République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et
de la recherche scientifique Université de Tissemsilt
Faculté des sciences et de la Technologie
Département des sciences et de la Technologie

Intitulé du polycopié

ANALYSE MATHÉMATIQUE
MATHS3
COURS ET EXERCICES

Préparé par :

MERZOUGUI Mokhtar BIROUD Kheireddine

Année Universitaire 2022-2023

Préface

Ce cours a été rédigé pour les étudiants du deuxième année de **l'école supérieure de management** et ainsi aux étudiants du deuxième année du **la faculté des sciences téchnologique dont les spécialités** suivantes : **génie civil, génie mécanique, génie électronique et petrochimie** . Chaque chapitre est suivi d'un certain nombre d'exercices. Il est fortement conseillé d'essayer de faire les exercices et ceci pour la bonne préparation des examens.

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

Sommaire

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. *Soit* $(u_0, u_1, ..., u_n, ...)$ *une suite de nombres rèels ou complexes. Formons les sommes*

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 \\ S_1 &= u_0 + u_1 \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &\dots \\ S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \text{ (somme partielle d'ordre } n \text{)} \end{aligned}$$

Si (S_n) *a une limite* S *, finie ou non, quand* n *tend vers* $+\infty$*, on dit que la série* $u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$ *(ou que la série de terme général* u_n*) a pour somme* S*, et l'on écrit*

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$$

ou

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Si de plus S est finie, la série est dite convergente. Une série non convergente est dite divergente.

Exemple 1.1. *Considérons la série*

$$1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$$

c'est une progression géométrique de premier terme 1 et de raison $q,$ $(q \neq 0)$. La somme des n premiers termes (lorsque $q \neq 1$) est égale à

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

1. Si $|q| < 1,$ $q^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et, par conséquant,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$$

Ainsi lorsque $|q| < 1$, la série converge et sa somme est

$$S = \frac{1}{1 - q}$$

2. Si $|q| > 1,$ $q^n \to \infty$ lorsque $n \to +\infty$ et $\frac{1-q^n}{1-q} \to \infty$. Ainsi lorsque $|q| > 1,$ la série diverge.

3. Si $q = 1$, la série s'écrit

$$S_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$$

par conséquant

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

la série diverge.

Définition 1.2. *La série $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty} u_n$ est appelée reste d'ordre m de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$.*

Théorème 1.1. *Si la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et si sa somme est S, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n$, où λ est un nombre fixé, converge aussi est sa somme est λS.*

Théorème 1.2. *Si les séries $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent et ont pour sommes S et S', les séries*

$$\sum_{n \geq 0} (u_n \pm v_n)$$

convergent également et ont pour sommes $S \pm S'$.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Théorème 1.3. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, son terme général* u_n *tend vers zéro lorsque* n *tend vers l'infini, i.e.*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Preuve. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si la série est convergente de somme S, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Exemple 1.2. *Soit* $\sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
Calculons la limite du terme général u_n.
$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, *donc* $\sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ *diverge.*

Théorème 1.4. **a)** $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente* $\Rightarrow \forall k$, $\sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente.*

b) $\exists k$, $\sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente* $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

c) $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente* $\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{\infty} u_n = 0$.

Corollaire 1.1. *La nature d'une série ne change pas si l'on modifie un nombre fini de ses termes.*

1.3 Critère de Cauchy pour les séries

Théorème 1.5. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série. Pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N *tel que*

$$n \geq m > N \Rightarrow |u_{m+1} + u_{m+2} + ... + u_n| \leq \varepsilon$$

Exemple 1.3. *La série harmonique* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente. En effet, pour tout* $m \geq 1$, *on a*

$$S_{2m} - S_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + ... + \frac{1}{2m} > \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + ... + \frac{1}{2m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

la série diverge car en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *et en posant* $m = N$ *et* $n = 2m$ *pour tout* N, *la négation du critère de Cauchy est vérifiée*

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall N \ \exists m \, \exists n : \quad [n \geq m \geq N \ \ et \ |S_n - S_m| < \varepsilon]$$

1.4 Suites et séries

Théorème 1.6. *La suite numérique $(a_n)_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = a_{n+1} - a_n$ pour $n \geq 1$ est convergente.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} - a_0.$$

Exemple 1.4. *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En effet,*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = a_{n+1} - a_n$$

avec

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

on a

$$S_n = -\frac{1}{n+1} + 1$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ et la série est convergente.

Exemple 1.5. *La série $\sum_{n\geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$est divergente. En effet,*

posons que $a_n = \sqrt{n}$, on a

$$S_n = \sqrt{n+1}$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série diverge.

1.5 Séries à termes positifs

Définition 1.3. *Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout n.*

Théorème 1.7 (Condition nécéssaire et suffisante)**.** *Pour qu'une série à termes positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée.*

Preuve. La suite des sommes partielles (S_n) vérifie $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$, ainsi (S_n) est croissante. Elle converge donc si, et seulement si, elle est majorée.

Remarque 1.1. *Une série à termes positifs divergente tend nécessairement vers* $+\infty$.

