critère d'arret, } |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \end{cases}$$

Example 1.2.1. *Soit l'équation*

$$f(x) = x^3 + x - 1 = 0$$

Algorithme

$$\begin{cases} x_0 = 0,5 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 + x_k - 1}{3x_k^2 + 1} \\ \textit{Critère d'arret : 4 chiffres après la virgule} \end{cases}$$

Calcul :

$x_1 = \frac{2\,0.5^3+1}{3\,0.5^2+1} = 0.7143$, $x_2 = \frac{2\,0.7143^3+1}{3\,0.7143^2+1} = 0.6832$, $x_3 = \frac{2\,0.6832^3+1}{3\,0.6832^2+1} = 0.6823$,

$x_4 = 0.6823$

1.3 Méthode de point fixe

Considérant le problème suivant : étant donné une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, trouver $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$\alpha = g(\alpha)$$

Si un tel α existe, on dit que c'est un point fixe de g. La méthode de point-fixe permettent de construire des algorithmes plus rapides que la dichotomie. On ramène l'équation $f(x) = 0$ à une équation équivalente de forme point-fixe

$$g(x) = x$$

Ceci nous permettra d'obtenir une méthode itérative de la forme suivante :

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{Donné : Initialisation} \\ \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \\ \\ \text{Critère d'arret.} \end{cases}$$

Supposons que $g(x)$ continue et continûment différentiable dans un certain voisinage V de α alors

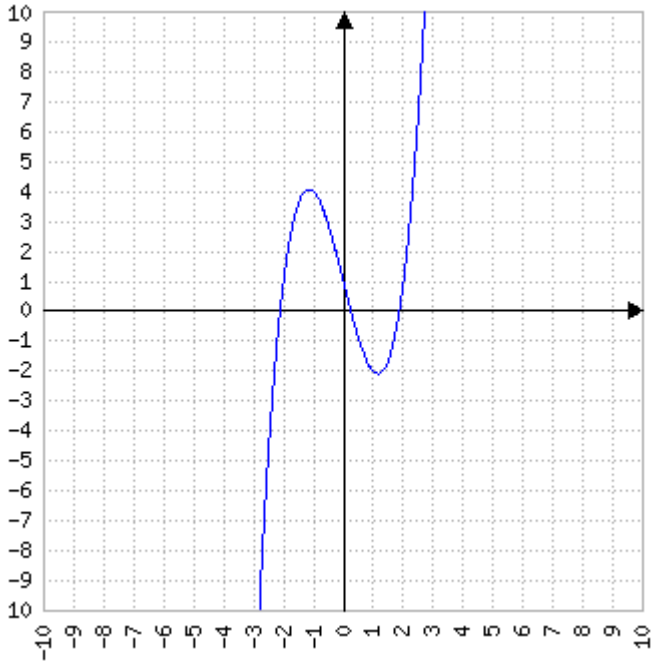
- si, $\forall x \in V \quad |g'(x)| < 1$, la suite converge vers le point fixe
- si, $\forall x \in V \quad |g'(x)| > 1$, la suite ne peut pas converger vers le point fixe
- si $\forall x \in V \quad |g'(x)| = 1$, on ne peut rien conclure : la suite peut converger ou diverger, selon les propriétés de la fonction $g(x)$.

Example 1.3.1. *Appliquons la méthode de point fixe à l'exemple suivant.*

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$$

l'étude de la fonction f nous donne que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 racines : $-2,5 < x_1 < -2, \quad 0 < x_2 < 0,5, \quad 1,5 < x_3 < 2.$

1.3 Méthode de point fixe



Il existe plusieurs façons de réécrire l'équation sous la forme $g(x) = x$. *On écrira, par exemple :*

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(1+x^3), \\ x &= \sqrt[3]{4x-1}, \\ x &= \frac{1}{4-x^2}. \end{aligned}$$

Choisissons par exemple : $g(x) = \frac{1}{4}(x^3+1)$,
alors on a : $g'(x) = \frac{3}{4}x^2$

- $g'(-2) > 1, \quad -2 \in [-2,5 \quad -2]$
- $g'(x) < 1, \quad \forall x \in [0 \quad 0,5]$
- $g'(1,5) > 1, \quad 1,5 \in [1,5 \quad 2]$.

Donc dans l'intervalle $[0 \quad 0,5]$ *la fonction* $g(x) = \frac{1}{4}(x^3+1)$ *a un point fixe,*

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left((x^k)^3 + 1\right)$$

$x_0 =$	0,25
$x_1 =$	0,25391
$x_2 =$	0,25409
$x_3 =$	0,25410
$x_4 =$	0,25410

Pour les autres intervalles on cherche d'autres forme pour $g(x)$

1.4 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est un cas particulier de la méthode du point fixe est parmi les méthodes les plus utilisées pour la résolution des équations non linéaires.

$$\text{Posons : } \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad f'(x) \neq 0.$$

On a la méthode itérative de la forme :

$$\begin{cases} x^0 \quad \text{Donné : Initialisation} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \\ \text{Critère d'arret,} \end{cases}$$

Example 1.4.1. *Appliquons la méthode à l'exemple précédent*

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^3 - 4(x^{(k)}) + 1}{3(x^{(k)})^2 - 4}$$

x^0	=	-2	0	2
x^1	=	-2,125	0,25	1,875
x^2	=	-2,11498	0,25410	1,86098
x^3	=	-2,11491	0,25410	1,86081
x^4	=	-2,11491	0,25410	1,86081
x^5	=	-2,11491	0,25410	1,86081

1.5 Exercices-corrigés

Exercice 1

Soit la fonction $f(x) = \sin \pi x - \pi x \cos \pi x$

1. Calculer $f(1), f(2)$ et montrer qu'il existe une solution unique dans l'intervalle $]1,\ 2[$

   .....

   $f(1) = \sin \pi - \pi \cos \pi = \pi > 0, \quad f(2) = \sin 2\pi - \pi \cos 2\pi = -\pi < 0.$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists \alpha \in]1\ 2[\ \ tq\ \ f(\alpha) = 0$

   et puisque $f'(x) = \pi^2 x \sin \pi x < 0$ sur l'intervalle $]1,\ 2[$ (la fonction f est monotone)
   donc α est unique.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ par la méthode Newton dans l'intervalle $[1,\ 2]$ $(x_0 = 1,5)$ avec un critère d'arret- 3 chiffres après la virgule

   .....

   Solution : on a $\quad f(x) = \sin \pi x - \pi x \cos \pi x, \quad f'(x) = \pi^2 x \sin \pi x;$

$$\begin{cases} x_0 = 1,5, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \dfrac{\sin \pi x_k - \pi x_k \cos \pi x_k}{\pi^2 x_k \sin \pi x_k}, \\ \text{3 chiffres après la virgule .} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 1,5 \\ x_1 &= x_0 - \frac{\sin \pi x_0 - \pi x_0 \cos \pi x_0}{\pi^2 x_0 \sin \pi x_0} = 1,4325 \\ x_2 &= x_1 - \frac{\sin \pi x_1 - \pi x_1 \cos \pi x_1}{\pi^2 x_1 \sin \pi x_1} = 1,4303 \\ x_3 &= x_2 - \frac{\sin \pi x_2 - \pi x_2 \cos \pi x_2}{\pi^2 x_2 \sin \pi x_2} = 1,4303 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \cos^2 x - x$

1. Calculer $f(0), f(1)$ et montrer qu'il existe une solution unique dans l'intervalle $]0,\ 1[$

   .....

Solution :
$f(0) = \frac{1}{2}\cos^2 0 - 0 = \frac{1}{2} > 0, \quad f(0) = \frac{1}{2}\cos^2 1 - 1 < 0.$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists \alpha \in]0\ 1[\ \ tq\ \ f(\alpha) = 0$

et puisque $f'(x) = -\sin x \cos x - 1 < 0$ sur l'intervalle $]0,\ 1[$ (la fonction f est monotone)
donc α est unique.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ par la méthode Newton dans l'intervalle $[0,\ 1]$ $(x_0 = 0,5)$ avec un critère d'arret- 3 chiffres après la virgule
.....

on a $\quad f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x - x, \quad f'(x) = -\sin x \cos x - 1;$

$$\begin{cases} x_0 = 0,5, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k + \dfrac{\frac{1}{2}\cos^2 x_k - x_k}{\sin x_k \cos x_k + 1}, \\ \text{3 chiffres après la virgule .} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,5 \\ x_1 &= x_0 + \frac{\frac{1}{2}\cos^2 x_0 - x_0}{\sin x_0 \cos x_0 + 1} = 0,4191 \\ x_2 &= x_1 + \frac{\frac{1}{2}\cos^2 x_1 - x_1}{\sin x_1 \cos x_1 + 1} = 0,4177 \\ x_3 &= x_2 + \frac{\frac{1}{2}\cos^2 x_2 - x_2}{\sin x_2 \cos x_2 + 1} = 0,4177 \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit la fonction $f(x) = xshx - chx$

1. Calculer $f(1), f(2)$ et montrer qu'il existe une solution unique dans l'intervalle $]1,\ 2[$
.....
$f(1) = sh1 - ch1 < 0, \quad f(2) = 2sh2 - ch2 > 0.$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists \alpha \in]1\ 2[\ \ tq\ \ f(\alpha) = 0$

et puisque $f'(x) = xchx > 0$ sur l'intervalle $]0,\ 1[$ (la fonction f est monotone)
donc α est unique.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ par la méthode Newton dans l'intervalle $[1,\ 2]$ $(x_0 = 1,5)$ avec un critère d'arret- 3 chiffres après la virgule
.....

Solution : on a $f(x) = xshx - chx, \quad f'(x) = xchx;$

$$\begin{cases} x_0 = 0,5, \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \big(\dfrac{x_k shx_k - chx_k}{x_k chx_k}\big), \\ 3 \text{ chiffres après la virgule .} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,5 \\ x_1 &= x_0 - \big(\frac{x_0 shx_0 - chx_0}{x_0 chx_0}\big) = 1,2615 \\ x_2 &= x_1 - \big(\frac{x_1 shx_1 - chx_1}{x_1 chx_1}\big) = 1,2027 \\ x_3 &= x_2 - \big(\frac{x_2 shx_2 - chx_2}{x_2 chx_2}\big) = 1,1997 \\ x_4 &= x_3 - \big(\frac{x_3 shx_3 - chx_3}{x_3 chx_3}\big) = 1,1997 \end{aligned}$$

Exercice 4

Calculer la racine $\sqrt{2}$ par la méthode de Newton avec un critère d'arret de 4 chiffres après la virgule et $x_0 = 1$

Solution : on a $f(x) = x^2 - 2, \quad f'(x) = 2x;$

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{{x_k}^2 - 2}{2x_k}, \\ 4 \text{ chiffres après la virgule .} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= x_0 - \frac{{x_0}^2 - 2}{x_0} = 1 - \frac{1-2}{2} = 1 + 1/2 = 1,5 \\
x_2 &= x_1 - \frac{{x_1}^2 - 2}{x_1} = 1,41667 \\
x_3 &= x_2 - \frac{{x_2}^2 - 2}{x_2} = 1,41422 \\
x_4 &= x_3 - \frac{{x_3}^2 - 2}{x_3} = 1,41421 \\
x_5 &= x_4 - \frac{{x_4}^2 - 2}{x_4} = 1,41421
\end{aligned}
$$

1.6 Exercices

Exercice 5

Calculer une approximation $\sqrt{10}$ à une valeur proche de 10^{-2}, $(f(x) = x^2 - 10)$. En en effectuant une comparison entre les deux méthodes : Dichotomie et Newton.

Exercice 6

Soit une fonction $f(x) = \cos x - x$ dans $[0 \;\; 1]$. Trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$ en appliquant la méthode dichotomie (choisir un ombre d'itération)

Exercice 7

Résoudre l'équation $x^2 - x - 3$ par la méthode du point fixe avec $g(x) = \sqrt{2x + 3}$ et $x_0 = 1$

Exercice 8

Résoudre l'équation $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

Exercice 9

Pour $x^3 = 10$, calculer la racine par la méthode de Newton en effectuant trois itérations, $x_0 = 3$

Chapitre 2

Interpolation polynomiale

Approcher une fonction f consiste à la remplacer par une autre fonction $\tilde{f}$ dont la forme est plus simple et dont on peut se servir à la place de f. On verra dans le prochain chapitre qu'on utilise fréquemment cette stratégie en intégration numérique quand, au lieu de calculer $\int_a^b f(x)dx$, on calcule de manière exacte $\int_a^b \tilde{f}dx$, où $\tilde{f}$ est une fonction simple à intégrer (p.ex. polynomiale).

Dans d'autres contextes, la fonction f peut n'être connue que par les valeurs qu'elle prend en quelques points particuliers. Dans ce cas, on cherche à construire une fonction continue $\tilde{f}$ représentant une loi empirique qui se cacherait derrière les données.

2.1 Polynôme de Lagrange

Théorème 2.1.1. *Pour tout choix de noeuds $x_0, x_1, \cdots, x_n$ dans $[a, b]$, il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n qui coïncide avec f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$ (i. e. $P_n(x_j) = f(x_j)$ pour tout $j = 0, \cdots, n$).*

Ce polynôme s'écrit

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_j(x), \tag{2.1.1}$$

où

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad \text{pour tout } j = 0, \cdots, n.$$

Example 2.1.1. *On donne les points d'appui suivants :* $(1, 3); (2, 6); (6, 8) et (8, 2)$

Ecrire le polynôme de Lagrange et calculer la valeur du polynôme au point $x = 9$

$$P_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j)L_j(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x),$$

$$f(1)L_0(x) = 3\frac{(x-2)(x-6)(x-8)}{(1-2)(1-6)(1-8)} = -\frac{3}{35}(x-2)(x-6)(x-8)$$
$$f(2)L_1(x) = 6\frac{(x-1)(x-6)(x-8)}{(2-1)(2-6)(2-8)} = \frac{1}{4}(x-1)(x-6)(x-8)$$
$$f(6)L_2(x) = 8\frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(6-1)(6-2)(6-8)} = -\frac{1}{5}(x-1)(x-2)(x-8)$$
$$f(8)L_3(x) = 2\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(8-1)(8-2)(8-6)} = \frac{1}{42}(x-1)(x-2)(x-6)$$

Alors

$$P_3(9) = -3$$

2.2 Polynômes de Newton

Construisons la méthode de Newton pas après pas. En commençant avec 1 nœud, puis 2 nœuds, puis n nœud $y(x_i) = y_i$

1. Avec un seul nœud ($n = 0$), x_0 :
   P_0 de degré 0 et $P_0(x_0) = y(x_0)$, donc

   $$P_0(x) = y(x_0) = y_0.$$

2. Avec 2 nœuds ($n = 1$), x_0 et x_1 :
   P_1 de degré inférieur ou égal à 1, nous avons

   $$P_1(x_0) = y(x_0) = y_0, \quad P_1(x_1) = y(x_1) = y_1$$

   Alors on a

   $$P_1(x) = P_0(x) + R_1(x), \quad \text{où} \ \ deg(R_1) \leq 1.$$

   Or $P_1(x_0) = y(x_0) = P_0(x_0)$ donc $R_1(x_0) = 0$
   D'où $R_1(x) = a_1(x - x_0)$.
   De plus $P_1(x_1) = y(x_1) = y(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$, et donc

   $$a_1 = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

   $$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$$

3. Avec 3 nœuds ($n = 2$), x_0, x_1 et x_2 :
   P_2 de degré inférieur ou égal à 2, nous avons

   $$P_2(x_0) = y_0, \quad P_2(x_1) = y_1 \ \ et \ \ P_2(x_2) = y_2.$$

Alors on a

$$P_2(x) = P_1(x) + R_2(x), \quad \text{où } deg(R_2) \leq 2.$$

Or

$$\begin{aligned} P_2(x_0) = &\ y(x_0) = P_1(x_0) \ \ donc \ \ R_2(x_0) = 0 \\ P_2(x_1) = &\ y(x_1) = P_1(x_1) \ \ donc \ \ R_2(x_1) = 0 \end{aligned}$$

D'où $R_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1)$.
De plus $P_2(x_2) = y(x_2) = y_2 = y(x_0) + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$.

En soustrayant l'expression de $P_2(x_2)$ à celle de $P_2(x_1)$, nous obtenons

$$a_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0},$$

En supposant la partition équidistante ($x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$)

$$a_2 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Alors,

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1).$$

4. Avec 4 nœuds ($n = 3$).
   Avec le meme résonement que les cas précédent et en supposant la partition équidistante avec un pas h

$$P_3(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^2}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

tel que

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

On suppose l'intervalle $[a, b]$ diviser en n parties égales c-à-d. on dispose de $(n+1)$ points d'appui : $h = x_{i+1} - x_i, \quad 0 \leq i \leq n$, (une partition équidistante avec un pas h).
On a le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous noeuds $x_0, x_1, \cdots, x_n$ dans $[a, b]$, (une partition équidistante avec un pas h), il existe un unique polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n qui coïncide avec "y" aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$ (i. e. $P_n(x_i) = y(x_i)$ pour tout $i = 0, \cdots, n$).*

Le polynôme de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \\ &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \cdots \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i), \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

où

$$y_i = y(x_i), \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Pour calculer les coefficients $(\Delta^k y_0, \quad 1 \leq k \leq n)$ on procède de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_0 = y_1 - y_0 & & \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 & \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 & \\ \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} & \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} & \cdots \Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 \end{bmatrix}$$

Example 2.2.1.
On donne les points d'appui suivants (x_i, y_i) : $(4, 1)$; $(6, 3)$; $(8, 8)$; $(10, 20)$; $(12, 15)$.