Exemple 1.6. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{e^n}$ *est convergente. En effet,*

$$\begin{aligned} S_m &= 1 + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^m} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{e^{m+1}}}{1 - \frac{1}{e}} \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} \end{aligned}$$

Donc la suite $\{S_m\}$ *est majorée par* $\frac{1}{1-\frac{1}{e}}$ *La série étant à termes positifs elle converge par l'utilisation du theorème 3.7.*

Théorème 1.8. *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n \leq v_n$ *pour tout* n, *on a :*

Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *est convergente alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *diverge aussi.*

Exemple 1.7. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+1}$ *est convergente. En effet* $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. *Le dernier terme est l'un des termes de la série de Reimman (voir le corollaire 3.3) (converge car* $\alpha = 2 > 1$*) par le critère de comparaison on obtient la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+1}$ *est convergente.*

Théorème 1.9. *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n \sim v_n$ *où encore* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *les séries sont toutes deux convergentes où toutes deux divergentes.*

Exemple 1.8. *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n}{n^3+n^2+n+1}$ *est convergente. En effet,*

$$u_n = \frac{n}{n^3+n^2+n+1} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \sim \frac{1}{n^2}$$

puisque la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ *est convergente, alors* $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n+2}{n^3+n^2+n+1}$ *est convergente aussi.*

Exemple 1.9. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *est divergente. En effet,*

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$$

puisque la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *est divergente, alors la série* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *est divergente aussi.*

Corollaire 1.2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n \sim av_n$ *où encore* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = a$ $(a$ *fini,* $\neq 0)$, *les séries sont toutes deux convergentes où toutes deux divergentes.*

Exemple 1.10. *La série* $\sum_{n\geq 0}\frac{4n}{n^2+1}$ *est divergente. En effet,*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{4n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 4$$

comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum_{n\geq 0}\frac{4n}{n^2+1}$ *diverge aussi.*

Théorème 1.10 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Supposons que*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

Si $l < 1$, *la série est convergente. Si* $l > 1$ *la série est divergente. Si* $l = 1$ *on ne peut rien dire.*

Exemple 1.11. *La série* $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{3^n}$ *est divergente. En effet,*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{n}\frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$$

Donc la série est convergente.

Théorème 1.11 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Supposons que*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$$

Si $l < 1$, *la série est convergente. Si* $l > 1$ *la série est divergente. Si* $l = 1$, *on ne peut rien dire.*

Exemple 1.12. *La série* $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{e^n}$ *est convergente. En effet,*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e} < 1$$

Théorème 1.12 (Comparaison des critères de Cauchy et de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Si la limite*

$$l = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe, alors

$$l = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$$

Remarque 1.2. *Le critère de Cauchy est donc plus fort que celui de d'Alembert.*

Exemple 1.13. *Soit la série de terme général*

$$u_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad a \in]0,1[\,,$$

alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 2a & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{a}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *n'existe pas, par contre*

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ est pair} \\ a \quad \sqrt[n]{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$$

Corollaire 1.3. *Soit α un paramètre réel. La série*

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots (\text{série de } Riemann)$$

est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leq 1$.

Corollaire 1.4. *Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une série à termes positifs. Si $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$ pour $n \to +\infty$, où k est une constante positive. Alors*

a) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *est convergente si $\alpha > 1$.*

b) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *est divergente si $\alpha \leq 1$.*

Exemple 1.14. *La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{10} + \sqrt{n} + 1}$ est convergente. En effet, $\frac{1}{n^{10}+\sqrt{n}+1} \sim \frac{1}{n^{10}}$.*

1.6 Séries à termes quelconques

1.6.1 Séries absolument convergentes

Définition 1.4. *Une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est dite absolument convergente si la série des modules $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.*

Théorème 1.13. *Une série absolument convergente est convergente.*

Définition 1.5. *Une série est dite semi-convergente si elle est convergente et n'est pas absolument convergente.*

1.6.2 Séries alternées

Définition 1.6. *Une série est dite alternée si ses termes sont alternativement positifs et négatifs. On note*

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n v_n, \quad avec\ v_n \geq 0.$$

Théorème 1.14 (Théorème de Leibniz)**.** *Si la suite (v_n) est décroissante et tend vers zéro, la série $\sum_{n\geq 0} (-1)^n v_n$ est convergente. De plus on a*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n v_n\right| \leq v_{n+1}.$$

1.7 Multiplication des séries

Théorème 1.15. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes, U et V leurs sommes. Posons*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + ... + u_n v_0 = \sum_{i+j=n} u_i v_j.$$

Alors, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ (appelée série produit des séries données) est absolument convergente, et sa somme est UV.

Exemple 1.15. *La série produit de deux séries convergentes peut être divergente. Calculons par exemple le produit de la série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

par elle même, on aura

$$w_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

il est évident que pour tout n, $|w_n| \geq 1$.

1.8 Applications économiques des séries numériques

◇ **Application : Série des chiffres d'affaires.**

La clientèle d'une entreprise augmente de 10 pour cent par an, si bien que son chiffre d'affaires augmente aussi de 10 pour cent par an. En notant u_0 le chiffre d'affaires initial, et u_n le chiffre d'affaires l'année n, on a $u_n = u_0 \times (1.1)^n$. La suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique. Le chiffre d'affaires cumulé de l'année 0 à l'année n est donné par la suite des sommes partielles $(S_n)_n$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-(1.1)^{n+1}}{1-1.1} = 10u_0((1.1)^n - 1).$$

1.9 Exercices

Exercice 1.1. **Soit**

$$u_n = \frac{2}{n^2-1} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

❶ **Écrire u_n sous la forme**

$$u_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} \qquad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

❷ **Calculer la somme** $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

Exercice 1.2. **Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries de termes généraux**

$$w_n = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad t_n = u_n^2$$

sont convergentes.

Exercice 1.3. **Soient les deux suites (u_n) et (v_n), on suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$.**

❶ **Montrer que la suite (v_n) et la série $\sum u_n$ sont de même nature.**

Exercice 1.4. **Sommer les séries suivantes**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^{n-2}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} nq^n \quad \text{avec}(0 < q < 1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 1.5. **Trouver la nature de la série qui a pour terme général**

❶ $u_n = \dfrac{1+n^2}{n^2}$ ❷ $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ ❸ $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

❹ $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$ ❺ $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ ❻ $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

❼ $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln n + 5^n}$ ❽ $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ❾ $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

<u>Exercice</u> 1.6. **Trouver la nature de la série qui a pour terme général,**

$$❶\ u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right), \quad ❷\ u_n = \sqrt[3]{\frac{n}{n^6+1}}, \quad ❸\ u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^{10}}\right),$$

$$❹\ u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^a+1}, \quad ❺\ u_n = ne^{\frac{1}{n}} - n, \quad ❻\ u_n = \frac{1}{\ln(n)^n},$$

$$❼\ \frac{n^{1000}}{n!}, \quad ❽\ u_n = \frac{2^n}{n^2}.$$

<u>Exercice</u> 1.7. **Etudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.**

$$❶\quad u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)}, \qquad ❷\quad u_n = \frac{1}{(\ln n)^n},$$

$$❸\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}\arctan\left(\frac{1}{n}\right), \qquad ❹\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$❺\quad u_n = (-1)^n\frac{1}{\ln n}, \quad ❻\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1},$$

$$❼\quad u_n = \frac{\cos(2n)}{n^2+1}, \quad ❽\quad u_n = n\cos\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

<u>Exercice</u> 1.8. **Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.**

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

<u>Exercice</u> 1.9. **Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et u_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par**

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}.$$

❶ Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

❷ En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Exercice</u> 1.10.

Trouver la nature de la série du terme général $u_n = \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$

Exercice 1.11.

❶ Soit (u_n) une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice 1.12.

❶ Soit (u_n) une suite positive telle que la série de terme général u_n diverge. Pour tout n, on pose $S_n = u_0 + ...u_n$. Etudier en fonction de α la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Exercice 1.13. Calculer les formes des séries suivantes :

❶ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$.
❷ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$.

❸ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
❹ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$.

❺ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$.
❻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+5)}$.

❼ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.
❽ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n-3}$.

❾ $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n\left(n^2-4\right)}$.
❿ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n\left(n^2-1\right)}$.

Exercice 1.14.

❶ Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$.

❷ Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{n(n-1)(n+2)}$.

❸ Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

❹ Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{e^n}{3^n} + \frac{\ln 2^n}{n^3-n}\right)$.

❺ Montrer, par induction, que pour tout entier $p > 0$:

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{p(p+3)}{4(p+1)(p+2)}.$$

En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

❻ Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\text{Arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \text{Arctg}\,\frac{1}{n} - \text{Arctg}\,\frac{1}{n+1}.$$

En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \text{Arctg}\,\frac{1}{n^2+n+1}$.

❼ **Trouver les trois constantes α, β et μ de sorte que pour tout entier $n \geq 3$:**

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

❽ **Montrer que pour tout entier $p \geq 1$:**

$$(e-1) \sum_{n=1}^{P} ne^{-n} = \frac{1-e^{-p}}{1-e^{-1}} - pe^{-p}.$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}.$$

❾ **Pour quelles valeurs des deux nombres réels α et β la série**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(n(n+1)^{\alpha}(n+2)^{\beta}\right),$$

converge-t-elle ? Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

❿ **Soit (a_n) la suite de nombres réels définie par**

$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ **et** $a_0 = a_1 = 1$.

1) Montrer, par induction, que pour tout entier $n \geq 0$: $a_n \geq n$.

2) En déduire la somme des deux séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n+1}},$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_{n-1}a_{n+1}}.$$

<u>Exercice</u> 1.15. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

❶ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$.

❷ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3+1}{n^3+5}$.

❸ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

❹ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin 5n^2}{n^2+1}$.

❺ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n!}{n^2}$.

❻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 4n}{n^2}$.

❼ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

❽ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n^2+1)}}$.

❾ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}$.

❿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$.

<u>Exercice</u> 1.16. **Etudier la convergence des séries suivantes :**

❶ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

❷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2+1}}$.

❸ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$.

❹ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\ln n}$.

❺ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

❻ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n^n}{(n+2)!}$.

❼ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(3n+1)}{(n+1)!}$.

❽ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right)$.

❾ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{25}}{\operatorname{sh} n}$.

❿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 1.17. Etudier la convergence des séries suivantes :

❶ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

❷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n!}{n^3}$.

❸ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$.

❹ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}$.

❺ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin(2n+1)\frac{\pi}{4}\right)^n$.

❻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin(2n+2)\frac{\pi}{4}\right)^n$.

❼ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$.

❽ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$.

❾ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n}$.

❿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 1.18. Etudier la convergence des séries suivantes :

❶
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

❷
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Exercice 1.19. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2};\quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}};\quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3};\quad S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$S_5 = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-n}).$$

Exercice 1.20. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 1.21. Les sommes suivantes sont-elles finies ?

$$S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n;\quad S_2 = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}};\quad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}; S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}.$$

Exercice 1.22. **Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général**

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$

Exercice 1.23. **Etudier la nature de la série de terme général u_n :**

❶ $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$ ❷ $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$ ❸ $u_n = \frac{n+1}{n-7}$

❹ $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$ ❺ $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$ ❻ $u_n = \frac{1}{n!}$

❼ $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ ❽ $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ ❾ $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

❿ $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 1.24.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ est semi-convergente.

Exercice 1.25. **Etudier la convergence de la série numérique de terme général u_n :**

❶ $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$. ❷ $u_n = \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{C}$.

❸ $u_n = na^{n-1}, a \in \mathbb{C}$. ❹ $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.

❺ $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. ❻ $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

❼ $u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 1.26. **Calculer**

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \textbf{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}.$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \textbf{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$$

Exercice 1.27. **Etudier la nature des séries de terme général et calculer leur somme :**

❶ $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \quad n \geq 3.$ ❷ $u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), n \geq 2.$

❸ $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right), \quad n \geq 1.$

Exercice 1.28.

Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b, c sont trois réels vérifiant $a + b + c = 0$, on pose pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}.$$

Montrer que la suite de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 1.29.

Etudier la convergence des séries de terme général :

❶ $u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$ ❷ $u_n = \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln(n))^{2011}$

❸ $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)}dx$ ❹ $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$

❺ $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$ ❻ $u_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin(\alpha))^{2n}$.

Exercice 1.30.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\pi\mathbb{N}$$

❶ **On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser**

a) **La nature de la série $\sum u_n$.**

b) **La nature de la suite (u_n).**

❷ a) **Si $a_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, quelle est la nature de la série $\sum a_n$?**

b) **Quelle est la nature de la suite (u_n) pour $a = 1$.**

Exercice 1.31.

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}e^{-u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

❶ **Nature de la série $\sum u_n$?**

❷ **Nature de la série $\sum(-1)^n u_n$?**

Exercice 1.32.

Montrer que la suite $u_n = \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ converge, on pourra d'abord montrer que la série de terme général

$$z_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

est convergente.

Exercice 1.33.

Nature de la série de terme général (convergence et absolue convergence).

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Exercice 1.34.

Montrer que les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Ne sont pas de mêmes natures et que pourtant $u_n \sim v_n$.

Exercice 1.35. **On pose**

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

❶ **Montrer que la suite $f(n)$ est positive et décroissante. Au moyen d'une intégration par parties donner une relation de récurrence entre $f(n)$ et $f(n-1)$.**

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$

$$f(n) = \frac{n!}{e}\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right).$$

❷ **Montrer que l'on a :**

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la nature des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n); \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n).$$

❸ **Déterminer le rayon de convergence de la série entière**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) x^n.$$

Exercice 1.36. **On considère la série numérique de terme général u_n pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:**

$$u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}$$

❶ **Montrer que si cette série est convergente pour une valeur a donnée, elle converge pour tout $b \geq a$.**

❷ **Montrer que si $a \leq 2$ la série est divergente.**

On pourra utiliser un développement limité de $\ln(u_n)$.

❸ **On pose $a = 2 + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$**

Montrer que u_n est équivalent à $\exp\left(-\frac{1}{6}n^{\varepsilon}\right)$. En déduire que la série est alors convergente.

❹ **Donner toutes les valeurs de a pour lesquelles cette série converge.**

Exercice 1.37.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

❶ **a) Calculer u_0.**

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}.$$

❷

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}.$$

c) Montrer que la série de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Chapitre 2

Fonctions à deux variables

Sommaire

2.1 Généralités :

Dans ce chapitre nous allons étudier les fonctions à de deux variables c'est à dire à chaque couple (x, y) de valeur de deux variables indépendantes x et y correspond une valeur bien determinée de la variable dépendante z qu'on note $z = f(x, y)$ où f désigne une fonction de deux variables.

Mathématiquement, on devra donc étudier des fonctions qui ne sont plus définies sur un intervalle (ou une partie quelconque) de $\mathbf{R}$, mais sur une partie de $\mathbf{R}^2$ avec l'ensemble d'arrivé pourra être $\mathbf{R}$ ou bien une partie de $\mathbf{R}$.

• **Distance :**

Dans $I\!R$ la distance entre deux réels x et y est donnée par $d(x, y) = |x - y|$.

Dans $I\!R^2$: la distance entre deux points $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ est donnée par

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}.$$

• **Norme :**

Définition 2.1. *Soit* $(E, +, .)$ *un* $I\!R-$*espace vectoriel , on appelle norme sur* E *toute application* N *de* E *dans* R^+ *telle que :*
1. $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E,$
2. $\forall \lambda \in I\!R, \quad \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Exemple 2.1.
⋆ ***Quelques normes usuelles sur*** $I\!R^2$ ***:***

1. ***La norme Euclidienne :*** *notée*

$$N_2(x) = ||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in I\!R^2.$$

2. ***La norme du max :*** *notée*

$$N_\infty(x) = ||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \forall x = (x_1, x_2) \in I\!R^2.$$

3. ***La norme du somme :*** *notée*

$$N_1(x) = ||x||_1 = \max\{|x_1|, |x_2|\} \quad \forall x = (x_1, x_2) \in I\!R^2.$$

Définition 2.2. *Soient* N *et* $\overline{N}$ *deux normes définie sur un espace vectoriel* E*. On dit que* N *et* $\overline{N}$ *sont équivalentes si et seulement si il existe deux constantes* C_1 *et* C_2 *positives telle que*

$$C_1 N(x) \leq \overline{N}(x) \leq C_2 N(x), \quad \forall x \in E$$

Exemple 2.2. *Les trois normes* N_1*,* N_2 *et* N_∞ *définie dans l'exemple 2.1 sont équivalentes.*

• **Cercle, Disques fermés et ouverts de** $I\!R^2$ **:**

Définition 2.3. *On appelle cercle de centre* $X_0 = (x_0, y_0) \in I\!R^2$ *et de rayon* $r > 0$*, noté* $C(x_0, r)$*, l'ensemble des points de* $I\!R^2$ *dont la distance à* X_0 *est strictement inférieure à* r *i.e*

$$D(x_0, r) = \{X \in I\!R^2, \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r\}$$

Définition 2.4. *On appelle disque ouvert de centre* $X_0 = (x_0, y_0) \in I\!R^2$ *et de rayon* $r > 0$*, noté* $D(x_0, r)$*, l'ensemble des points de* $I\!R^2$ *dont la distance à* X_0 *est strictement inférieure à* r *i.e*

$$D(x_0, r) = \{X \in I\!R^2, \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