1. *Ecrire le polynôme d'interpolation de Newton correspondant à* f

2. *Calculer* $P_4(11)$

Solution.
On a $h = 2$

et

$$P_4(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \frac{\Delta^4 y_0}{4! h^4}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Tel que

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$			
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		
x_3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	
x_4	y_4	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$.

D'où on a

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
$x_0 = 4$	$y_0 = 1$				
$x_1 = 6$	$y_1 = 3$	$\Delta y_0 = 2$			
$x_2 = 8$	$y_2 = 8$	$\Delta y_1 = 5$	$\Delta^2 y_0 = 3$		
$x_3 = 10$	$y_3 = 20$	$\Delta y_2 = 12$	$\Delta^2 y_1 = 7$	$\Delta^3 y_0 = 4$	
$x_4 = 12$	$y_4 = 15$	$\Delta y_3 = -5$	$\Delta^2 y_2 = -17$	$\Delta^3 y_1 = -24$	$\Delta^4 y_0 = -28$

Donc

$$P_4(x) = x - 3 + \frac{3}{8}(x-4)(x-6) + \frac{1}{12}(x-4)(x-6)(x-8) - \frac{7}{96}(x-4)(x-6)(x-8)(x-10),$$

$P_4(11) = -9,03$

2.3 Exercices

Exercice 10

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Déteminer le polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds 0 et 1.

2. Déterminer le polynôme P_2 d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds $0, 1/2$ et 1. On l'écrira sous forme de Lagrange et sous forme de Newton.

Exercice 11

On donne les points d'appui suivants $(x_i, y_i) : (1, 1);\ \ (3, 3);\ \ (6, 8);\ \ (9, 20)$.

1. Ecrire le polynôme d'interpolation de Newton correspondant à f

2. Calculer $P_3(10)$

Exercice 12

On donne les points d'appui suivants $(x_i, y_i) : (2, 5);\ \ (3, 7);\ \ (6, 8);\ \ (8, 11)\ \ et\ \ (11, 10)$.

1. Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange correspondant à f

2. Calculer $P_4(12)$

Chapitre 3

Approximation des fonctions.

3.1 Approximation des fonctions dans le cas discret

Considérons les données $\{(x_i, y_i), i = 0, \cdots, n\}$ où y_i peut être vue comme la valeur $f(x_i)$ prise par une fonction f au noeud x_i. Pour un entier $m \geq 1$ donné (en général $m \ll n$), on cherche un polynôme $\tilde{f} \in \mathbb{P}_m$ vérifiant l'inégalité

$$\exists \tilde{f} \in \mathbb{P}_m, \quad \forall p_m \in \mathbb{P}_m : \quad \sum_{i=0}^{n} [y_i - \tilde{f}(x_i)]^2 \leq \sum_{i=0}^{n} [y_i - p_m(x_i)]^2, \tag{3.1.1}$$

le polynôme p_m de degré au plus m. $\tilde{f}$ est appelée approximation au sens des moindres carrés dans P_m des données $\{(x_i, y_i), i = 0, \cdots, n\}$. A moins que $m = n$, il n'est en général pas possible d'avoir $\tilde{f}(x_i) = y_i \;\; pour\ tout \;\; i = 0, \cdots, n$.

En posant

$$\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \tag{3.1.2}$$

où les coefficients $a = (a_0, a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ sont inconnus, le problème (3.1.1) peut être reformulé ainsi : trouver $a \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$\phi(a) = \min_{b \in \mathbb{R}^m} \phi(b), \quad b = (b_0, b_1, \cdots, b_m)$$

où

$$\phi(b) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i + \cdots + b_n x_i^m)]^2$$

Résolvons ce problème dans le cas particulier où $m = 1, \quad b = (b_0, b_1)$.

$$\phi(b) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2$$

le graphe de ϕ est un paraboloïde convexe. Le point (a_0, a_1) où ϕ atteint son minimum satisfait les conditions

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0$$

On a

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0} = \sum_{i=0}^{n} 2[y_i - (b_0 + b_1 x_i)]$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial b_1} = \sum_{i=0}^{n} 2[y_i - (b_0 + b_1 x_i)]x_i$$

donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} 2[y_i - (a_0 + a_1 x_i)] = 0$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} 2[y_i - (a_0 + a_1 x_i)]x_i = 0$$

qui est un système de deux équations à deux inconnues a_0 et a_1

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i & = \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

D'où on a

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{D}\left(\sum_{i=0}^{n} y_i \sum_{j=0}^{n} x_j^2 - \sum_{j=0}^{n} x_j \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \right), \\ a_1 = \dfrac{1}{D}\left((n+1) \sum_{i=0}^{n} y_i x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i \sum_{j=0}^{n} x_j \right). \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Tel que $D = (n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2$

Example 3.1.1.
On donne les points d'appui suivants (x_i, y_i) : $(0,1)$; $(1,3)$; $(3,8)$; $(5,2)$.
$n = 3, \quad m = 1$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{3} x_j = 0+1+3+5 = 9, & \sum_{j=0}^{3} x_j^2 = 0+1+9+25 = 35 \\ \sum_{i=0}^{3} y_i = 1+3+8+2 = 14, & \sum_{i=0}^{3} y_i x_i = 0+3+24+10 = 37 \\ D = 4(35) - (9)^2 = 59 \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{59}(14 \times 35 - 9 \times 37) = 157/59, \\ a_1 = \dfrac{1}{59}(4 \times 37 - 14 \times 9) = 22/59. \end{cases}$$

Le polynôme correspondant $\tilde{f}(x) = 157/59 + (22/59)x$ s'appelle la droite des moindres carrés, ou de régression linéaire.

D'une façon général on a le système linéaire $(m+1) \times (m+1)$ symétrique de la forme suivante

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_0 & + & a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i & + & \cdots & + & a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^m & = & \sum_{i=0}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i & + & a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & + & \cdots & + & a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & = & \sum_{i=0}^{n} y_i x_i. \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^m & + & a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} & + & \cdots & + & a_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} & = & \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m. \end{cases}$$

Quand $m = n$, le polynôme des moindres carrés $\tilde{f}$ coïncide avec le polynôme d'interpolation de Lagrange

3.2 Approximation des fonctions dans le cas continue

Soit $f(x)$ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, pour laquelle on cherche un polynôme $\tilde{f} \in \mathbb{P}_m, \quad \tilde{f} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ vérifiant l'inégalité suivante :

$$\int_a^b [f(x) - \tilde{f}(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f(x) - p_m(x)]^2 dx, \tag{3.2.1}$$

pour tout polynôme p_m de degré au plus $m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 1$.

Considérons les quantités :

$$\epsilon(\alpha) = \int_a^b [f(x) - g(x, \alpha)]^2 dx, \quad g(x, \alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m$$

et

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^m} \epsilon(\alpha) = \epsilon(a)$$

Minimiser $\epsilon(\alpha)$ revient à écrire :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha_i} = 0$$
$$0 \leq i \leq m$$

Ou autrement obtient un système d'équations à $m+1$ inconnues $\alpha_i, \quad (i = 0, \cdots, m)$

$$\begin{cases} \int_a^b [f(x) - g(x, \alpha)] \dfrac{\partial g}{\partial \alpha_0} dx & = 0 \\ \int_a^b [f(x) - g(x, \alpha)] \dfrac{\partial g}{\partial \alpha_1} dx & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \int_a^b [f(x) - g(x, \alpha)] \dfrac{\partial g}{\partial \alpha_m} dx & = 0 \end{cases}$$

Example 3.2.1.
On donne la fonction : $y = e^x$ définie sur $[0,1]$ et qu'on désire l'approximer par un polynôme de 1^{er} degré $(m = 1)$.

Soit $g(x,\alpha) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$

Ecrivons la moyenne quadratique :

$$\epsilon(\alpha) = \int_a^b [e^x - (\alpha_0 + \alpha_1 x)]^2 dx$$

En dérivant $\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha_i} = 0\right)_{0 \le i \le 1}$ *on aura :*

$$\begin{cases} \int_0^1 [e^x - \alpha_0 - \alpha_1 x]dx = & e^x - \alpha_0 x - \frac{1}{2}\alpha_1 x^2 \Big]_0^1 & = 0 \\ \int_0^1 [e^x - \alpha_0 - \alpha_1 x]x dx = & (x-1)e^x - \frac{1}{2}\alpha_0 x^2 - \frac{1}{3}\alpha_1 x^3 \Big]_0^1 & = 0 \end{cases}$$

D'où on a

$$\begin{cases} 2\alpha_0 + \alpha_1 = 2e - 2 \\ 3\alpha_0 + 2\alpha_1 = -6 \end{cases}, \quad alors \quad \begin{cases} \alpha_0 = 4e - 10 \simeq 0,873 \\ \alpha_1 = -6e + 18 \simeq 1,690. \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = 0,873 + 1,690x$$

3.3 Systèmes orthogonaux ou pseudo-Orthogonaux. Approximation par des polynômes orthogonaux.

Le produit scalaire de fonctions le plus simple est l'intégrale du produit de ces fonctions, sur un intervalle borné :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

Plus généralement, on peut introduire une fonction poids $W(x)$ dans l'intégrale (sur l'intervalle d'intégration $]a, b[$, W doit être à valeurs finies et strictement positives, et l'intégrale du produit de la fonction poids par un polynôme doit être finie ; les bornes a, b peuvent être infinies) :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b W(x)f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$$

Avec cette définition du produit scalaire, deux fonctions sont orthogonales entre elles si leur produit scalaire est égal à zéro . On introduit alors la norme associée : $||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$; le produit scalaire fait de l'ensemble de toutes les fonctions de norme finie un espace de Hilbert. L'intervalle d'intégration est appelé intervalle d'orthogonalité.

$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$ étant un produit scalaire satisfaisant les propriétés suivantes :

bilinéaire : $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire relativement à chaque argument (l'autre étant fixé);
symétrique : $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$;
définie positive : $\forall f, f \neq 0 \quad \langle f, f\rangle > 0$.

De la même manière que deux vecteurs sont orthogonaux (perpendiculaires) si leur produit scalaire égale zéro, deux fonctions f *et* g définies sur un intervalle $[a, b]$ sont orthogonales entre elles si leur produit scalaire est égal à zéro

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b W(x)f(x)g(x)\ \mathrm{d}x = 0,\ W \text{ est une fonction de pondération}$$

3.4 Système orthogonal et approximation des fonctions

Soit une suite $E_n = \{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ de fonctions définies et continues sur $[a, b]$. On dit que E_n est un système orthogonal si et seulement si

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \int_a^b W(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ \lambda_i & si \quad i = j. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

si $\lambda_i = 1$ le système est orthonormé.
Soit une fonction f definie sur $I = [a, b]$ nous allons donner une approximation de f sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

Les coefficients a_i seront déterminés comme suit d'après (3.4.1) :

$$\int_a^b W(x) f(x) \varphi_i(x) dx = a_i \int_a^b W(x) f(x) \varphi_i^2(x) dx = \lambda_i,$$

aLors on a

$$a_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b W(x) f(x) \varphi_i(x) dx \tag{3.4.2}$$

3.5 Approximation par des polynômes orthogonaux.

Considérons suite de polynômes orthogonaux $\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x)\}$ définis sur un intervalle $I = [a, b]$

3.5.1 Polynômes de Legendre.

Prenons $I = (-1, 1)$ et $W \equiv 1$ Les premiers de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \text{(Relation de récurrence) } P_{k+1}(x) &= \frac{2k+1}{k+1} x P_n(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x), \quad k \geq 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Pour tout entier naturel k et pour tout x, on a

$P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$, en particulier $P_k(-1) = (-1)^k$.

- Les polynômes de Legendre sont orthogonaux

$$\int_{-1}^{1} P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ \dfrac{2}{2i+1} & si \quad i = j. \end{cases}$$

Approximation des fonctions.

Soit une fonction $f(x)$ définie et continue sur $[-1, +1]$, qu'on désire l'approximer par des polynômes de Legendre :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x)$$

d'après (3.4.2) Les coefficients a_i sont déterminés ainsi

$$a_i = \frac{2i+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_i(x)dx$$

Example 3.5.1.
On donne la fonction : $y = e^x$ définie sur $[-1,1]$ et qu'on désire l'approximer par un polynôme de Legendre d'ordre 1 ($n = 1$).

$$e^x = a_0P_0 + a_1P_1$$
$$P_0 = 1$$
$$P_1 = x$$
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = \frac{1}{2}e^x\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e - 1/e) \simeq 1,175$$
$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^x x dx = \frac{3}{2}(x-1)e^x\Big]_{-1}^{1} = 3(1/e) \simeq 1,104$$

Donc, $e^x = 1,175 + 1,104x$.

3.5.2 Polynômes de Tchebychev.

Les polynômes de Tchebychev sont définis comme suit :

$$T_q(x) = \cos\left(q \arccos x\right)$$

La suite T_q est un polynôme orthogonal par rapport à un produit scalaire de fonctions, associé à la fonction poids $W(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$ sur $[-1,1]$
Puis, nous avons

$$\int_{-1}^{+1} T_q(x)T_p(x)\left(1-x^2\right)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \tfrac{\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq p \\ \pi & \text{si } q = p = 0 \\ \pi/2 & \text{si } q = p \neq 0 \end{cases}$$

En effet, pour deux entiers naturels q et p et avec le changement de variable $x = \cos\theta$, il vient $\int_0^{\pi} \cos(q\theta)\cos(p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{+1} T_q(x)T_p(x)\left(1-x^2\right)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$.

La définition classique des polynômes de Tchebychev de première espèce est le plus souvent donnée par la relation de récurrence suivante :

$$T_{q+1}(x) = 2xT_q(x) - T_{q-1}(x), \quad \forall n \geq 1, \text{ avec } T_0 = 1 \text{ et } T_1 = x.$$

- Pour tout entier naturel q, $T_q(1) = 1$
- $T_q(-1) = (-1)^q$
- La parité dépend de q : $T_q(-x) = (-1)^q T_q(x)$
- Quels que soient les entiers naturels p et q,
  $T_q \circ T_p = T_{pq}$ et $2T_pT_q = T_{p+q} + T_{|p-q|}$

Approximation des fonctions.

Soit une fonction $f(x)$ définie et continue sur $[-1, +1]$, qu'on désire l'approximer par des polynômes de Legendre :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x)$$

D'une manière semblable aux cas vus précédemment et d'après (3.4.2) Les coefficients a_i sont déterminés ainsi

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \\ a_m =& \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)T_m(x)dx, \quad m \neq 0 \end{aligned}$$

Example 3.5.2. *Soit la fonction : $y = \sqrt{(x+2)(1-x^2)}$ définie sur $[-1, 1]$ et qu'on désire l'approximer par un polynôme de Legendre d'ordre 1 ($n = 1$).*

On cherche à l'approximer par des polynômes de Tchebychev d'ordre 1 ($n = 1$).

$$\sqrt{(x+2)(1-x^2)} = a_0P_0 + a_1P_1$$
$$P_0 = 1$$
$$P_1 = x$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{(x+2)(1-x^2)}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \simeq 2,004$$
$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{(x+2)(1-x^2)}}{\sqrt{1-x^2}}xdx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}xdx \simeq 31,248$$

Donc, $\sqrt{(x+2)(1-x^2)} = 2,004 + 31,248x.$

3.6 Exercices

Exercice 13

Un fil conducteur électrique, de longueur 10 cm, traversé par un courant électrique chauffe.

On a le tableau suivant (les valeurs de température en 3 points) :

Abscisse (cm) x_i	0	5	10
Température ($°C$) T_i	23	38	22

- Faite une approximation en moindres carrés avec un polynôme de second degré (écrire la température en fonction de la longueur).

Exercice 14

A travers l'étude du développement d'une entreprise en moyen terme
On a le tableau suivant (les valeurs du chiffre d'affaires en 4 années) :

Abscisse (anné) x_i	1	2	3	4
Chiffre d'affaire (million-dinars) y_i	3	4	7	6

-Faite une approximation en moindres carrés avec un polynôme de second degré (Chiffre d'affaires en fonction de l'année).
- Donner des prévisions du chiffre d'affaires pour les 2 années à venire.

Exercice 15

Soient les fonctions suivante définient sur $[-1, 1]$

$$f_1(x) = \arcsin x$$
$$f_2(x) = \arctan x$$
$$f_3(x) = chx$$
$$f_4(x) = shx$$
$$f_5(x) = shx$$

- Faite une approximation par un polynôme de Legendre d'ordre 2 ($n = 2$) a chaque fonction.

Exercice 16

Chapitre 4

Approximation trigonométrique.

Au début du XIXe siècle, Joseph Fourier étudie la propagation de la chaleur et est le premier à décrire son évolution mathématiquement par l'équation de la chaleur. Dans le cas d'une tige, cette équation admet des solutions particulières s'exprimant à l'aide des fonctions trigonométriques sinus et cosinus. L'idée révolutionnaire de Joseph Fourier est que ces fonctions particulières permettent de décomposer n'importe quelle fonction et de décrire ainsi l'évolution de la chaleur dans n'importe quelle situation : c'est la décomposition en série de Fourier, que l'on retrouve pour la résolution de l'équation de la chaleur mais aussi dans les fichiers MP3, dans l'analyse de signaux, dans l'imagerie médicale... Le but de ce cour...

4.1 Définition. Position du problème

On appelle série trigonometrique une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

ou, sous une forme plus compacte,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{4.1.1}$$

Les constantes a_0, a_n *et* $b_n (n = 1, 2, ...)$ sont les coefficients de la série trigonometrique.

Si la série (4.1.1) converge, sa somme est une fonction périodique $f(x)$ de période 2π, étant donné que $\sin nx$ et $\cos nx$ sont des fonctions périodiques de période 2π. De sorte que

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

Posons le problème suivant.
On se donne une fonction périodique $f(x)$ de période 2π. On demande pour quelles conditions imposées à $f(x)$ il existe une série trigonometrique convergeant vers $f(x)$.
Ce problème fera l'objet du présent chapitre.

4.1.1 Détermination des coefficients de la série au moyen des formules de Fourier.

Supposons que la fonction $f(x)$, périodique et de période 2π, puisse être représentée par une série trigonometrique convergeant vers $f(x)$ dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, c'est-à-dire qu'elle soit la somme de cette série :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4.1.2}$$

Supposons que l'intégrale de la fonction du premier membre de cette égalité soit égale à la somme des intégrales des termes de la série (4.1.2). Ceci aura lieu, par exemple, si l'on suppose que la série numérique formée avec les coefficients de la série trigonometrique proposée converge absolument, c'est-à-dire que converge la série numérique positive suivante

$$|\frac{a_0}{2}| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \cdots + |b_n| + |a_n| + \cdots \tag{4.1.3}$$

La série (4.1.3) est alors majorable et peut être intégrée terme à terme de $-\pi$ à π. Profitons-en pour calculer le coefficient a_0. Intégrons les deux membres de l'égalité (4.1.2) de $-\pi$ à π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\ dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\ dx\right).$$

Calculons séparément chaque intégrale du second membre :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\ dx = a_0\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\ dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\ dx = \left.\frac{a_n \sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\ dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\ dx = \left.-\frac{b_n \cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Par conséquent,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = a_0\pi,$$

d'où

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx. \tag{4.1.4}$$

Pour calculer les autres coefficients de la série, nous calculerons préalablement les intégrales auxiliaires suivantes. Si n et k sont des entiers et si $n \neq k$, on a

$$\text{(I)} \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\ dx = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\ dx = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\ dx = 0; \end{cases}$$

et si $n = k$,

$$(\text{II}) \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \ dx = \pi; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx \ dx = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \ dx = \pi; \end{cases}$$

Calculons, par exemple, la première intégrale du groupe (I).
Comme

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x],$$

on a,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \ dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x \ dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x \ dx = 0$$

On obtient d'une manière analogue les autres formules (I) [1]

En ce qui concerne les intégrales (II), elles se calculent directement

On peut calculer maintenant les coefficients a_k et b_k de la série (4.1.2). Pour déterminer a_k, pour $k \neq 0$ donné, multiplions les deux membres de l'égalité (4.1.2) par $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx). \tag{4.1.5}$$

La série du second membre de l'égalité est majorable, étant donné que ses termes ne sont pas supérieurs en valeur absolue aux termes de la série positive convergente (4.1.3). On peut donc l'intégrer terme à terme sur tout segment.

Intégrons l'égalité (4.1.5) de $-\pi$ à π :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \ \ dx =& \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ \ dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \ \ dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \ \ dx\right). \end{aligned}$$

Eu égard aux formules (II) et (I), on voit que toutes les intégrales du second membre s'annulent, excepté celle contenant le coefficient a_k.
Par conséquent,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \ \ dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \pi$$

d'où

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \ \ dx. \tag{4.1.6}$$

1. A l'aide des formules : $\cos nx \sin kx = \frac{1}{2}[\sin(n+k)x - \sin(n-k)x]$, $\sin nx \sin kx = \frac{1}{2}[-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x]$

Multipliant les deux membres de l'égalité (4.1.2) par $\sin kx$ et intégrant de nouveau de $-\pi$ à π , on trouve :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \ \ dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k \pi$$

d'où

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \ \ dx. \tag{4.1.7}$$

Les coefficients définis par les formules (4.1.4), (4.1.6) et (4.1.7) sont appelés les coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$ et la série trigonométrique (4.1.1) formée avec ces coefficients est la série de Fourier de la fonction $f(x)$.

Retournons à présent au problème posé au début de ce paragraphe :
quelles sont les propriétés que doit posséder la fonction $f(x)$ pour que sa série de Fourier converge et que sa somme soit égale aux valeurs de la fonction aux points considérés ?

Nous allons énoncer un théorème donnant les conditions suffisantes pour que la fonction $f(x)$ soit représentable par une série de Fourier.

Définition 4.1.1. *Une fonction $f(x)$ est dite monotone par tranches sur le segment $[a,\ b]$ si l'on peut découper ce segment par des points $x_1, x_2, ...x_{n-1}$ en un nombre fini d'intervalles $(a, x_1), (x_1, x_2)...(x_{n-1}, b)$ de sorte que la fonction soit monotone dans chaque intervalle, c'est-à-dire qu'elle soit ou bien non croissante, ou bien non décroissante.*

Il résulte de la définition que si $f(x)$ est monotone par tranches et bornée sur le segment $[a, b]$, elle ne peut avoir que des points de discontinuité de première espèce [2].

En effet, si $x = c$ est un point de discontinuité pour la fonction $f(x)$, on a, en vertu de la monotonie de la fonction.

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c^+) \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c^-)$$

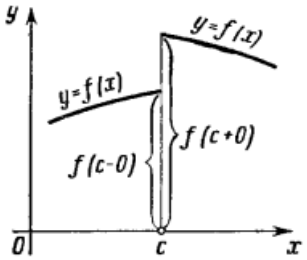


FIGURE 4.1 –

c'est-à-dire que le point c est un point de discontinuité de première espèce (fig. 4.1).

Nous avons le théorème suivant :

2. On dit que c est un point de discontinuité de première espèce si f admet une limite à droite et à gauche en c. Dans le cas contraire, c est dit point de discontinuité de seconde espèce.

Theorem 4.1.1. *Si la fonction périodique $f(x)$ de période 2π est monotone par tranches et bornée sur le segment $[-\pi, \pi]$, sa série de Fourier converge en tous les points. La somme de la série obtenue $s(x)$ est égale à la valeur de la fonction $f(x)$ aux points de continuité. Aux points de discontinuité de $f(x)$, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite ; c'est-à-dire si $x = c$ est un point de discontinuité de $f(x)$,*

$$s(x)_{x=c} = \frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$$

Ce théorème montre que la classe des fonctions représentables par des séries de Fourier est assez large. C'est pourquoi les séries de Fourier ont trouvé une large application dans différentes branches de mathématiques. On utilise particulièrement avec succès les séries de Fourier en physique mathématique et dans ses applications à des problèmes concrets de mécanique et de physique comme on le virra plus tard.

4.2 Exemples de développement de fonctions en séries de Fourier

Donnons des exemples de développement de fonctions en séries de Fourier.

Example 4.2.1. *On se donne une fonction périodique $f(x)$ de période 2π définie comme suit :*

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Cette fonction est monotone par tranches et bornée (fig. 4.2). Elle admet donc un développement en série de Fourier. On trouve en appliquant la formule (4.1.4)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ dx = \frac{1}{\pi}\ \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

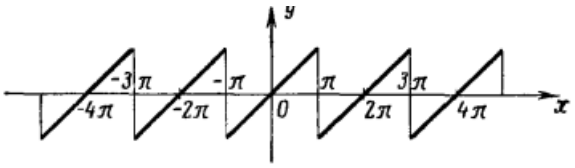


FIGURE 4.2 –

Appliquons la formule (4.1.6) et intégrons par parties :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\ \ dx = \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\right] = 0.$$

On trouve d'après la formule (4.1.7) :

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\ \ dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\right] = (-1)^{n+1}\frac{2}{k}.$$

On obtient ainsi la série

$$f(x) = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots (-1)^{n+1}\frac{\sin kx}{k} \cdots\right]$$

Cette égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire à zéro.

Example 4.2.2. *On se donne une fonction périodique de période* 2π *définie comme suit :*
$f(x) = -x$ *pour* $-\pi \leq x \leq 0$,
$f(x) = x$ *pour* $0 < x \leq \pi$

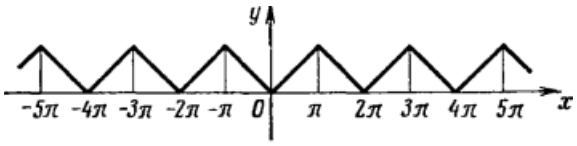


FIGURE 4.3 –

(c'est-à-dire $f(x) = |x|$*) (fig. 4.3). Cette fonction est monotone par tranches et bornée sur le segment* $-\pi \leq x \leq \pi$.

Déterminons ses coefficients de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\ dx + \int_{0}^{\pi} x\ dx\right] = \pi$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos kx\ dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\ dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx + \frac{x\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kx\right] \\
&= \frac{1}{k\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} 0 \ \textit{pour}\ \ k\ \ \textit{pair} \\ \dfrac{-4}{k^2\pi}\ \ \textit{pour}\ \ k\ \ \textit{impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\sin kx\ dx + \int_{0}^{\pi} x\sin kx\ dx\right] = 0.$$

On obtient donc la série

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} \cdots\right]$$

Cette série converge partout et sa somme est égale à la fonction proposée.

4.3 Exercices

Exercice 17

On définit une fonction périodique de période 2π définie comme suit :

$f(x) = -1 \;\; pour \;\; -\pi < x < 0,$
$f(x) = 1 \;\; pour \;\; 0 \leq x \leq \pi$ Cette fonction (fig. 4.4) est monotone par tranches et bornée sur le segment $-\pi \leq x \leq \pi$.

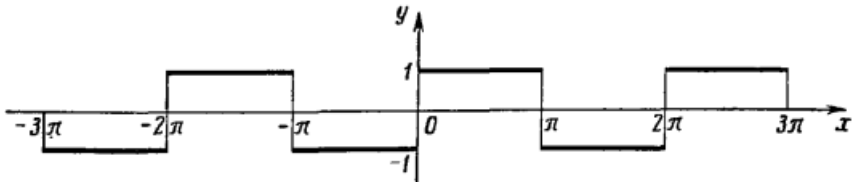


FIGURE 4.4 –

- Calculer ses coefficients de Fourier

Exercice 18

On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit :

$f(x) = x^2 \;\; pour \;\; -\pi \leq x \leq \pi$, (fig. 4.5).

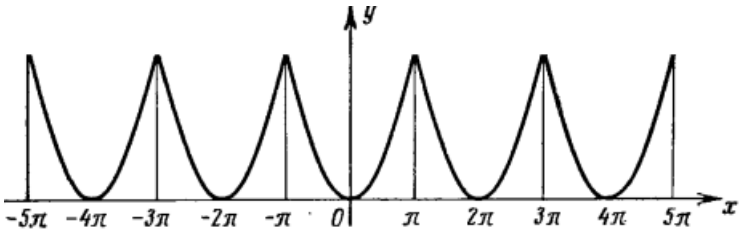


FIGURE 4.5 –

- Calculer ses coefficients de Fourier :

Exercice 19

On définit une fonction périodique de période 2π définie comme suit :

$f(x) = 0 \;\; pour \;\; -\pi < x \leq 0,$
$f(x) = x \;\; pour \;\; 0 < x \leq \pi$ (fig. 4.6).

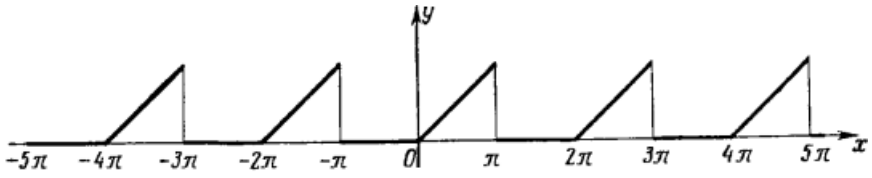


FIGURE 4.6 –

- Définisser les coefficients de Fourier de cette fonction

Chapitre 5

Intégration numérique

Il existe deux situations où l'on a besoin de formules pour approcher l'intégrale d'une fonction :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{5.0.1}$$

- On ne connaît la valeur de que dans certains points $x_0, x_1, \cdots, x_n$, et il n'est pas possible d'avoir d'autres valeurs que celles-ci (c'est le cas quand la fonction est tabulée).

- Il est possible de calculer $f(x)$ pour un x quelconque, mais la primitive de f n'est pas connue (par exemple $f(x) = e^{(\sin x)}$), ou bien l'expression analytique de f est trop compliquée pour être explicitée ($f(x)$ est par exemple le résultat d'un code de calcul trop complexe).

Dans ce chapitre, on va présenter certaines méthodes numériques permettant de calculer d'une façon approchée $I(f)$.
On appelle $J(f)$ la valeur approchée de $I(f)$, pour certaines fonctions, il est impossible d'exprimer la fonction primitive en utilisant les fonctions usuelles (algébriques, trigonométriques, exponentielles,..). C'est le cas par exemple de la fonction $f(x) = e^{(\sin x)}$) . Cette fonction est pourtant intégrable, son graphe est donné par la figure 5.1

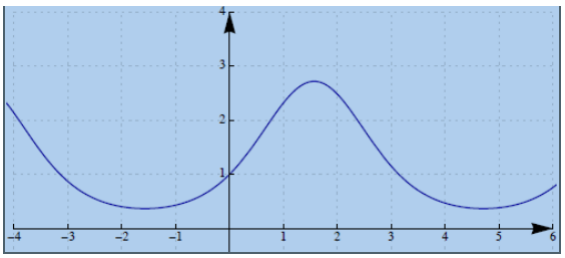


FIGURE 5.1 – Exemple d'une fonction intégrable

Il faut signaler que $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la surface délimitée par les droites $x = a, \quad x = b, \quad y = 0$ et la courbe $f(x)$ (Figure 5.2).

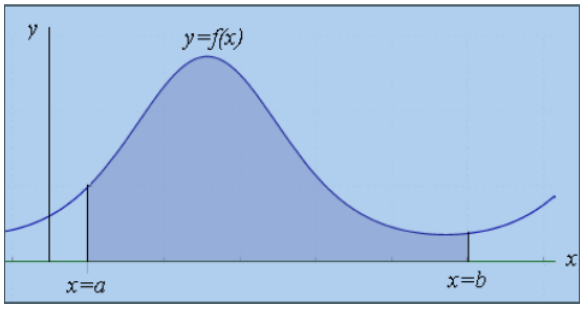


FIGURE 5.2 – Surface délimitée

5.1 Méthode des rectangles (Formule du point milieu)

La méthode des rectangles consiste à :

- diviser l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux. On obtient ainsi $(n + 1)$ points équidistants : On pose :

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1...n \quad avec \quad h = \frac{b-a}{n} \tag{5.1.1}$$

- approximer la surface de chaque "tranche" par un rectangle (Figure 5.3).

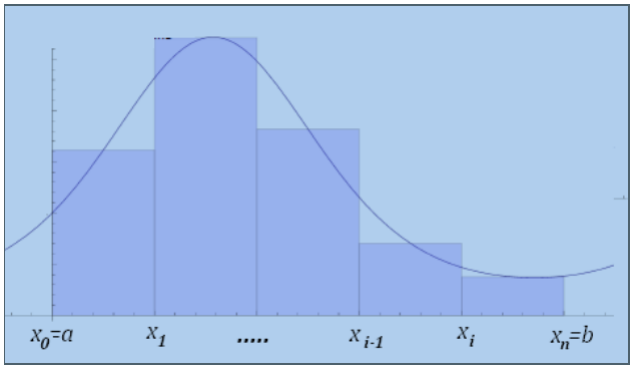


FIGURE 5.3 – Méthode des rectangles

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = (x_{i+1} - x_i)f(\alpha_i) = hf(\alpha_i), \quad \alpha_i \in [x_i \; x_{i+1}]$$

La fonction est donc remplacée par une constante (polynôme de degré 0) sur chaque sous-intervalle. On peut prendre $\alpha_i = x_i$ (point à droite) ou $\alpha_i = x_{i-1}$ (point à gauche), mais la meilleur valeur de $\alpha_i$est celle du point milieu, c'est-à-dire :

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

En additionnant la somme des surfaces de tous les rectangles, on obtient :

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \\ &\simeq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\alpha_i)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \end{aligned}$$

D'où on a l'approxima3tion $J(f)$ de l'integral $I(f)$

$$J(f) = h\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \tag{5.1.2}$$

Dans la figure précédente, on a choisi de construire le rectangle à partir du point milieu de chaque sous-intervalle.