Définition 2.5. *On appelle disque fermé de centre* $X_0 = (x_0, y_0) \in I\!R^2$ *et de rayon* $r > 0$*, noté* $\overline{D}(x_0, r)$*, l'ensemble des points de* $I\!R^2$ *dont la distance à* X_0 *est strictement inférieure à* r *i.e*

$$\overline{D}(x_0, r) = \{X \in I\!R^2, \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\}$$

Exemple 2.3. *Le disque ouvert par la norme du max dans* $I\!R^2$ *est un carré. En effet,*

$$||X - X_0||_\infty < r \Leftrightarrow \quad max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r \text{ et } |y - y_0| < r.$$

On observe que $|x - x_0| < r$ *représente une bande verticale de largeur* $2r$ *limitée par deux droites* $x = x_0 - r$ *et* $x = x_0 + r$*. De même pour* $|y - y_0| < r$ *représente une bande verticale de largeur* $2r$ *limitée par deux droites* $y = y_0 - r$ *et* $y = y_0 + r$*. L'intersection de ces deux bandes est un carré dont le centre* X_0*.*

- **Parties fermées et ouvertes de** $I\!R^2$ **:**

Définition 2.6. *Une partie* A *de* $I\!R^2$ *est dite ouverte si et seulement si pour tout* $X_0 \in A$*, il existe* $r > 0$ *tel que* $D(X_0, r) \subset A$*.*

Exemple 2.4.

1. *L'ensemble* $A_1 = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad x^2 + y^2 < 4\}$ *est un ouvert.*
2. *L'ensemble* $A_2 = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad y > x^2\}$ *est un ouvert.*

Définition 2.7. *Une partie* B *de* $I\!R^2$ *est dite fermée si son complémentaire dans* $I\!R^2$ *est ouverte.*

Exemple 2.5.

1. *L'ensemble* $A_1 = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad x^2 + y^2 \geq 4\}$ *est un fermé.*
2. *L'ensemble* $A_2 = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad y \geq x^2\}$ *est un fermé.*

- **Partie bornée de** $I\!R^2$ **:**

Définition 2.8. *Une partie* M *de* $I\!R^2$ *est dite bornée lorsque elle est incluse dans un disque. Autrement dit, une partie* M *de* $I\!R^2$ *est dite botnée si et seulement si, il existe* $r > 0$ *tel que pour tout* $X \in M$ *on* $||X|| \leq r$*.*

2.2 Fonctions numériques de deux variables.

Définition 2.9. *On appelle fonction numérique de deux variables est une application*

$$\begin{array}{rcll} f & : & A \subseteq I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad z = f(x, y), \end{array}$$

où A est une partie de $I\!R^2$

Exemple 2.6.

1.

$$\begin{array}{rcll} f & : & I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad f(x, y) = 3x^2y + x, \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcll} f & : & I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad f(x, y) = (x + y)e^{x^2}, \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcll} f & : & I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad f(x, y) = x^3 + y^3 + 12xy, \end{array}$$

2.2.1 Domaine de définition.

Le domaine de définition d'une fonction numérique de deux variables noté D_f est l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels $f(x, y)$ est bien définie cést à dire :

$$D_f = \{(x, y) \in I\!R^2 / f(x, y) \quad \text{est définie.}\}$$

Exemple 2.7.

1.

$$\begin{array}{rcll} f & : & I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad f(x, y) = \dfrac{x - y}{\sqrt{x}}, \end{array}$$

$$D_f = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad x > 0\}$$

2.

$$\begin{array}{rcll} f & : & I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad f(x, y) = (x + y)\ln(x^2 + y^2), \end{array}$$

$$D_f = \{(x, y) \in I\!R^2 / x^2 + y^2 \neq 0\}$$

ou

$$D_f = I\!R^2 \backslash \{(0, 0)\}$$

3.

$$\begin{array}{rcll} f & : & I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, \end{array}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \neq 0\}$$

ou

$$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(y = x,\ y = -x)\}$$

4.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto \quad f(x,y) = xy \ln \sqrt{x}, \end{array}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$$

Remarque 2.1. *Le domaine de définition dúne fonction numérique de deux variables est le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'une de ses parties.*

2.2.2 Graphique d'une fonction à deux variables.

Définition 2.10. *Soit f une fonction définie sur $A \subseteq \mathbb{R}^2$, c'est à dire,*

$$\begin{array}{rccl} f & : & A \subseteq \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto \quad z = f(x,y). \end{array}$$

On appelle Graphe de f et on le note G_f lénsemble

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \text{tel que}, \ z = f(x,y)\}$$

Remarque 2.2.
Le graphique d'une fonction numérique de deux variables est une partie de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.8.
1.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto \quad f(x,y) = x^2 + y^2, \end{array}$$

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{avec} \quad z = x^2 + y^2\}$$

2.

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto \quad f(x,y) = x + y, \end{array}$$

$$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{avec} \quad z = x + y\}$$

2.2.3 Courbes de niveau.

Définition 2.11. *Soit f une fonction définie sur $A \subseteq \mathbb{R}^2$, c'est à dire,*

$$\begin{array}{rccl} f & : & A \subseteq \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto \quad z = f(x,y). \end{array}$$

On appelle courbes de niveau f et on le note $N(f)$ lénsemble

$$N(f) = \{(x, y) \in A, \quad \textit{tel que,} \quad f(x, y) = c, \}$$

où c est une constante.

Exemple 2.9.
Soit

$$\begin{array}{rccl} f & : & I\!R^2 & \to I\!R \\ & & (x, y) & \mapsto \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + 1, \end{array}$$

$$D_f = \{(x, y) \in I\!R^2, \quad \textit{avec} \quad x^2 + y^2 + 1 = c\}$$

1. *Si $c < 1$, alors $N(f) = \emptyset$,*
2. *Si $c = 1$, alors $N(f) = \{(0, 0)\}$,*
3. *Si $c > 1$, alors $N(f)$ l'ensemble des cercles de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c + 1}$.*

2.3 Limites et continuité.

2.3.1 Limites d'une fonction de deux variables.

Définition 2.12. *Soit f une fonction définie au voisinage du point $M_0(x_0, y_0)$ sauf peut-être en $M_0(x_0, y_0)$. On dit que le nombre l est la limite de f lorsque $M(x, y)$ tend vers $M_0(x_0, y_0)$ et on écrit $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad d(M, M_0) < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Remarque 2.3.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \infty$$

si et seulement si

$$\forall A >> 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad d(M, M_0) < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| > A$$

Exemple 2.10.
1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0.$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin(x^2 + y^2) = 0.$

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x^2+y^2} = 1.$

Proposition 2.1. *Si la limite existe, alors elle est unique.*

Remarque 2.4. *La limite de f lorsque $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$ ne doit pas dépendre du chemin que parcourt le point x La limite de f lorsque $M(x,y)$ tend vers $M_0(x_0,y_0)$ ne doit pas dépendre du chemin que parcourt le point $M(x,y)$ pour tendre vers le point $M_0(x_0,y_0)$. Par conséquent, dès qu'une limite dépend du chemin elle n'existe pas.*

Exemple 2.11. *Sur le chemin $y = x$,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y-2}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2}{x-1} = 2.$$

Sur le chemin $y = x^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y-2}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-2}{x-1} = 2.$$

Remarque 2.5. *Certes sur l'exemple précédent, on a trouvé deux chemins qui ont donné la même limite cependant ce n'est pas suffisant pour conclure l'existence de la limite car on ne peut pas la calculer sur tous les chemins. Ainsi on s'accorde à utiliser la méthode des chemins plutôt pour montrer la non existence d'une limite. Plus explicitement, pour montrer la non existence d'une limite, il suffit de trouver deux chemins sur lesquels on aura deux limites différentes. En effet lorsqu'il s'agit d'étudier la limite en $(0,0)$, sur les chemins $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, dès que la limite dépend de α, on conclut qu'elle n'existe pas.*

Exemple 2.12. *On veut calculer*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x+y)}{x^2+y^2}.$$

Sur les chemins $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha+1)x^2}{x^2+\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha+1}{1+\alpha^2}.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

• ***Calcul des limites en coordonnées polaires***

On veut calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ en utilisant les coordonnées polaires, on pose :

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta.$$

Lorsque $(x,y) \to (0,0)$, $r \to 0^+$ et θ est un angle bien choisi.
Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} f(r,\theta).$$

La limite existe si elle ne dépend pas de θ.

Exemple 2.13. *1) On veut calculer en coordonnées polaires*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

On pose $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta.$$

Cette limite dépend de θ *donc elle n'existe pas.*

2) On veut calculer en coordonnées polaires

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-2}{x-1}.$$

On pose $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y-2}{x-1} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\theta + r\sin\theta - 2}{r\cos\theta - 1} = 2.$$

Remarque 2.6. *On étudiera les limites lorsque* $(x, y) \to (0, 0)$ *et dans des situations différentes c'est-à-dire quand* $(x, y) \to (a, b) \neq (0, 0)$, *on peut toujours ramener la limite au point* $(0, 0)$ *en effectuant un changement de variables.*

Remarque 2.7. *Les propriétés, le calcul, les opérations et les théorèmes usuels des limites d'une fonctions à une variable restent vrais pour les fonctions de deux variables.*

2.3.2 Continuité d'une fonction de deux variables.

Définition 2.13. *On dit que* f *est continue au point* $M_0(x_0, y_0)$ *appartenant à son domaine de définition* D_f *si et seulement si* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Définition 2.14. *On dit qu'elle est continue sur la partie* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *si et seulement si elle est continue en chaque point* $M \in A$ *on écrira alors* $f \in C^0(A)$ *et on lit "* f *est de classe* C^0 *sur* A *".*

Exemple 2.14.

1) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$.

2) Tout plynôme de deux variables est continu sur $\mathbb{R}^2$.

3) Soit f *définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrons que $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.
Il est clair que f *est continu sur* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. *Etudions sa continuité au point* $(0,0)$.
Pour cela calculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ *en coordonnées polaires.*
On pose $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0^+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0.$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = f(0,0)$, f *est donc continue au point* $(0,0)$ *et par conséquent* f *est continu sur* $\mathbb{R}^2$.

Remarque 2.8.

• *Les propriétés et les théorèmes usuels de la continuité d'une fonctions à une variable restent vrais pour les fonctions de deux variables.*

• *Une fonction* f *continue sur une partie fermée bornée* $A \subset \mathbb{R}^2$ *y atteint son maximum et son minimum, c'est-à-dire :*

$\exists M_1(x_1,y_1) \in A / m = \min\limits_A f(x,y) = f(x_1,y_1)$,
$\exists M_2(x_2,y_2) \in A / M = \max\limits_A f(x,y) = f(x_2,y_2)$.

2.4 Dérivées partielles et différentielle d'une fonction de deux variables.

Définition 2.15. *On dit que* f *possède une dérivée partielle par rapport à la variable* x *au point* $M_0(x_0,y_0) \in D_f$ *si et seulement si* $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ *existe. La dérivée partielle par rapport à la variable* x *au point* $M_0(x_0,y_0)$ *est notée* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *ou* $\partial_x f(x_0,y_0)$. *De même, on dit que* f *possède une dérivée partielle par rapport à la variable* y *au point* $M_0(x_0,y_0) \in D_f$ *si et seulement si* $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$ *existe. La dérivée partielle par rapport à la variable* y *au point* $M_0(x_0,y_0)$ *est notée* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ *ou* $\partial_y f(x_0,y_0)$.