5.1.1 Calcul de l'erreur

On peut montrer que pour la formule des rectangles (point milieu), l'erreur est donnée par :

$$|I(f) - J(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 \tag{5.1.3}$$

$$M_2 = \sup_{x\in[a\ b]} |f''(x)| \tag{5.1.4}$$

Example 5.1.1.

- *Calculer* $\int_0^5 e^{\sin x}\, dx$ *en prenant* $n = 5$ *; Donner une majoration de l'erreur.*

- *Calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de* $0,01$.

Solution : on a $h = \frac{b-a}{n}$, $h = \frac{5-0}{5} = 1$

x_i	$\alpha_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$	$f(\alpha_i)$
$x_0 = a = 0$		
	$\alpha_1 = \frac{x_0+x_1}{2} = 0.5$	1.6151
$x_1 = x_0 + h = 1$		
	$\alpha_2 = \frac{x_1+x_2}{2} = 1.5$	2.7115
$x_2 = x_1 + h = 2$		
	$\alpha_3 = \frac{x_2+x_3}{2} = 2.5$	1.8193
$x_3 = x_2 + h = 3$		
	$\alpha_4 = \frac{x_3+x_4}{2} = 3.5$	0.7041
$x_4 = x_3 + h = 4$		
	$\alpha_5 = \frac{x_4+x_5}{2} = 4.5$	0.3762
$x_5 = x_4 + h = 5 = b$		

1. *D'après la formule (5.1.2)*
   $J(f) = h\sum_{i=1}^{5} f(\alpha_i) = 1(1,6151 + 2,7115 + 1,8193 + 0,704 + 0,3762) = 7,2263$
   $f(x) = e^{\sin x}$, $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$, $f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x)e^{\sin x} = -(\sin^2 x + \sin x - 1)e^{\sin x}$

   Éstimation de l'erreur :

   $|f''(x)| = |\sin^2 x + \sin x - 1||e^{\sin x}| \leq e$ *et* $|f''(\frac{\pi}{2})| = e$
   alors $\sup_{x\in[0\ 5]} |f''(x)| = e$

   d'après (5.1.3),

$$\left| \int_0^5 f(x)dx - h\sum_{i=1}^{5} f(\alpha_i) \right| \leq \frac{(5-0)^3}{24(5)^2} e \leq 0,56631$$

2. *Pour avoir une précision de* $0,01$*, il suffit que* $\frac{(b-a)^3}{24(n)^2} e \leq 0,01$ *; ce qui donne*

$$n \geq \sqrt{\frac{e \cdot (b-a)^3}{24 \times 0,01}} = 37,6; \quad \textit{soit} \quad n = 38$$

5.2 Méthode des Trapèzes

La méthode des Trapèzes consiste à :

- Diviser l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux. On obtient ainsi $(n + 1)$ points équidistants. On pose : $x_i = a + ih, \quad i = 1, 2...n \quad avec \quad h = \frac{b-a}{n}$. avec .
- approximer la surface de chaque "tranche" par un trapèze construit à partir des valeurs de la fonction aux bornes de chaque sous-intervalle (Figure 5.4).

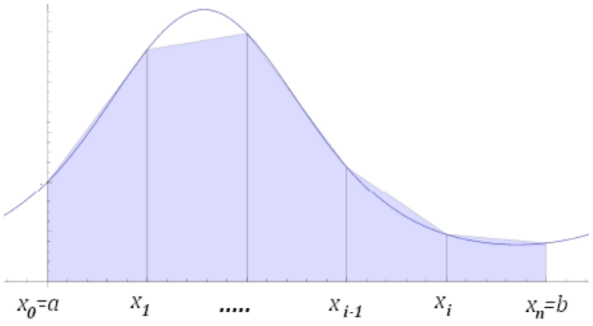


FIGURE 5.4 – Méthode des trapèzes

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

La fonction est donc remplacée par une droite (polynôme de degré 1) sur chaque sousintervalle. En additionnant la somme des surfaces de tous les trapèzes, on obtient :

$$\begin{aligned} I(f) = \int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &\simeq h \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{h}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right) \\ &= \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right) = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \end{aligned}$$

D'où on a l'approximation $J(f)$ de l'integral $I(f)$

$$J(f) = \frac{h}{2} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \tag{5.2.1}$$

5.2.1 Calcul de l'erreur

peut montrer que pour la formule des trapèzes, l'erreur est donnée par :

$$|I(f) - J(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \tag{5.2.2}$$

avec $M_2 = \sup_{x \in [a\ b]} |f''(x)|$

Example 5.2.1.

1. *Calculer* $\int_0^5 e^{\sin x}\,dx$ *en prenant* $n = 5$ *; Donner une majoration de l'erreur.*

2. *Calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de* $0,01$.

$h = \frac{b-a}{n}, \quad h = \frac{5-0}{5} = 1$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 0$	1
$x_1 = x_0 + h = 1$	2.3198
$x_2 = x_1 + h = 2$	2.4826
$x_3 = x_2 + h = 3$	1.1516
$x_4 = x_3 + h = 4$	0.4692
$x_5 = x_4 + h = 5 = b$	0.3833

1. *D'après la formule (5.2.2) des trapèzes, on a :*

$$\begin{aligned} J(f) &= \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(5) + 2\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(0) + f(5)\right) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = 7,1147 \end{aligned}$$

D'après (5.2.2) on a $\left|\int_0^5 f(x)dx - J(f)\right| \leq \frac{(5-0)^3}{12(5)^2}e = 1,1326$

2. *Pour avoir une précision de* $0,01$*, il suffit que :* $\frac{(b-a)^3}{12(n)^2}e \leq 0,01$ *;*
ce qui donne $n \geq \sqrt{\frac{e\cdot(b-a)^3}{12\times 0,01}} = 53,2 \quad$ *soit* $\quad n = 54$

5.3 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à :

- diviser l'intervalle $[a, b]$ en n segments égaux avec un nombre pair ($n = 2m$). On obtient ainsi $(2m + 1)$ points équidistants $x_i = a + ih, \quad i = 0, 1...n \quad avec \quad h = \frac{b-a}{n}$

- approximer la fonction sur chaque "tranche" par une parabole construite à partir de trois points consécutifs (Figure 5.5).

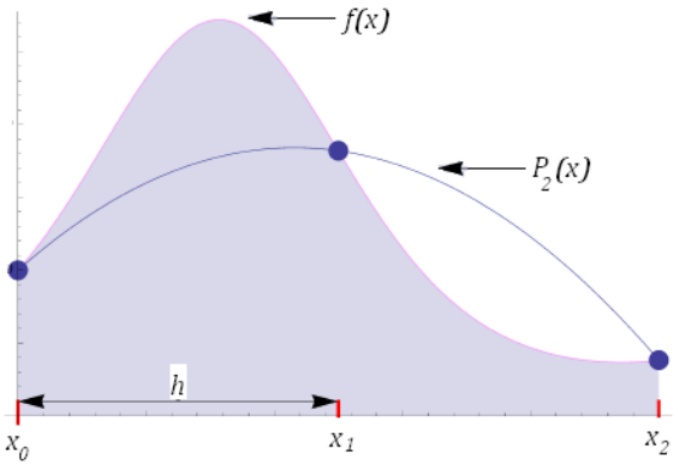


FIGURE 5.5 – Méthode de Simpson

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

Entre x_0 et x_2 et passant par x_1, il y a trois points d'interpolation, on peut donc remplacer la fonction $f(x)$ par un polynôme de degré 2. D'après la forme de Lagrange, ce polynôme s'écrit :

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

avec

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \qquad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \qquad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

On pose $x - x_1 = th$

alors,

$$x - x_2 = (x - x_1) + (x_1 - x_2) = th - h = (t-1)h$$
$$x - x_0 = (x - x_1) + (x_1 - x_0) = th + h = (t+1)h$$

Ce qui donne :

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(t^2 - t), \qquad L_1(x) = 1 - t^2, \qquad L_2(x) = \frac{1}{2}(t^2 + t)$$

donc,

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \frac{f(x_0)}{2}h\int_{-1}^{1}(t^2-t)dt + f(x_1)h\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt + \frac{f(x_2)}{2}h\int_{-1}^{1}(t^2+t)dt$$

Ce qui donne :

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

avec le même raisonnement entre x_2 et x_4 on aura

$$\int_{x_2}^{x_4} P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$$

généralement entre x_{2i-2} et x_{2i} on a :

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right)$$

On pose $x_0 = a, \quad x_{2m} = b$

$$\begin{aligned} J(f) &= \int_a^b P_2(x)dx = \sum_1^m \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_2(x)dx \\ &= \frac{h}{3}\sum_1^m \left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right) \end{aligned}$$

D'où on a l'approximation $J(f)$ de l'integral $I(f)$

$$J(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\underbrace{\sum_1^m f(x_{2i-1})}_{\text{impair}} + 2\underbrace{\sum_1^{m-1} f(x_{2i})}_{\text{pair}} \right) \tag{5.3.1}$$

5.3.1 Calcul de l'erreur

On peut montrer que pour la formule de Simpson, l'erreur est donnée par :

$$|I(f) - J(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \tag{5.3.2}$$

avec $M_4 = \sup_{x\in[a\ b]} |f^{(4)}(x)|$

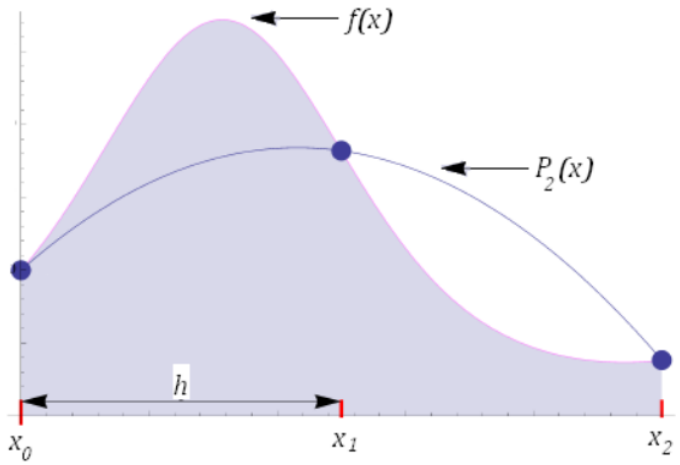
Example 5.3.1.

- *Calculer* $\int_0^5 e^{\sin x}\, dx$ *en partageant l'intervalle* $[0, 5]$ *en 4 segments ; Donner une majoration de l'erreur.*

- *Calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de* $0,01$.

Solution : Pour la méthode de Simpson, le nombre de segments doit être pair, c'est la raison pour laquelle on a pris $n = 4$ *et non pas* $n = 5$ *comme pour les cas précédents.*

$h = \frac{b-a}{n}, \quad h = \frac{5-0}{4} = 1,25; \quad n = 2m = 4$ *ce qui donne* $\quad m = 2$



D'après la formule de Simpson, on a :

$$J(f) = \frac{h}{3}\left(f(0) + f(5) + 4\sum_{1}^{2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{1}^{1} f(x_{2i})\right)$$

$$\begin{aligned} J(f) &= \frac{h}{3}\left(f(0) + f(5) + 4\sum_{1}^{2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{1}^{1} f(x_{2i})\right) \\ &= \frac{1,25}{3}\left(f(0) + f(5) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2)\right) \\ &= \frac{1,25}{3}\left(f(0) + f(5) + 4(f(1,25) + f(3,75)) + 2f(2,5)\right) = 7,3387 \end{aligned}$$

En dérivant 4 fois la fonction $f(x) = e^{\sin x}$ *, on obtient :*

$$f^{(4)}(x) = (\sin^4 x + 6\sin^3 x + 5\sin^2 x - 5\sin x - 3)e^{\sin x}$$

$$|f^{(4)}(x)| = |\sin^4 x + 6\sin^3 x + 5\sin^2 x - 5\sin x - 3||e^{\sin x}| \leq 4e$$

et

$$|f^{(4)}(\frac{\pi}{2})| = 4e$$

alors $M_4 = \sup_{x\in[0\ 5]} |f^{(4)}(x)| = 4e$

D'après (5.3.2) on a $\left|\int_0^5 f(x)dx - J(f)\right| \leq \frac{(5-0)^5}{180(4)^4} M_4 = \frac{(5-0)^5}{180(4)^4} 4e \leq 0,7374$

2- Pour avoir une précision de $0,01$*, il suffit que :* $\frac{(b-a)^5}{180(n)^4} 4e \leq 0,01$ *;*

ce qui donne $n \geq \sqrt[4]{\frac{4e\cdot(b-a)^5}{180\times 0,01}} = 11,7$ *soit* $n = 12$

Rappelons que n doit être pair, le premier entier naturel pair est bien 12.

On remarque bien que la méthode de Simpson est plus précise comparée aux méthodes précédentes.

5.4 Exercices-corrigés

Exercice 20

1. Calculer par la méthode des trapèzes $I = \int_0^3 e^{\sin x}\, dx$ avec $h = 1$
(prendre 3 chiffres après la virgule pour les calculs)
.....

Solution : $n = \frac{b-a}{h} = \frac{3-0}{1} = 3$

$a = x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3 = b$

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2} f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2}[f(0) + f(3) + 2(f(1) + f(2))] \\ &= \frac{1}{2}[1 + 1,152 + 2(2,320 + 2,483)] = \frac{11,756}{2} = 5,878 \end{aligned}$$

Exercice 21

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau :

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$y_i = y(x_i)$	1	3	7	6	2	5

1. Calculer par la méthode des rectangles $I_1 = \int_{0,2}^{1} y(x)\, dx$ avec $h = 0,4$.
(Prendre 3 chiffres après la virgule pour les calculs)

Solution : $n = \frac{1-0,2}{0,4} = \frac{0,8}{0,4} = 2$

$$I_1 \simeq h\sum_{i=1}^{2} y(\alpha_i) = h(y(\alpha_1) + y(\alpha_2))$$

$$x_0 = 0,2; \quad x_1 = 0,6; \quad x_2 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0,2 + 0,6}{2} = 0,4, \quad \alpha_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0,6 + 1}{2} = 0,8$$

$$y(\alpha_1) = y(0,4) = 7, \quad y(\alpha_2) = y(0,8) = 2$$

Alors on a

$$I_1 \simeq 0,4(7 + 2) = 3,6$$

2. Calculer par la méthode des trapèzes $I_2 = \int_0^{0,8} y(x)\ dx$ avec $h = 0,2$

   Solution : $n = \frac{0,8-0}{0,2} = 4$

   $a = x_0 = 0 \qquad x_1 = 0,2 \qquad x_2 = 0,4 \qquad x_3 = 0,6 \qquad x_4 = 0,8 = b$

$$\begin{aligned} I_2 &\simeq \frac{h}{2}[y(a) + y(b) + 2\sum_{i=1}^{3} y(x_i)] \\ &= \frac{0,2}{2}\big[y(0) + y(0,8) + 2[y(0,2) + y(0,4) + y(0,6)]\big] \\ &= 0,1[1 + 2 + 2(3 + 7 + 6)] = 3,5 \end{aligned}$$

Exercice 22

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau :

x_i	0	0,5	1	1,5	2
$y_i = y(x_i)$	1	3	7	6	2

1. Calculer par la méthode des rectangles $I_1 = \int_0^2 y(x)\ dx$ avec $h = 1$. (Prendre 3 chiffres après la virgule pour les calculs)

   Solution : $n = \frac{2-0}{h} = \frac{2}{1} = 2$

$$I_2 \simeq h\sum_{i=1}^{2} y(\alpha_i) = h(y(\alpha_1) + y(\alpha_2))$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$\alpha_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0+1}{2} = 0,5, \quad \alpha_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

$$y(\alpha_1) = y(0,5) = 3, \quad y(\alpha_2) = y(1,5) = 6$$

   Alors on a

$$I_1 \simeq (3 + 6) = 9$$

2. Calculer par la méthode des trapèzes $I_2 = \int_0^2 y(x)\ dx$ avec $h = 1/2$

   Solution : $n = \frac{2-0}{0,5} = 4$

   $a = x_0 = 0 \qquad x_1 = 0,5 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 1,5 \qquad x_4 = 2 = b$

$$\begin{aligned} I_2 &\simeq \frac{h}{2}[y(a) + y(b) + 2\sum_{i=1}^{3} y(x_i)] \\ &= \frac{1}{4}\big[y(0) + y(2) + 2[y(0,5) + y(1) + y(1,5)]\big] \\ &= \frac{1}{4}[1 + 2 + 2(3 + 7 + 6)] = \frac{35}{4} = 8,75 \end{aligned}$$

5.5 Exercices

Exercice 23

En Comparant les trois méthodes :

- Calculer $\int_0^5 e^{\sin x}\, dx$ en prenant $n = 5$; Donner une majoration de l'erreur.
- Calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de $0,01$.

Exercice 24

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$y_i = y(x_i)$	0.6	0.75	1	1.5	3

Calculer par la méthode de Simpson :

- $I_1 = \int_1^5 y(x)\, dx$
- $I_2 = \int_1^2 y(x) e^{1/x}\, dx$

Exercice 25

Calculer par la méthode des trapèzes ($n = 4$), l'intégrale :

$$I = \int_2^4 \frac{1}{\sin x} e^{x^2}\, dx$$

Exercice 26

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau suivant :

x_i	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3
$y_i = y(x_i)$	0.6	0.75	1	1.5	3	5

1. Calculer par la méthode de simpson $I_2 = \int_1^{2,6} y(x)\ dx$
2. Calculer par la méthode des trapèzes $I_1 = \int_{1,4}^{2,6} \frac{1}{x} e^{y(x)}\ dx$

Exercice 27

Soit la fonction $y(x)$ donnée par le tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6
$y_i = y(x_i)$	0.6	0.75	1	1.5	3	5

1. Calculer par la méthode des trapèzes $I_1 = \int_3^5 y(x)\ dx$
2. Calculer par la méthode de Simpson $I_2 = \int_2^4 y(x) e^{\frac{1}{x}}\ \ dx$

Chapitre 6

Equations différentielles ordinaires

Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles (EDP). On dit qu'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles) est d'ordre n si elle implique des dérivées d'ordre au plus n.

Les équations différentielles ordinaires (EDO) apparaissent très souvent dans la modélisation de la physique et des sciences de l'ingénieur. Trouver la solution d'une EDO ou d'un système d'EDO est ainsi un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre ces équations différentielles.

6.1 Rappel - solutions d'EDO simples

Nous rappelons ici les principes de résolution des équations différentielles simples.

6.1.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 6.1.1. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :*

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{6.1.1}$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$

Dans la suite on supposera que a et b sont des fonctions continues sur I .

y'=ay

Theorem 6.1.1.
Soit a un réel. Soit l'équation différentielle

$$y' = ay \tag{6.1.2}$$

Les solutions de (6.1.2), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = ke^{ax}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Example 6.1.1.
Résoudre l'équation différentielle

$$3y' - 5y = 0$$

On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{5}{3}y$. Ses solutions, sur $\mathbb{R}$, sont donc de la forme : $y(x) = ke^{\frac{5}{3}x}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Remark 6.1.1. *L'équation différentielle (6.1.2) admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante k).*

y'=a(x)y

Le théorème suivant affirme que, lorsque a est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$ revient à déterminer une primitive A de a (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Theorem 6.1.2. *Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a. Soit l'équation différentielle :*

$$y' = a(x)y \tag{6.1.3}$$

Les solutions sur I de (6.1.4) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = ke^{A(x)}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Example 6.1.2.
Comment résoudre l'équation différentielle $x^2y' = y$? On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =]-\infty, 0[$. L'équation devient $y' = \frac{1}{x^2}y$. Donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$, dont une primitive est $A(x) = -\frac{1}{x}$. Ainsi les solutions cherchées sont $y(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$, où $k \in \mathbb{R}$.

$y' = a(x)y + b(x)$

Il nous reste le cas général de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre :

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{6.1.4}$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. L'équation homogène associée est :

$$y' = a(x)y \tag{6.1.5}$$

Il suffit d'appliquer le principe de superposition : les solutions de (6.1.4) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (6.1.4) les solutions de (6.1.5). Ce qui donne :

Proposition 6.1.3. *si y_0 est une solution de (6.1.4), alors les solutions de (6.1.4) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définies par :*

$$y(x) = ke^{A(x)} + y_0(x) \quad avec \quad k \in \mathbb{R}$$

où $x \mapsto A(x)$ est une primitive de $x \mapsto a(x)$.

La recherche de la solution générale de (6.1.4) se réduit donc à la recherche d'une solution particulière. Parfois ceci se fait en remarquant une solution évidente. Par exemple, l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$ a pour solution particulière $y_0(x) = -2$; donc l'ensemble des solutions de cette équation sont les $y(x) = -2 + kex^2$, où $k \in \mathbb{R}$.

6.1.2 Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Définition

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{6.1.6}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I. L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{6.1.7}$$

est appelée l'équation homogène associée à (6.1.6).

Équation homogène

On cherche une solution de (6.1.7) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy = 0 \\ \Leftrightarrow & (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ \Leftrightarrow & ar^2 + br + c = 0 \end{aligned}$$

Définition 6.1.2. *L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (6.1.7).*

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (6.1.7).

Theorem 6.1.4.

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (6.1.7) sont les*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad où \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (6.1.7) sont*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}, \quad où \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (6.1.7) sont les*

$$y(x) = (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)e^{\alpha x}, \quad où \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Example 6.1.3.

1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - y' - 2y = 0$ L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui s'écrit aussi $(r + 1)(r - 2) = 0$ ($\Delta > 0$).D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

2. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''-4y'+4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2-4r+4 = 0$, soit $(r - 2)^2 = 0$ ($\Delta = 0$). D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

3. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''-2y'+5y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2-2r+5 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$ ($\Delta < 0$). D'où, pour tout $y(x) = (\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)e^x$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

6.2 Le problème de Cauchy

On considérera par conséquent des problèmes, dits de Cauchy, de la forme suivante : trouver $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.2.1}$$

où $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et y' est la dérivée de y par rapport à t. Enfin, t_0 est un point de I et y_0 une valeur appelée donnée initiale.

Si la fonction $f(t, y)$ est continue et si elle vérifie la condition de Lipschitz suivante :

$$\exists L > 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{6.2.2}$$

alors le problème admet une solution unique pour toute valeur initiale.

Malheureusement, on ne peut expliciter les solutions que pour des équations différentielles ordinaires très particulières. Dans certains cas, on ne peut exprimer la solution que sous forme implicite.
Par exemple, la solution de $y' = (y - t)/(y + t)$ vérifie la relation implicite

$$\frac{1}{2} \ln(t^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{t} = C,$$

où C est une constante. Dans d'autres cas, on ne parvient même pas à représenter la solution sous forme implicite.

Pour ces raisons, on cherche des méthodes numériques capables d'approcher la solution de toutes les équations différentielles qui admettent une solution.

6.3 Méthodes d'Euler

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \tag{6.3.1}$$

Pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$, on utilise les méthodes d'intégration décrites dans le chapitre précédent.

En choisissant la méthode des rectangles (point à gauche), on obtient :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = hf(t_n, y(t_n))$$

D'où on a

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{6.3.2}$$

tq

$$y(t_{n+1}) = y_{n+1}, \quad y(t_n) = y_n$$

On obtient le schéma d'Euler explicite, ce schéma est d'ordre 1, car on a remplacé, la fonction par une Constante (polynôme de degré 0)

En utilisant toujours la méthode des rectangles mais en choisissant le point milieu

$$\frac{t_n + t_{n+1}}{2} = t_n + \frac{h}{2}$$

On obtient

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2})\right) \tag{6.3.3}$$

$y(t_n + \frac{h}{2})$ est calculé à l'aide du schéma d'Euler explicite :

$$y(t_n + \frac{h}{2}) = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n) = y_n + \frac{k_n}{2}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} k_n = hf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_n}{2}\right) \end{cases} \tag{6.3.4}$$

On obtient le "Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2", appelé aussi "Schéma du point milieu". C'est un schéma explicite d'ordre 2.

Example 6.3.1.

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - t + 2, \quad \forall t \in [0,1], \quad soit \quad h = 0,1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme de la méthode d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad avec \quad y_0 = 2$$

$$\begin{aligned} t_1 = 0,1; \quad y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(y_0 - t_0 + 2) \\ &= 2 + 0,1(2 - 0 + 2) = 2,4 \end{aligned}$$

Et ainsi de suite...

t_0	=	0	y_0	=	2
t_1	=	0,1	y_1	=	2,4
t_2	=	0,2	y_2	=	2,83
t_3	=	0,3	y_3	=	3,293
t_4	=	0,4	y_4	=	3,7923
t_5	=	0,5	y_5	=	4,33153
t_6	=	0,6	y_6	=	4,91468
t_7	=	0,7	y_7	=	5,54615
t_8	=	0,8	y_8	=	6,23077
t_9	=	0,9	y_9	=	6,97384
t_{10}	=	1	y_{10}	=	7,78123

Reprenons le problème proposé en utilisant le Schéma de Runge-Kutta

$$\begin{cases} k_n = hf(t_n, y_n), \quad avec \quad y_0 = 2 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{k_n}{2}) \quad tq \quad f(t,y) = y - t + 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(t_0, y_0) = 0,1f(0,2) \\ &= 0,2(2 - 0 + 2) = 0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_0}{2}) \\ &= 2 + 0,1f(0,05; 2,2) = 2 + 0,1(2,2 - 0,05 + 2)) = 2,415 \end{aligned}$$

Et ainsi de suite...

h	=	0,1

t_0	=	0
t_1	=	0,1
t_2	=	0,2
t_3	=	0,3
t_4	=	0,4
t_5	=	0,5
t_6	=	0,6
t_7	=	0,7
t_8	=	0,8
t_9	=	0,9
t_{10}	=	1

y_0	=	2
y_1	=	2,4150
y_2	=	2,8631
y_3	=	3,3477
y_4	=	3,8727
y_5	=	4,4423
y_6	=	5,0613
y_7	=	5,7347
y_8	=	6,4684
y_9	=	7,2685
y_{10}	=	8,1054

k_0	=	0,4
k_1	=	0,4315
k_2	=	0,4663
k_3	=	0,5048
k_4	=	0,5473
k_5	=	0,5942
k_6	=	0,6461
k_7	=	0,7035
k_8	=	0,7668
k_9	=	0,8369

6.4 Méthodes Crank-Nicolson

On a :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

En utilisant la méthode des trapèzes, on obtient :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \frac{h}{2}\left[f\,(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

tq

$$y(t_{n+1}) = y_{n+1}, \quad y(t_n) = y_n$$

D'où on a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\,(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \tag{6.4.1}$$

On obtient le schéma de Crank-Nicolson, c'est un schéma d'ordre 2.

Le schéma de Crank-Nicholson est implicite car le calcul de la nouvelle valeur y_{n+1} nécessite la résolution d'une équation algébrique.

Si l'on veut obtenir une méthode explicite du même ordre, on peut procéder de la manière suivante :

$$\begin{cases} y^*_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f\,(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1})\right]. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

On obtient le "Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2", appelé aussi "Schéma d'Euler modifié". C'est un schéma explicite d'ordre 2. Ce schéma est différent de celui du point milieu mais il est très proche.

Example 6.4.1.

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - t + 2, \quad \forall t \in [0,1], \quad soit \quad h = 0,1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

En utilisant la méthodes Crank-Nicolson

$$\begin{cases} y^*_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad avec \quad y_0 = 2 \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f\,(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1})\right] \quad tq \quad f(t,y) = y - t + 2. \end{cases}$$

$$y^*_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 2 + 01(2 - 0 + 2) = 2,4$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, y^*_1)\right] \\ &= 2 + \frac{0,1}{2}\left[(2 - 0 + 2) + (2,4 - 0,1 + 2)\right] = 2,415 \end{aligned}$$

Et ainsi de suite...

h	=	0,1

t_0	=	0
t_1	=	0,1
t_2	=	0,2
t_3	=	0,3
t_4	=	0,4
t_5	=	0,5
t_6	=	0,6
t_7	=	0,7
t_8	=	0,8
t_9	=	0,9
t_{10}	=	1

$*y_1$	=	2,4
$*y_2$	=	2,8
$*y_3$	=	3,3
$*y_4$	=	3,9
$*y_5$	=	4,4
$*y_6$	=	5,0
$*y_7$	=	5,7
$*y_8$	=	6,4
$*y_9$	=	7,2
$*y_{10}$	=	8,1

y_0	=	2
y_1	=	2,4150
y_2	=	2,8631
y_3	=	3,3477
y_4	=	3,8727
y_5	=	4,4423
y_6	=	5,0613
y_7	=	5,7347
y_8	=	6,4684
y_9	=	7,2685
y_{10}	=	8,1422

Remarquons que la solution analytique de ce problème est la suivante :

$$y(t) = 3e^t + t - 1$$

6.5 Méthode de Runge-Kutta

Soit donnée l'équation différentielle

$$y' = f(t, y). \tag{6.5.1}$$

On demande de trouver la solution de cette équation satisfaisant aux conditions initiales :

$$y = y_0 \quad pour \quad t = t_0. \tag{6.5.2}$$

Considérons le domaine D du plan tOy (fig. 6.1) où A et B sont des nombres positifs donnés. Supposons qu'en chaque point $M(t, y)$ du domaine D pour un h

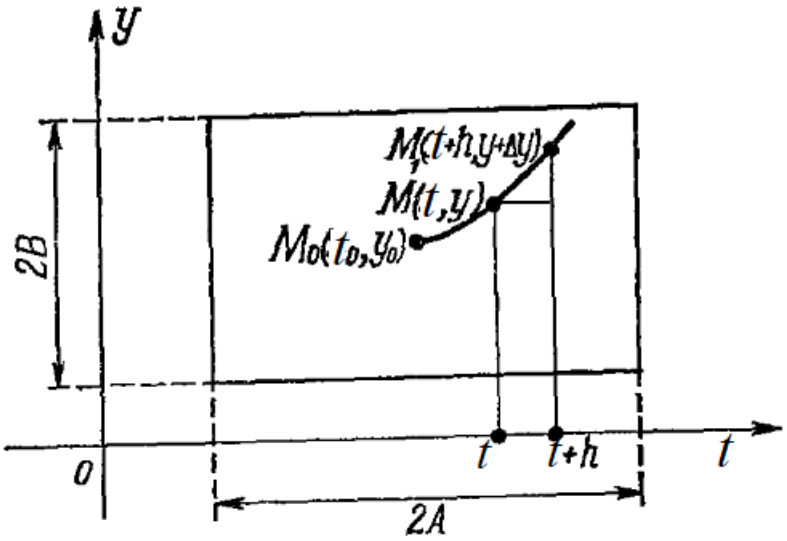


FIGURE 6.1 –

donné la solution de l'équation (6.5.1) puisse être développée d'après la formule de Taylor jusqu'aux membres d'ordre h^4 inclus.

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{1}y'(t) + \frac{h^2}{2!}y''(t) + \frac{h^3}{3!}y'''(t) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(t) + \lambda h^5, \tag{6.5.3}$$

où λ est une quantité bornée dans le domaine$D$.

$|\lambda| < C$ où C ne dépend pas de t, y, h. (Nous n'allons pas étudier les conditions auxquelles doit satisfaire $f(t, y)$ pour que ce développement soit possible). En posant

$$\Delta y = y(t+h) - y(t) \tag{6.5.4}$$

la formule (6.5.3) s'écrit sous la forme :

$$\Delta y = \frac{h}{1}y'(t) + \frac{h^2}{2!}y''(t) + \frac{h^3}{3!}y'''(t) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(t) + \lambda h^5, \tag{6.5.5}$$

Par conséquent, si on connaît la valeur $y(t)$ au point t et les dérivées jusqu'au 4-ième ordre inclus (les dérivées $y'(t), y''(t), y'''(t), y^{(4)}(t)$ peuvent être tirées de l'équation (6.5.1)), on peut déterminer Δy puis $y(t+h)$. Toutefois il est plus commode de calculer Δy par une autre méthode : la méthode de Runge-Kutta exposée ci-dessous. Donnons-nous les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t, y), \\ k_2 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(t + \frac{h}{2}, \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(t + h, k_3). \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

On peut alors montrer aux termes en h^4 près, que le Δy donné par la formule (6.5.4) coïncide avec le Δy donné par la formule suivante :

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{6.5.7}$$

Indiquons comment a été obtenue cette équation sans nous livrer à tous les calculs.
De l'équation (6.5.1) nous tirons :

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \\ y'' &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}f(t, y) \\ y''' &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

De la même manière nous trouvons $y^{(4)}$. En substituant ces expressions dans l'égalité ((6.5.5)) (λh^5 est négligé), on trouve Δy exprimé en fonction de $f(t, y)$, des dérivées partielles de $f(t, y)$ jusqu'au troisième ordre inclus et des puissances en h jusqu'à h^4 inclus.

Considérons à présent les expressions (6.5.6) : développons au voisinage du point $M(t, y)$ chacune des fonctions f exprimant k_2, k_3, k_4 d'après la formule de Taylor pour deux variables jusqu'aux accroissements du troisième degré des variables. Il est évident que k_1, k_2, k_3, k_4 et, par consé- quent, $\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 - k_4)$ s'exprimeront en fonction de $f(t, y)$, de ses dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclus et des puissances en h jusqu'à h^4 inclus. En substituant les expressions ainsi obtenues dans l'équation (6.5.7) nous vérifions que nous avons bien affaire à une identité. Notons que les calculs se trouvent sensiblement simplifiés si nous introduisons l'opérateur de dérivation suivant.

$$Du = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)u.$$

Revenons à présent à la solution de l'équation (6.5.1) avec les conditions initiales (6.5.2).