Remarque 2.9. *La dérivée partielle par rapport à* x *notée* $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *obtenue en dérivant* f *par rapport à* x *et en supposant* y *constante et de même la dérivée partielle par rapport à* y *notée* $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *obtenue en dérivant* f *par rapport à* y *et en supposant* x *constante.*

Remarque 2.10.

• *Si une fonction réelle d'une seule variable est dérivable en un point alors elle est continue en ce point, dans le cas d'une fonction de plusieurs variables l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point.*

• ***Contre exemple.***

Soit f définie par ,

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textit{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

On observe que f n'est pas continue à l'origine. En effet, on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} \cos^2\theta\sin\theta = \cos^2\theta\sin\theta.$$

La limite dépend de θ d'où f n'est pas continue au point $(0,0)$.

Par ailleurs, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Exemple 2.15.
1) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *de la fonction :* $f(x,y) = 4x^3 + 7xy^2 - 6y + 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^2 + 7y^2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14xy - 6.$$

2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *de la fonction :* $f(x,y) = y\ln x + e^x$ *sur* $(0,+\infty)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x} + e^x$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln x.$$

Définition 2.16. *On dit que f est différentiable au point $M_0(x_0,y_0) \in D_f$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent et sont continues. La différentielle de f au point $M_0(x_0,y_0)$ est notée df et $df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$.*

Exemple 2.16. *Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et la différentielle de la fonction : $f(x,y) = e^{x-7y} + x^3$.*

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-7y} + 3x^2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -7e^{x-7y},$$

d'où

$$df(x,y) = (e^{x-7y} + 3x^2)dx - 7e^{x-7y}dy.$$

2.4.1 Dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de deux variables.

Définition 2.17.

• *On dit que* f *est de classe* C^1 *sur la partie* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *si et seulement si ses dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont continues sur* A *on écrira alors* $f \in C^1(A)$.

• *On dit que* f *est de classe* C^2 *sur la partie* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *si et seulement si ses dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont de classe continues* C^1 *sur* A *on écrira alors* $f \in C^2(A)$. *De plus on a les dérivées partielles du second ordre suivantes :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}).$$

Exemple 2.17.

Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction :

$$f(x,y) = e^x + 2x^3y^2.$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x + 6x^2y^2$$

,et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^3y.$$

Et par suite

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x + 12xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 12x^2y,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12x^2y.$$

Théorème 2.1. *Soit* f *une fonction définie sur* $A \subseteq \mathbb{R}^2$. *Supposons que* $f \in C^2(A)$, *alors, les dérivées partielles du second ordre mixtes sont égales c'est-à-dire :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in A$.

Exemple 2.18. *Vérifier que les dérivées partielles du second ordre mixtes de la fonction :* $f(x,y) = \frac{x+y^2}{x^2}$ *sont égales sur* $\mathbb{R}^2 \backslash \{x=0\}$.

En effet on a sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{x=0\}$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2 - 2x(x+y^2)}{x^4} = \frac{-x^2 - 2xy^2}{x^4}$$

,et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2}.$$

Et par suite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-4y}{x^3},$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4y}{x^3}.$$

2.4.2 Développement limité d'ordre deux d'une fonction de deux variables.

Théorème 2.2. *Soit* f *une fonction définie sur* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *et* $f \in C^2(A)$. *Alors pour tout point* $(x_0, y_0) \in A$ *et* $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + \left[h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right] \\ &\quad + o(h^2+k^2), \end{aligned}$$

où $o(h^2+k^2) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$

2.5 Extremum local d'une fonction de deux variables

Soient f une fonction définie sur $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$ et $(x_0, y_0) \in A$. Alors

1) Le point (x_0, y_0) est un point critique de f si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

2) Le point critique (x_0, y_0) réalise un maximum local de f si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right]^2 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0.$$

3) Le point critique (x_0, y_0) réalise un minimum local de f si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]^2>0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0.$$

4) Le point critique (x_0, y_0) ne réalise ni minimum local ni maximum local de f si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]^2<0.$$

5) Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right]^2=0,$$

on ne peut rien conclure

Exemple 2.19. *Trouver les points critiques de $f(x,y)=x^3+3xy-y^3\cdot$ puis déterminer leur nature.*

• *Les points critiques de f*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2+3y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x-3y^2=0. \end{cases}$$

Les points critiques sont : $(0,0)$ et $(1,-1)$.

On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=3.$$

Pour le point critique $(0,0)$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=3.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\right]^2=-9.$$

On conclut que le point $(0,0)$ ne réalise ni minimum ni maximum pour la fonction $f(x,y)$.

Pour le point critique $(1,-1)$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)=6, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)=6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,-1)=3.$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,-1)\right]^2=27$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)=6>0.$$

On conclut que le point $(1,-1)$ réalise un minimum de la fonction $f(x,y)$.

2.6 Exercices

Exercice 2.1. Calculer les limites suivantes quand elles existent :

❶
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{y}.$$

❷
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x^2-y^2}.$$

❸
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y.$$

❹
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ln(x^2+y^2).$$

❶
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

Exercice 2.2.

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

❶ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

❷ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

❸ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}.$

❹ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$

❺ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$

❻ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}.$

❼ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

❽ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}.$

❾ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}.$

❿ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y}{x^2+y^2}.$

Exercice 2.3.

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

❶ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2+\sin 2xy+\sin y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

❷ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x\sin y}{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}.$

❸ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^4}{\sin^2(x^2+y^2)}.$

❹ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2\sin y}{x^2+\operatorname{sh}^2 y}.$

❺ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin xy}{\operatorname{sh} x^2+\operatorname{sh}^2 y}.$

❻ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

❼ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x\operatorname{th} y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

❽ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{\sin(x^2+y^2)}.$

❾ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^3\frac{\sin(x^2-y^2)}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}.$

❿ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)+x^2\sin y}{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}.$

Exercice 2.4.