Posons :

$$y(t_0) = y_0,$$

$$\begin{array}{lll} t_0 + h = t_1, & y(t_0 + h) = y_1 & y_1 - y_0 = \Delta y_1, \\ t_1 + h = t_2, & y(t_1 + h) = y_2 & y_2 - y_1 = \Delta y_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m-1} + h = t_m, & y(t_{m-1} + h) = y_m & y_m - y_{m-1} = \Delta y_m, \end{array} \tag{6.5.8}$$

Commençons par chercher

$$y_1 = y(t_0 + h).$$

Pour cela il nous faut connaître

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0$$

ou bien

$$y_1 = \Delta y_1 + y_0$$

Nous avons

$$\begin{aligned} k_1^{(0)} &= hf(t_0, y_0), \\ k_2^{(0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right), \\ k_3^{(0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right), \\ k_4^{(0)} &= hf\left(t_0 + h,\ y_0 + k_3^{(0)}\right). \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

D'après la formule (6.5.6) nous pouvons écrire :

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) \tag{6.5.10}$$

et

$$y_1 = \Delta y_1 + y_0$$

y_1 étant maintenant connu, cherchons y_2
Nous avons

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= hf(t_1, y_1), \\ k_2^{(1)} &= hf\left(t_1 + \frac{h}{2},\ y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}\right), \\ k_3^{(1)} &= hf\left(t_1 + \frac{h}{2},\ y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}\right), \\ k_4^{(1)} &= hf\left(t_1 + h,\ y_1 + k_3^{(1)}\right). \end{aligned} \tag{6.5.11}$$

D'après la formule (6.5.7) nous avons $\Delta y_2 = y_2 - y_1$ et y_1 étant connus, d'après (6.5.4) y_2 est par conséquent déterminé. De la même manière on trouve y_3, y_4, et ainsi de suite.
Pour trouver plus aisément les valeurs $y_l, y_2, \cdots, y_m$, les résultats des calculs sont groupés dans le tableau ci-dessous.

i	t	y	$k = hf()$	Δy
0	t_0 $t_0 + \frac{h}{2}$ $t_0 + \frac{h}{2}$ $t_0 + h$	y_0 $y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$ $y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$ $y_0 + k_3^{(0)}$	$k_1^{(0)}$ $k_2^{(0)}$ $k_3^{(0)}$ $k_4^{(0)}$	$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$
1	t_1 $t_1 + \frac{h}{2}$ $t_1 + \frac{h}{2}$ $t_1 + h$	$y_1 = y_0 + \Delta y_1$ $y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$ $y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$ $y_1 + k_3^{(1)}$	$k_1^{(1)}$ $k_2^{(1)}$ $k_3^{(1)}$ $k_4^{(1)}$	Δy_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	t_m $t_m + \frac{h}{2}$ $t_m + \frac{h}{2}$ $t_m + h$	$y_m = y_{m-1} + \Delta y_m$ $y_m + \frac{k_1^{(m)}}{2}$ $y_m + \frac{k_2^{(m)}}{2}$ $y_m + k_3^{(m)}$	$k_1^{(m)}$ $k_2^{(m)}$ $k_3^{(m)}$ $k_4^{(m)}$	Δy_{m+1}

Illustrons la méthode de Runge-Kutta par la résolution d'un exemple simple où les calculs peuvent être faits à la main.

Example 6.5.1. *Trouver la solution de l'équation*

$$y' = t + y$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$y_0 = 1 \quad pour \quad t = 0$$

sur le segment

$$[0;\ 0,4].$$

Solution. *Prenons $h = 0,1$. Il nous faut, par conséquent, chercher les valeurs y_1, y_2, y_3, y_4 En ce qui nous concerne*

$$f(t, y) = t + y$$

Nous avons :

$$k_1^{(0)} = hf(t_0, y_0) = 0,1f(0,1) = 0,1(0+1) = 0,1,$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(t_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,1[(0 + \frac{0,1}{2}) + (1 + \frac{0,1}{2})] = 0,11,$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(t_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,1[(0 + \frac{0,1}{2}) + (1 + \frac{0,11}{2})] = 0,1105,$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(t_0 + h_0,\ y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0,1[(0+0,1) + (1+0,1105)] = 0,12105.$$

D'après la formule (6.5.10) il vient :

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0,1 + 2(0,11) + 2(0,1105) + 0,12105) = 0,1103.$$

i	t	y	$k = 0.1(t+y)$	Δy
0	**0** 0,05 0,05 0,1	**1** 1,05 1,055 1,1105	0,1 0,11 0,1105 0,1210	$\Delta y_1 = 0,1103$
1	**0,1** 0,15 0,15 0,2	**1,1103** 1,1708 1,1763 1,2429	0,1210 0,1321 0,1326 0,1443	$\Delta y_2 = 0,1324$
2	**0,2** 0,25 0,25 0,3	**1,2427** 1,3149 1,3209 1,3998	0,1443 0,1565 0,1571 0,1700	$\Delta y_3 = 0,1569$
3	**0,3** 0,35 0,35 0,4	**1,3996** 1,4846 1,4904 1,5836	0,1700 0,1835 0,1840 0,1984	$\Delta y_4 = 0,1840$
4	**0,4**	**1,5836**		

Nous obtenons de la sorte, les valeurs $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$.
la solution exacte de cette équatnn était :

$$y = 2e^t - t - 1,$$

$$y_4 = y_{t=0,4} = 1,58364.$$

Example 6.5.2. *Trouver la solution de l'équation*

$$y' = e^{\sin t} y$$

satisfaisant aux conditions initiales
$y_0 = 1$ *pour* $t = 0$ *sur le segment* $[0;\ 1]$, $h = 0,1$.

6.6 Exercices-corrigés

Exercice 28

1. En utilisant l'algorithme de la méthode d'Euler (simple), calculer de la solution approché l'équations suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 + 2, \quad \forall t \in [0 \;\; 1,5], \quad soit \;\; h = 1/2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution : on a $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1,5}{0,5} = 3$,
$t_0 = 0, \;\; y_0 = 2$ et $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ tq $f(t,y) = y + t^2 + 2$

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \;\; y_0 &= 2 \\ t_1 = 0,5, \;\; y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = \frac{3}{2}y_0 + \frac{1}{2}t_0^2 + 1 = 3 + 0 + 1 = 4 \\ t_2 = 1, \;\; y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = \frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}t_1^2 + 1 = 6 + \frac{1}{8} + 1 = \frac{57}{8} \\ t_3 = 1,5, \;\; y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}t_2^2 + 1 = \frac{171}{16} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{195}{16} \end{aligned}$$

les points (t_i, y_i), $i = 0, ..3$ appartiennent au graphe de la solution approchée y

2. Par la méthode Crank-Nicolson, calculer de la solution approché l'équations précédente :
Solution : on a $n = 3, \quad h = 1/2$

$$\begin{cases} y^*_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad avec \;\; y_0 = 2 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\,(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1}) \right] \quad tq \;\; f(t,y) = y + t^2 + 2. \end{cases}$$

h	=	0,5

t_0	=	0	$^*y_1$	=	4,0	y_0	=	2
t_1	=	0,5	$^*y_2$	=	8,0	y_1	=	4,563
t_2	=	1	$^*y_3$	=	15,0	y_2	=	9,008
t_3	=	1,5				y_3	=	16,825

les points (t_i, y_i), $i = 0, ..3$ appartiennent au graphe de la solution approchée y

Exercice 29

1. En utilisant l'algorithme de la méthode d'Euler (simple), calculer de la solution approché l'équations suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2, \quad \forall t \in [0,2], \quad soit \quad h = 1/2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution : on a $n = \frac{b-a}{h} = \frac{2}{0,5} = 4$,
$t_0 = 0, \quad y_0 = 2 \quad$ et $\quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad tq \quad f(t,y) = y + t^2$

$$\begin{aligned}
t_0 = 0, \quad y_0 &= 2 \\
t_1 = 0,5, \quad y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = \frac{3}{2}y_0 + \frac{1}{2}t_0^2 = 3 + 0 = 3 \\
t_2 = 1, \quad y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = \frac{3}{2}y_1 + \frac{1}{2}t_1^2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{8} = 4,625 \\
t_3 = 1,5, \quad y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = \frac{3}{2}y_2 + \frac{1}{2}t_2^2 = 7,438 \\
t_4 = 2, \quad y_4 &= y_3 + hf(t_3, y_3) = \frac{3}{2}y_3 + \frac{1}{2}t_3^2 = 12,281
\end{aligned}$$

les points $(t_i, y_i), \quad i = 0, ...4$ appartiennent au graphe de la solution approchée y

2. Par la méthode Crank-Nicolson, calculer de la solution approché l'équations précédente :
Solution : on a $\quad n = 4, \quad h = 1/2$

$$\begin{cases} y^*_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad avec \quad y_0 = 2 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\,(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y^*_{n+1})\right] \quad tq \quad f(t,y) = y + t^2. \end{cases}$$

h = 0,5

t_0	=	0		$*y_1$	=	3,0	y_0	=	2
t_1	=	0,5		$*y_2$	=	5,1	y_1	=	3,313
t_2	=	1		$*y_3$	=	9,1	y_2	=	5,727
t_3	=	1,5		$*y_4$	=	16,5	y_3	=	10,243
t_4	=	2					y_4	=	18,489

Exercice 30

1- Résoudre sur $\mathbb{R}$ (solution analytique) l'équations differentielle suivante : $y' + y = t^2 + 1$, avec $y(0) = 1$

.....

Solution :
- Résoulution de l'équation homogène : $y' + y = 0$
On a $\int \frac{y'}{y}\, dt = -\int dt$,
alors : $y(t) = ke^{-t}$

- Solution particulière : on pose $y(t) = at^2 + bt + c$

alors, $(2at + b) + (at^2 + bt + c) = t^2 + 1 \Leftrightarrow at^2 + (2a + b)t + (b + c) = t^2 + 1$ donc :
$a = 1, \quad 2a + b = 0$ et $b + c = 1$
donc : $a = 1, \quad b = -2$ et $c = 3$
- Solution général : $y(t) = ke^{-t} + t^2 - 2t + 3$
tel que $1 = y(0) = k + 3$ alors on a $k = -2$
donc

$$y(t) = -2e^{-t} + t^2 - 2t + 3$$

.....

2- En utilisant l'algorithme de la méthode d'Euler, calculer de la solution approché l'équations suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t^2 + 1, \quad \forall t \in [0, \ \frac{3}{2}], \quad soit \quad h = 1/2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

.....
Solution : on a $n = \frac{1,5-0}{h} = \frac{1,5}{0,5} = 3$,
$t_0 = 0, \quad y_0 = 1$ et $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ tq $f(t, y) = -y + t^2 + 1$

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad y_0 &= 1 \\ t_1 = 1/2, \quad y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = \frac{1}{2}(y_0 + t_0^2 + 1) = \frac{1}{2}(1 + 0 + 1) = 1 \\ t_2 = 1, \quad y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = \frac{1}{2}(y_1 + t_1^2 + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1/4 + 1) = 9/8 \\ t_3 = 3/2, \quad y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = \frac{1}{2}(y_2 + t_2^2 + 1) = \frac{1}{2}(9/8 + 1 + 1) = 25/16 \end{aligned}$$

les points $(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, 3$ appartiennent au graphe de la solution approchée y

Exercice 31

1- Résoudre sur $\mathbb{R}$ (solution analytique) l'équations differentielle suivante : $y' - y = 1$,
avec $y(0) = 1$

.....
Solution :
- Résoulution de l'équation homogène : $y' - y = 0$
On a $\int \frac{y'}{y}\, dt = \int dt$,
alors : $y(t) = ke^{t}$

- Solution particulière : on pose $y(t) = a$

alors, $(0) - (a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -a = 1$
donc : $a = -1$
- Solution général : $y(t) = ke^t - 1$
tel que $1 = y(0) = k - 1$ alors on a $k = 2$
donc

$$y(t) = 2e^t - 1$$

.....

2- En utilisant l'algorithme de la méthode d'Euler, calculer de la solution approché l'équations suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + 1, \quad \forall t \in [0,3], \quad soit \quad h = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

.....
Solution : on a $n = \frac{3-0}{h} = \frac{3}{1} = 3$,
$t_0 = 0, \quad y_0 = 1$ et $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ tq $f(t,y) = y + 1$

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad y_0 &= 1 \\ t_1 = 1, \quad y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = 2y_0 + 1 = 2 + 1 = 3 \\ t_2 = 2, \quad y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = 2y_1 + 1 = 6 + 1 = 7 \\ t_3 = 3, \quad y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = 2y_2 + 1 = 14 + 1 = 15 \end{aligned}$$

les points $(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, 3$ appartiennent au graphe de la solution approchée y

6.7 Exercices

Exercice 32

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = t^2$
2. $y' + \frac{1}{t}y = 0$
3. $y' = y - t + 2$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $y'' + 2y' + 2y = 0$
6. $y'' - 2y' + y = 0$

Exercice 33

Soit à résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + t + 1, \quad \forall t \in [0,1], \quad soit \quad h = 0,2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1- Calculer la solution analytique.
2-Calculer une valeur approchée en utilisant les différents schémas décrits dans le cour (prendre $h = 0.2$).

Exercice 34

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + t^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad soit \quad h = 0,1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1- Calculer la solution analytique.
2-Calculer une valeur approchée en utilisant les différents schémas décrits dans le cour (prendre $h = 0.2$).

Chapitre 7

Méthode de résolution directe des systèmes d'équations linéaires

Une méthode directe pour résoudre un système d'equations linéaires.est une méthode qui donne, aux erreurs d'arrondi près, la solution exacte au bout d'un nombre déterminé d'étapes de calcul.Pour un système d'equations $Ax = b$, Lorsque la matrice A est dense (c.-à-d. que la plupart des éléments A sont non nuls),

il n'existe pas d'algorithmes plus performants, ainsi d'un point de vue temporel que du point de vue précision, que la méthode d'élimination systématique de Gauss. Par contre, lorsque la matrice A est creuse (c.-à-d. un grand nombre des éléments de A sont nuls), les méthodes itératives offrent certains avantages et elles sont indispensables dans certains cas où on a des systèmes à grand échelle. Les méthodes itératives donnent une suite de solutions approchées, convergente lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini.Pour certains systèmes ayant une structure spéciale, les méthodes itératives peuvent donner des résultats fiables avec moins d'opérations que les méthodes directes. Le choix entre une méthode directe et une méthode itérative dépend essentiellement de la proportion et de la répartition des éléments non-nuls de la matrice A.

Il est fréquent, dans toutes les disciplines scientifiques, de devoir résoudre des systèmes linéaires de la forme

$$Ax = b, \tag{7.0.1}$$

où A est une matrice carrée de dimension $n \times n$ dont les éléments a_{ij} sont réels ou complexes, et x et b sont des vecteurs colonnes de dimension n, où x est l'inconnue et b un vecteur donné. L'équation (7.0.1) s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

La solution du système (7.0.1) existe et est unique si et seulement si A n'est pas singulière [1] . En théorie, la solution peut être calculée en utilisant des méthodes directes.

1. En algèbre linéaire, une matrice carrée est dite singulière si elle n'est pas inversible. Par conséquent,

Remark 7.0.1. *Une méthode de résolution d'un système d'équations est dite directe si on obtient la solution du système après un nombre fini d'opérations soit par triangularisation ou soit par décomposition de la matrice A.*

un système d'équations représenté par une matrice singulière n'admet pas de solution unique, car on ne peut pas l'inverser. Aussi, le déterminant de la matrice est nul.

7.1 Méthode de Cramer

La méthode de Cramer est basée sur le calcul du déterminant de la matrice A et les déterminants associés aux inconnues x_k $(k = 1, \cdots, n)$.

La solution est alors donnée par :

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

où A_k est la matrice carrée formée en remplaçant la k-ième colonne de A par le vecteur colonne b.

$$A_k = (a_{k|i,j}) \text{ avec } a_{k|i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \neq k \\ b_i & \text{si } j = k \end{cases}$$

Example 7.1.1. *Système d'ordre 2*

Si $aa_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a pour unique solution

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - cb}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb}.$$

Application numérique :

$$\left.\begin{matrix} 4x + 2y = 24 \\ 2x + 3y = 16 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24 \cdot 3 - 16 \cdot 2}{8} = \frac{40}{8} = 5 \\ y = \frac{4 \cdot 16 - 2 \cdot 24}{8} = \frac{16}{8} = 2 \end{cases}$$

Example 7.1.2. *Système d'ordre 3*

Soit le système à 3 équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad detA_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad detA_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad et$$

$$detA_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad et \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Tel que

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

par une analogie simple (la règle de Sarrus) il est toujours possible de généraliser cette formule pour une dimension plus élevée.

7.2 Méthode de matrice inverse

Soit le système d'équations

$$AX = B \tag{7.2.1}$$

Si le déterminant de la matrice A est non nul, alors A est inversible, son inverse étant donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}A$$

où ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}A$ est la transposée de la comatrice de A.

En multipliant les 2 membres dans (7.2.1) par A^{-1} (l'inverse de A) :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{d'où on a} \quad X = A^{-1}B$$

7.2.1 Inversion des matrices 2×2

L'équation des cofacteurs ci-dessus permet de calculer l'inverse des matrices de dimensions 2×2 : si $ad - bc \neq 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \ {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

7.2.2 Inversion des matrices 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Comatrice de la matrice$A$.

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Inverse de la matrice A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Example 7.2.1.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors on a

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7.3 Méthode de Gauss (Pivot)

Il s'agit en effet de la méthode classique pour résoudre un syst'eme linéaire. L'idée de la méthode est d'éliminer les inconnues d'une façon systématique jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire que nous pouvons résoudre aisément, pour plus d'informations sur ce sujet, voir [5] .

Pour un système d'équations $AX = B$, la méthode de Gauss est basée sur lidée de trianguler la matrice A

Example 7.3.1.
Soit le système suivant,

$$\begin{cases} 5x_1 + -2y + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

On porte les composantes dans la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On procède a la trianguilisation par les étapes suivante : prenons comme pivot 5 *(le* 1^{er} *chiffre de la* 1^{er} *ligne) et on Multiplie la* 3^{me} *ligne par* $5/2$ *et retranchons de la* 1^{er} *ligne et faisons de même avec la* 2^{me} *ligne en la multipliant par* $5/3$.
On aura

$$\begin{pmatrix} \boxed{5} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

De nouveau on prend comme pivot $\frac{9}{2}$ *multiplions la* 3^{me} *par* $27/8$ *et faisons la somme avec la* 2^{me} *ligne*

Alors on a

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\frac{9}{2}} & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-5}{8} & \frac{35}{8} \end{pmatrix}$$

d'où on a

$$x_3 = -7, \quad x_2 = -14 \quad et \quad x_1 = -4.$$

Par une analogie simple il est toujours possible de généraliser cette méthode pour des systèmes à dimension plus élevée.

7.4 Méthode de factorisation $A = LU$

On a vu que l'élimination de Gauss permet de traiter plusieurs seconds membres à la fois pour autant que l'on connaisse tous ces seconds membres dès le début de l'opération d'élimination. Il existe cependant des cas o'u il n'en est pas ainsi, on peut par exemple avoir

à résoudre les systèmes $Ax_1 = b_1$ et $Ax_2 = b_2$ où b_2 est une fonction de x_1. La décomposition LU permet d'éviter de devoir recommencer toute l'opération. Le principe est le suivant : si l'on connaît une décomposition de A en une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U, c'est-à-dire :

$$A = LU$$

alors le système $Ax = b$ est équivalent au système $LUx = b$ qui se décompose en deux systèmes triangulaires :

$$Ly = b, \quad Ux = y \tag{7.4.1}$$

Si A est régulière [2], alors L et U le sont aussi, et leurs termes diagonaux sont non nuls

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad L \text{ est une matrice triangulaire inférieure tel que } \; l_{ii} \neq 0$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}, \quad U \text{ est une matrice triangulaire supérieure tel que } \; u_{ii} \neq 0$$

Pour faciliter les calculs on prend $l_{ii} = 1$, les composantes l_{ij} et u_{ij} seront déterminées d'après :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

- $l_{ii} = 1$

2. une matrice régulière (ou non singulière ou encore inversible) est une matrice carrée A pour laquelle il existe une matrice B de même taille n avec laquelle les produits AB et BA sont égaux à la matrice identité. $AB = BA = I_n$

- $l_{ij} = 0 \;\; pour \;\; j = i+1, \ldots, n$
- $u_{ij} = 0 \;\; pour \;\; j = 1, \ldots, i-1$
- $u_{1j} = a_{1j} \;\; pour \;\; j = 1, \ldots, n$
- $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \;\; pour \;\; i = 1, \ldots, n$
- $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$ (Termes supérieures en general)
- $l_{ij} = \big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\big)/u_{jj}$ (Termes inférieurs en général)

Une fois les composantes l_{ij} et u_{ij} sont déterminées Les deux systèmes dans (7.4.1) sont faciles à résoudre. En effet, L étant triangulaire inférieure, la première ligne du système $Ly = b$ est de la forme

$$l_{11} y_1 = b_1,$$

ce qui donne la valeur de y_1 puisque $l_{11} \neq 0$. En substituant cette valeur de y_1 dans les $n-1$ équations suivantes, on obtient un nouveau système dont les inconnues sont $y_2, \cdots, y_n$, pour lesquelles on peut faire de même. En procédant équation par équation, on calcule ainsi toutes les inconnues par l'algorithme dit de descente

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ \\ y_i = \dfrac{1}{l_{ii}}\big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\big), \quad i = 2, \cdots, n \end{cases} \tag{7.4.2}$$

On résoud le système $Ux = y$ de manière similaire. Cette fois, on commence par déterminer x_n puis, puis de proche en proche, les autres inconnues x_i, de $i = n-1$ à $i = 1$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ \\ x_i = \dfrac{1}{u_{ii}}\big(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\big), \quad i = n-1, \cdots, 1 \end{cases} \tag{7.4.3}$$

Ainsi on a l'algorithme de remontée.

Example 7.4.1 (Application sur un probleme en 3 dimension.)**.**
Soit le système suivant,

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Etape 1 *: Calculer les composantes l_{ij} et u_{ij}*

1^{er} **pas :** *: Charger les composantes* $(n = 3)$

- $l_{ii} = 1$
- $l_{ij} = 0 \quad pour \quad j = i + 1, \ldots, n$
- $u_{ij} = 0 \quad pour \quad j = 1, \ldots, i - 1$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .. & 1 & 0 \\ .. & .. & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ 0 & .. & .. \\ 0 & 0 & .. \end{pmatrix}$$

$2^{ème}$ **pas :** *Charger les composantes* $(n = 3)$

- $u_{1j} = a_{1j} \quad pour \quad j = 1, \ldots, n$
- $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad pour \quad i = 1, \ldots, n$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & .. & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & .. & .. \\ 0 & 0 & .. \end{pmatrix}$$

$3^{ème}$**pas :** *Charger les composantes (u_{ij}-supérieures) et (l_{ij}-supérieures)*

- $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$

  $u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k2} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 1 - (2/5)(-2) = 9/5$

- $$\begin{aligned} l_{ij} &= (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj})/u_{jj} \\ l_{32} &= (a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{3k} u_{k2})/u_{22} = (a_{32} - l_{31} u_{12})/u_{22} \\ &= (-2 - (3/5)(-2))/(9/5) = -4/9. \end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -4/9 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 9/5 & .. \\ 0 & 0 & .. \end{pmatrix}$$

Puis

- $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$

  $u_{23} = a_{23} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k}u_{k3} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -3 - (2/5)(1) = -17/5$

- $$\begin{aligned} u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k}u_{k3} &= a_{33} - [(l_{31}u_{13}) + (l_{32}u_{23})] \\ &= 2 - [(3/5)(1) + (-4/9)(-17/5)] \\ &= -1/9. \end{aligned}$$

Donc on a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -4/9 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 9/5 & -17/5 \\ 0 & 0 & -1/9 \end{pmatrix}$$

Etape 2 *: Résoudre les systèmes suivants : $Ly = b, \quad Ux = y$*

1^{er} **pas :** *Résoudre le système $Ly = b$.*

On applique l'algorithme de descente tel que $l_{ii} = 1$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ \\ y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j, \quad i = 2, 3 \end{cases} \tag{7.4.4}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 = 1 \\ y_2 &= b_2 - l_{21}y_1 = -1 - (2/5)(1) = -7/5 \\ y_3 &= b_3 - \sum_{j=1}^{2} l_{3j}y_j = b_3 - [(l_{31}y_1) + (l_{32}y_2)] = 2 - [(3/5)(1) + (-4/9)(-7/5)] = 7/9 \end{aligned}$$

$2^{ème}$**pas :** *Résoudre le système suivant $Ux = y$*
(calculer la solution $x =?$)
On applique l'algorithme de remontée.

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{y_3}{u_{33}} \\ \\ x_i = \dfrac{1}{l_{ii}}\big(y_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\big), \quad i = 2, 1 \end{cases} \tag{7.4.5}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= (7/9)/(-1/9) = -7 \\ x_2 &= \frac{1}{u_{22}}(y_2 - u_{23}x_3) = (5/9)((-7/5) - (-17/5)(-7)) = -14 \\ x_1 &= \frac{1}{u_{11}}\big(y_1 - \sum_{j=2}^{3} u_{1j}x_j\big) = \frac{1}{l_{11}}\big[y_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3)\big] \\ &= \frac{1}{5}\big[1 - [(-2)(-14) + (1)(-7)]\big] = -4 \end{aligned}$$

7.5 Exercices

Exercice 35

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

par la méthode de Cramer et la méthode de Gauss

Exercice 36

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

par la méthode à matrice inverse et la méthode de factorisation

Chapitre 8

Systèmes linéaires et méthodes itératives

Soit le système linéaire

$$Ax = b, \tag{8.0.1}$$

où b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donné et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est unematrice inversible.
Résoudre le système (8.0.1) avec une méthode itérative consiste à construire, une suite de vecteurs x^k convergeant vers la solution exacte quand $k \to \infty$, en partant d'une donnée initiale x^0.

Nous écrivons $A = M - N$, M inversible et nous proposons l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^d \text{ Donné : Initialisation} \\ \\ Mx^{k+1} = Nx^k + b, \end{cases}$$

on a

$$x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b.$$

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto M^{-1}Nx + M^{-1}b, \end{aligned} \tag{8.0.2}$$

tel que $x^{k+1} = f(x^k)$.

Si la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers un point fixe de f.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|M^{-1}N(x - y)\| \leq |M^{-1}N|\|x - y\|.$$

Si pour une norme $|M^{-1}N| < 1$ on a f contractante et le théorème du point fixe s'applique.
$x^{k+1} = f(x^k)$.

8.1 Evaluation d'erreur du processus itératif

Pour simplifier on écrit le processus itératif sous la forme suivante

$$x^{k+1} = Bx^k + c, \tag{8.1.1}$$

tel que $B = M^{-1}N \;\; et \;\; c = M^{-1}b$

qui vérifient la relation

$$x = Bx + c, \tag{8.1.2}$$

Soit $x - x(k)$ l'erreur à l'étape k. En soustrayant (8.1.1) de (8.1.2), on obtient

$$x - x^{k+1} = B(x - x^k) \tag{8.1.3}$$

d'où on a

$$\|x - x^{k+1}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{k+1} - x^k\|$$

nous pouvnons aussi écrire,

$$\|x - x^{k+1}\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|}\|x^1 - x^0\|.$$

Ce résultat nous guide à fin d'obtenir une bonne convergence. En effet, le facteur B dans (8.1.3) doit être dans le voisinage de "0" pour obtenir une bonne convergence. Pour qu'une une méthode itérative converge pour toute donnée initiale x^0 il suffit que la norme [1]de la matrice d'itération est strictement plus petit que 1.

1. Les normes classiques pour les matrices de dimension $n \times n$ sont : $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2}$

8.2 Méthode de Jacobi

Si les termes diagonaux de A sont non nuls, on peut poser $M = D = diag\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$, où D est la matrice diagonale contenant les termes diagonaux de A.

$$Dx^{k+1} = b - (A - D)x^k, \quad k \geq 0,$$

on écrit

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\big(b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^k\big), \quad i = 1, \cdots, n \tag{8.2.1}$$

comme vecteur initial on prend $k \geq 0$ et avec $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$.

Proposition 8.2.1. *Si la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ du système (8.0.1) est à diagonale strictement dominante par ligne,*[2] *alors la méthode de Jacobi converge.*

Example 8.2.1.

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

par la méthode de Jacobi en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

On a

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 + x_2/2 \\ x_2 = 8/3 + x_1/3 + x_3/3 \\ x_3 = -5/2 + x_2/2 \end{cases}$$

c'est-à-dire dans notre cas,

$$x^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} x^k + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 8/3 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

- 1^{er} *itération*

$$\begin{cases} x_1^1 = 1/2 + x_2^0/2 \\ x_2^1 = 8/3 + x_1^0/3 + x_3^0/3 \\ x_3^1 = -5/2 + x_2^0/2 \end{cases} \quad D'où\ on\ a \quad \begin{cases} x_1^1 = 0,500 \\ x_2^1 = 1,833 \\ x_3^1 = 1,500 \end{cases}$$

2. A est dite à diagonale strictement dominante lorsque : $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \quad 1 \leq i \leq n.$

- $2^{ème}$*itération*

$$\begin{cases} x_1^2 = 1/2 + x_2^1/2 \\ x_2^2 = 8/3 + x_1^1/3 + x_3^1/3 \\ x_3^2 = -5/2 + x_2^1/2 \end{cases} \quad D'où\ on\ a \quad \begin{cases} x_1^2 = 1,833 \\ x_2^2 = 2,000 \\ x_3^2 = -1,167 \end{cases}$$

- $3^{ème}$*itération*

$$\begin{cases} x_1^3 = 1/2 + x_2^2/2 \\ x_2^3 = 8/3 + x_1^2/3 + x_3^2/3 \\ x_3^3 = -5/2 + x_2^2/2 \end{cases} \quad D'où\ on\ a \quad \begin{cases} x_1^3 = 1,500 \\ x_2^3 = 2,889 \\ x_3^3 = -1,500 \end{cases}$$

Par la proposition 8.2.1 on vérifie bien que la méthode itérative de Jacobi converge pour cet exemple, Comme nous pouvons le voir dans le tableau ci-dessous.

itération	x_1	x_2	x_3	Test : A x-b		
0	0	0	0	-1,000	-8,000	5,000
1	0,500	2,667	-2,500	-2,667	2,000	-2,667
2	1,833	2,000	-1,167	0,667	-2,667	0,667
3	1,500	2,889	-1,500	-0,889	0,667	-0,889
4	1,944	2,667	-1,056	0,222	-0,889	0,222
5	1,833	2,963	-1,167	-0,296	0,222	-0,296
6	1,981	2,889	-1,019	0,074	-0,296	0,074
7	1,944	2,988	-1,056	-0,099	0,074	-0,099
8	1,994	2,963	-1,006	0,025	-0,099	0,025
9	1,981	2,996	-1,019	-0,033	0,025	-0,033
10	1,998	2,988	-1,002	0,008	-0,033	0,008
11	1,994	2,999	-1,006	-0,011	0,008	-0,011
12	1,999	2,996	-1,001	0,003	-0,011	0,003
13	1,998	3,000	-1,002	-0,004	0,003	-0,004
14	2,000	2,999	-1,000	0,001	-0,004	0,001
15	1,999	3,000	-1,001	-0,001	0,001	-0,001
16	2,000	3,000	-1,000	0,000	-0,001	0,000
17	2,000	3,000	-1,000	0,000	0,000	0,000

FIGURE 8.1 – La méthode de Jacobi

8.3 Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi en effet elle rend le processus itératif plus rapide.

la méthode de Gauss-Seidel, nous choisissons de considérer la partie triangulaire inférieure de A . Si on décompose $A = L + D + U$, ôu L est la partie triangulaire inférieure de A, D sa diagonale, et U sa partie triangulaire supérieure, on obtient le processus

$$x^{k+1} = (L + D)^{-1}(L + D - A)x^k + (L + D)^{-1}b \quad k \geq 0,$$

on écrit

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k\big), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{8.3.1}$$

Remark 8.3.1. *Dans le cas de la Méthode Gauss-Seidel, la condition suffisante de convergence est que la matrice A du système (8.0.1) soit symétrique définie positive*[3]

Example 8.3.1.
On reprend l'exemple précédent
On résout le système :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors,

- $L + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/12 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$
- $L + D - A = -U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $(L + D)^{-1}(L + D - A) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad (L + D)^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 17/6 \\ -13/12 \end{pmatrix}$

D'où nous avons

$$x^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix} x^k + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 17/6 \\ -13/12 \end{pmatrix}$$

Le Tableau ci-dessous dans la fig 8.2 indique l'évolution de l'algorithme avec 0 *comme point de d'epart.*

3. une matrice A symétrique réelle d'ordre n, est dite définie positive si elle vérifie

$$x^{\mathsf{T}}Ax > 0, \quad \textit{pour} \quad x \neq 0.$$

itération	x_1	x_2	x_3	Test : A x-b		
0	0,000	0,000	0,000	-1,000	-8,000	5,000
1	0,500	2,833	-1,083	-2,833	1,083	0,000
2	1,917	2,944	-1,028	-0,111	-0,056	0,000
3	1,972	2,981	-1,009	-0,037	-0,019	0,000
4	1,991	2,994	-1,003	-0,012	-0,006	0,000
5	1,997	2,998	-1,001	-0,004	-0,002	0,000
6	1,999	2,999	-1,000	-0,001	-0,001	0,000
7	2,000	3,000	-1,000	0,000	0,000	0,000
8	2,000	3,000	-1,000	0,000	0,000	0,000
9	2,000	3,000	-1,000	0,000	0,000	0,000
10	2,000	3,000	-1,000	0,000	0,000	0,000

FIGURE 8.2 – La méthode de Gauss-Seidel

On remarque bien en comparant les tableaux dans les figures 8.2 et 8.1 que la méthode Gauss-Seidel converge environ deux fois plus vite que celle de Jacobi.

8.4 Exercices

Exercice 37

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

-Résoudre le système en utilisant la méthode de Jacobi avec 3 itérations et un vecteur initial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$

- Vérifier la convergence de la méthode

Exercice 38

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

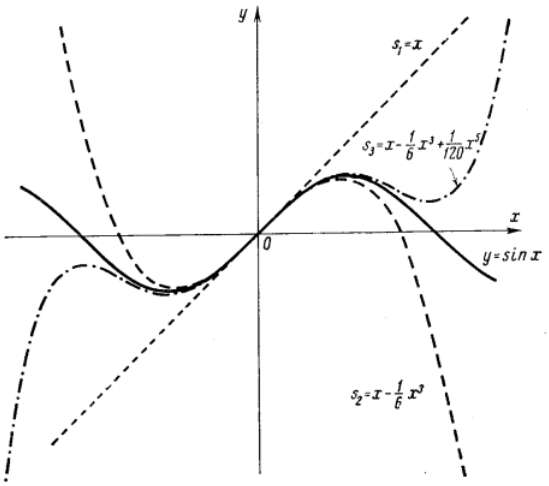
par la méthode de Gauss-Seidel et la méthode de Jacobi.
- vérifier la convergence des deux méthodes.

Chapitre 9

Annexe A. Développement limité

9.1 Formules de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1715, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coeficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point.



Nous allons voir deux formules de Taylor, elles auront toutes la même partie polynomiale mais donnent plus ou moins d'informations sur le reste.

9.1.1 Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$

Théorème 2 (Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit $a, x \in I$. Il existe un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Nous noterons $T_n(x)$ la partie polynomiale de la formule de Taylor (elle dépend de n mais aussi de

f et a) :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

ou de façon équivalente :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

où le reste $R_n(x)$ est une fonction négligeable par rapport à $(x-a)^n$ au voisinage de a.

Dans notre cas : $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Le nombre c est parfois noté $a+\lambda(x-a)$, et la condition qu'il soit compris entre a et x s'écrit alors $0 < \lambda < 1$.

Exemple 2.

Soient $a, x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$ il existe c entre a et x tel que $\exp x = \exp a + \exp a \cdot (x-a) + \cdots + \frac{\exp a}{n!}(x-a)^n + \frac{\exp c}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Dans la plupart des cas on ne connaîtra pas ce c. Mais ce théorème permet d'encadrer le reste. Ceci s'exprime par le corollaire suivant :

Corollaire 1.

Si en plus la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur I par un réel M, alors pour tout $a, x \in I$, on a :

$$\left|f(x) - T_n(x)\right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 3.

Approximation de $\sin(0,01)$.

Soit $f(x) = \sin x$. Alors $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$. On obtient donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$. La formule de Taylor ci-dessus en $a = 0$ à l'ordre 3 devient : $f(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{4!}$, c'est-à-dire $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{24}$, pour un certain c entre 0 et x.

Appliquons ceci pour $x = 0,01$. Le reste étant petit on trouve alors

$$\sin(0,01) \approx 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6} = 0,00999983333\ldots$$

On peut même savoir quelle est la précision de cette approximation : comme $f^{(4)}(x) = \sin x$ alors $|f^{(4)}(c)| \leqslant 1$. Donc $\left|f(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leqslant \frac{x^4}{4!}$. Pour $x = 0,01$ cela donne : $\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{6}\right)\right| \leqslant \frac{(0,01)^4}{24}$. Comme $\frac{(0,01)^4}{24} \approx 4,16 \cdot 10^{-10}$ alors notre approximation donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

9.1.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 3 (Formule de Taylor-Young).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x), \end{aligned}}$$

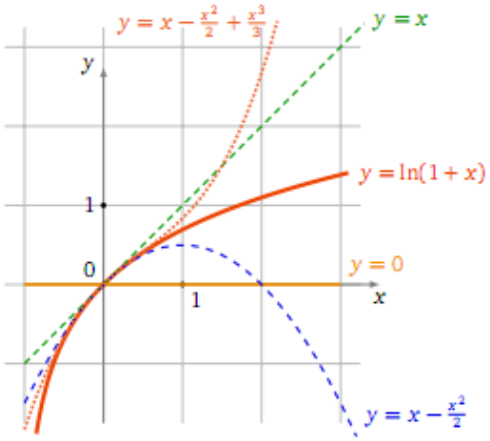
où ϵ est une fonction définie sur I telle que $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

1.4. Un exemple

Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$; f est infiniment dérivable. Nous allons calculer les formules de Taylor en 0 pour les premiers ordres.
Tous d'abord $f(0) = 0$. Ensuite $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. Ensuite $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ donc $f''(0) = -1$. Puis $f^{(3)}(x) = +2\frac{1}{(1+x)^3}$ donc $f^{(3)}(0) = +2$. Par récurrence on montre que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$ et donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Ainsi pour $n > 0$: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.
Voici donc les premiers polynômes de Taylor :

$$T_0(x) = 0 \qquad T_1(x) = x \qquad T_2(x) = x - \frac{x^2}{2} \qquad T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Les formules de Taylor nous disent que les restes sont de plus en plus petits lorsque n croît. Sur le dessins les graphes des polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 s'approchent de plus en plus du graphe de f. Attention ceci n'est vrai qu'autour de 0.



Pour n quelconque nous avons calculé que le polynôme de Taylor en 0 est

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

9.2 Développements limités au voisinage d'un point

9.2.1 Définition , existence et unicité

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

Définition 1.
Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un *développement limité* (*DL*) au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$ de sorte que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x).$$

- L'égalité précédente s'appelle un DL de f au voisinage de a à l'ordre n .
- Le terme $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ est appelé la *partie polynomiale* du DL.
- Le terme $(x-a)^n\epsilon(x)$ est appelé le *reste* du DL.

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$:

Proposition 1.
Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage d'un point a alors f admet un DL au point a à l'ordre n, qui provient de la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

où $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Proposition 2.
Si f admet un DL alors ce DL est unique.

Corollaire 2.
Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Par exemple $x \mapsto \cos x$ est paire et nous verrons que son DL en 0 commence par : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

9.2.2 DL des fonctions usuelles à l'origine

Les DL suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\boxed{\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

9.2.3 DL des fonctions en un point quelconque

La fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables $h = x - a$.

Exemple 4.

1. DL de $f(x) = \exp x$ en 1.
   On pose $h = x - 1$. Si x est proche de 1 alors h est proche de 0. Nous allons nous ramener à un DL de $\exp h$ en $h = 0$. On note $e = \exp 1$.
   $$\begin{aligned}\exp x &= \exp(1+(x-1)) = \exp(1)\exp(x-1) = e\exp h \\ &= e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + h^n\epsilon(h)\right) \\ &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\epsilon(x-1)\right)\end{aligned}$$
   où $\lim_{x\to 1} \epsilon(x-1) = 0$.
2. DL de $g(x) = \sin x$ en $\pi/2$.
   Sachant $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ on se ramène au DL de $\cos h$ quand $h = x - \frac{\pi}{2} \to 0$. On a donc $\sin x = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + (x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}\epsilon(x-\frac{\pi}{2})$, où $\lim_{x\to\pi/2} \epsilon(x-\frac{\pi}{2}) = 0$.
3. DL de $\ell(x) = \ln(1+3x)$ en 1 à l'ordre 3.
   Il faut se ramener à un DL du type $\ln(1+h)$ en $h = 0$. On pose $h = x - 1$ (et donc $x = 1 + h$).
   On a $\ell(x) = \ln(1+3x) = \ln\big(1+3(1+h)\big) = \ln(4+3h) = \ln\big(4\cdot(1+\frac{3h}{4})\big) = \ln 4 + \ln\big(1+\frac{3h}{4}\big) = \ln 4 + \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}\big(\frac{3h}{4}\big)^2 + \frac{1}{3}\big(\frac{3h}{4}\big)^3 + h^3\epsilon(h) = \ln 4 + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{9}{32}(x-1)^2 + \frac{9}{64}(x-1)^3 + (x-1)^3\epsilon(x-1)$ où $\lim_{x\to 1} \epsilon(x-1) = 0$.

9.3 Opérations sur les DL

9.3.1 Somme et produit

On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + x^n\epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Proposition 3.

- *$f + g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est :*
  $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \cdots + (c_n + d_n)x^n + x^n\epsilon(x).$$
- *$f \times g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est : $(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = T_n(x) + x^n\epsilon(x)$ où $T_n(x)$ est le polynôme $(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n)$ tronqué à l'ordre n.*

Tronquer un polynôme à l'ordre n signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leqslant n$.

$$\begin{aligned}\cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \quad \text{on développe} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &\quad + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

9.3.2 Composition

On écrit encore :

$$f(x) = C(x) + x^n\epsilon_1(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x)$$
$$g(x) = D(x) + x^n\epsilon_2(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Proposition 4.
Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.

Exemple 7.
Soit $h(x) = \sqrt{\cos x}$. On cherche le DL de h en 0 à l'ordre 4.
On utilise cette fois la notation « petit o ». On connaît le DL de $f(u) = \sqrt{1+u}$ en $u = 0$ à l'ordre 2 : $f(u) = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.
Et si on pose $u(x) = \cos x - 1$ alors on a $h(x) = f\big(u(x)\big)$ et $u(0) = 0$. D'autre part le DL de $u(x)$ en $x = 0$ à l'ordre 4 est : $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. On trouve alors $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$.
Et ainsi

$$\begin{aligned} h(x) = f\big(u\big) &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\Big) - \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{4}x^4\Big) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{32}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

9.3.3 Division

Voici comment calculer le DL d'un quotient f/g. Soient

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Nous allons utiliser le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$.

1. Si $d_0 = 1$ on pose $u = d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $f/g = f \times \frac{1}{1+u}$.
2. Si d_0 est quelconque avec $d_0 \neq 0$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0}\frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}x + \cdots + \frac{d_n}{d_0}x^n + \frac{x^n\epsilon_2(x)}{d_0}}.$$
3. Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Exemple 8.

1. DL de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

   Tout d'abord $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$. D'autre part $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$ en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)$.

   Nous aurons besoin de u^2 et u^3 : $u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$ et en fait $u^3 = x^5\epsilon(x)$. (On note abusivement $\epsilon(x)$ pour différents restes.)

   Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

   Finalement

$$\begin{aligned}\tan x &= \sin x \times \frac{1}{\cos x}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)\right)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$

9.3.4 Intégration

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ dont le DL en $a \in I$ à l'ordre n est $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$.

Théorème 4.

Notons F une primitive de f. Alors F admet un DL en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$F(x) = F(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + (x-a)^{n+1}\eta(x)$$

où $\lim_{x\to a}\eta(x) = 0$.

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(a)$ près.

Exemple 10.

Calcul du DL de $\arctan x$.

On sait que $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $F(x) = \arctan x$, on écrit

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

Et comme $\arctan(0) = 0$ alors $\arctan x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

Exemple 11.

La méthode est la même pour obtenir un DL de $\arcsin x$ en 0 à l'ordre 5.

$\arcsin' x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-x^2)^2 + x^4\epsilon(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\epsilon(x)$.

Donc $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5\epsilon(x)$.

9.4 Applications

9.4.1 Calculs de limites

Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées ! Il suffit juste de remarquer que si $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = c_0$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x}$

9.4.2 Calcul scientifique

Exemple :(Calcule estimation de e)
nous avons

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdot + \cdot + \cdot + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\lambda x} \quad , 0 < \lambda < 1.$$

Si $|x| \leq 1$, alors, en prenant $n = 8$, on a pour le reste l'estimation suivante $R_8 = \frac{1}{(9)!}3 < 10^{-5}$

La formule obtenue en posant $x = 1$ permet de calculer la valeur approchée du nombre e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdot + \cdot + \cdot + \frac{1}{8!}$$

Si l'on effectue les calculs en prenant 6 chiffres après la virgule, puis, arrondissant le résultat, en conservant 5 chiffres, on trouve $e = 2,71828$. Les quatre premiers chiffres après la virgule sont exacts puisque l'erreur n'excède pas le nombre $\frac{3}{9!}$ ou $0,00001$.

9.4.3 Calcul d'un extremum local d'une fonction

Si au point $x = a$ $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$, la fonction peut avoir soit un maximum, soit un minimum en ce point, mais peut également ne pas avoir d'extremum. Dans de pareils cas nous avons recommandé de déterminer les extremums en étudiant le comportement de la dérivée première à gauche et à droite du point critique $x = a$.

Nous allons montrer maintenant comment cette question peut être résolue à l'aide de la formule de Taylor

Supposons que non seulement $f''(x)$, mais aussi les dérivées successives de la fonction $f(x)$, jusqu'à l'ordre n inclusivement, s'annulent au point $x = a$
mais que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$

la formule de Taylor pour la fonction $f(x)$ prendra la forme :

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

où c est un nombre compris entre a et x.

E x e m p l e. Trouver les maximums et les minimums de la fonction

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

S o l u t i o n . Cherchons les valeurs critiques de la fonction

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Nous trouvons de l'équation

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

que l'unique point critique est $x = 1$ (car cette équation n'a qu'une seule racine réelle).

Déterminons la nature du point critique $x = 1$

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0$ pour $x = 1$,

$f'''(x) = 24x - 24 = 0$ pour $x = 1$,

$f^{VI}(x) = 24 > 0$ quel que soit x.

Par conséquent, la fonction $f(x)$ a un minimum au point $x = 1$.

Chapitre 10

Annexe B. Dérivée numérique

Lorsque l'on dispose de la forme analytique d'une fonction, il est souvent possible de la dériver analytiquement. C'est souvent une bonne façon de faire afin d'obtenir ses dérivées numériques en différents points. Il peut arriver néanmoins que la forme analytique d'une dérivée soit etrêmement lourde à manipuler. Dans ce cas, il peut être préférable de pouvoir évaluer une dérivée par des méthodes numériques. De même, il arrive que la forme analytique d'une fonction ne soit pas connue mais que l'on souhaite tout de même disposer d'une évaluation numérique de sa dérivée. C'est le cas, par exemple, lorsque la fonction qui nous intéresse provient de la solution d'un problème ou d'une simulation. Dans ce cas, seule une évaluation numérique de la dérivée peut être réalisée.

Proposition 10.0.1 (Méthode simple d'ordre 1)**.**
Soit une fonction f deux fois d'erivable dont on souhaite évaluer la dérivée en x. On définit l'erreur comme $E(h) =: \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$. *Pour tout h, il existe $\xi \in [x; x+h]$ tel que*

$$E(h) \leq \frac{|f''(\xi)|}{2}h$$

Proposition 10.0.2 (Différences centrées d'ordre 2)**.**
Soit f une fonction trois fois continûment dérivable.
La suite $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ *converge vers $f'(x)$ et jouit d'une convergence d'ordre 2.*
Tel que

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2, \qquad \xi \in [x-h; x+h].$$

Proposition 10.0.3 (Différences centrées d'ordre 4)**.**
Soit f une fonction cinq fois continûment dérivable en x.
On a

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi).$$

Cette formule est dite de différence centrée d'ordre 4.

Différences décentrées : Dans certains cas, il n'est pas possible de calculer la valeur de f des deux côtés de x. Il peut alors être utile d'approximer la dérivée en n'utilisant que des évaluations de f venant d'un seul côté. La manière de procéder dans ce cas est identique. On fixe les abscisses où f est évaluée. On calcule ensuite le polynôme d'interpolation que l'on dérive.

$$f'(x) \simeq \frac{3f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{2h}$$

Proposition 10.0.4 (D'erivées d'ordre 2)**.**
Soit f une fonction quatre fois continûment dérivable en x.
On a

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Bibliographie

[1] N. Piskounov, *Calcul Differentiel Et Integral*, Editions Mir (1980).

[2] A.Bodin, N.Borne et M.Bourdon, *ANALYSE*, Exo7, Université de lile, Version 1.00 (2016).

[3] A.Quarteroni, F.Saleri et P.Gervasio, *Calcul Sientifique*, Editions Springer (2010).

[4] Meddour Belkacem, *Polycopié : Cours de Méthodes Numériques, 2 année LMD-Sciences et Techniques,* Université Abbas Laghrour (2016).

[5] Q. Louveaux, *Polycopié : Introduction à l'Analyse Numérique,* Universite de Liège, Faculté des Sciences Appliquées (2009).