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \operatorname{tg} xy}{x^2+y^2}$.

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{tg} y}{x^2+y^2}$.

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Arctg} 2\left(x^2+y^2\right)+x^2\sin y}{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \operatorname{th} y^2$.

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln \sqrt[4]{1+x^2+y^2}}{\operatorname{sh}\left(x^2+y^2\right)}$.

$\boxed{6}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln\sqrt{1+\sqrt{x^2+(y-1)^4}}}{\sin\sqrt{x^2+(y-1)^4}}$.

$\boxed{7}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}$.

$\boxed{8}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sin\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\boxed{9}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln\left(x^2+y^2\right)$.

$\boxed{10}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1+x^4+y^4}{1+x^2+y^2}\right)}{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.

$\boxed{11}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)+y^4\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

$\boxed{12}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^4-y^4\right)+\sin 2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^6+y^6\right)} \times \ln\left(1+\left(x^2-y^2\right)^2+x^2y^2\right)$.

Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pour les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par.

Exercice 2.5.

Étudié la continuité des fonctions suivantes :

❶ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$

❷ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{\operatorname{Arctg} y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$

❸ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\operatorname{th} xy}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$

❹ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-\frac{1}{x^2y^2}} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0.\end{cases}$

❺ **Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x^2}e^{-\frac{y}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

❻ **Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Calculer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pour les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par.

❼ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{xy} & \text{si } xy\neq 0\\ 1 & \text{si } xy=0.\end{cases}$

❽ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} & \text{si } xy\neq 0\\ 1 & \text{si } xy=0.\end{cases}$

Exercice 2.6. Étudié la continuité des fonctions suivantes :

❶ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{\operatorname{sh} xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

❷
$f(x,y) = \begin{cases} y + \frac{1}{y} \operatorname{Arctg}(x^2y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$

❸ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} \operatorname{th}(xy^2) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

❹ $f(x,y) =$
$\begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2xy}{x^2\sin^2 t + y^2\cos^2 t} dt & \text{si} (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

❺ $f(x,y) = \begin{cases} xy \ln\left|\frac{x}{y}\right| & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

❻ $f(x,y) = \begin{cases} xe^{\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

❼ Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{2y^4}{x^2+y^4}$$

1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t, \alpha t) = 0$.

2) Peut-on en déduire que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe ?

❽ Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\} \cup \{(0,0)\}$. Montrer qu'il n'existe aucun nombre réel α pour lequel la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) =$
$\begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x-y}} & \text{si } x > y \\ \alpha & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

est continue en $(0,0)$.

Etudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par.

❾ Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et γ cinq constantes positives et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$f(x,y) =$
$\begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{\left(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2}\right)^\gamma} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$

Montrer que f continue en $(0,0) \iff \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

❿ Comment faut-il choisir la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) = \begin{cases} y\left[\frac{x}{y}\right] & \text{si } y \neq 0 \\ g(x) & \text{si } y = 0, \end{cases}$

soit continue aux points $(a,0)$?

Exercice 2.7.

❶ Comment faut-il choisir la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{e^y-1}{x^2+1}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ g(x) & \text{si } y = 0. \end{cases}$

soit continue aux points $(a,0)$?

❷ Comment faut-il choisir la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xe^x - ye^y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

soit continue aux points (a,a) ?

❸ **Comment faut-il choisir la fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ de sorte que la fonction $f :]0,1[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{cotg}(y\sqrt{x}) & \text{si } x \in]0,1[\\ & \text{et } y \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[\\ g(x) & \text{si } x \in]0,1[\text{ et } y = 0, \end{cases}$$

soit continue aux points $(a,0)$ avec $0 < a < 1$?

❹ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0.$$

2) Peut-on en déduire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0?$$

❺ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0.$$

2) Peut-on en déduire que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0?$$

❻ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \cos\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$$

et

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

n'existent pas, mais que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

❼ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xv(y) + yv(x)$ où $v(t) = 1$ si t est rationnel et 0 si t est irrationnel.**

Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

et que

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ et } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

n'existent pas.

❽ **Montrer que**

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1 2xye^{-x^2y}dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{y\to+\infty} 2xye^{-x^2y}\right)dx.$$

<u>Exercice</u> 2.8.

❶ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = 0$ mais que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

❷ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = 0$ mais que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

❸ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que $\nabla f(0,0) = 0$ mais que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

❹ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

❺ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Montrer que les deux fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$ mais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ n'existent pas.

❻ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(|x|+|y|) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1.

❼ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = e^{x-1} \sin xy.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

❽ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = xy + \ln \sqrt[3]{1 + x^2 + 2y^4}$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$.

❾ **Soit $f : B((0,0),2) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(1,0)$.

❿ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$f(x,y) = \cos(x^2+y) + \sin(x+y) + e^{x^3y}.$$

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 2.9.

❶ **Trouver une fonction homogène $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de degré 2 qui n'est pas continue.**

❷ **Soit $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α telle que $f(1,0) = 0$. Montrer que pour tout $a > 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = 0$.**

❸ Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x,y) = \int_1^{1+x^3} (\mathrm{ch}(xyt^3) + \sin(3xyt^2))dt.$
Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(2,0)$.

❺ Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dé finie par
$$f(x,y) = 10x^2 \cos y + \int_{x^2}^{y^2} \ln \sqrt{2 + x^4 + \cos(ty)}dt.$$
Etudier sa nature.

❼ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$f(x,y) = xy^3 + \ln \sqrt{1 + x^4 + 2y^2}.$
Calculer $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}}(1,1)$ avec $\mathrm{v} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

❾ La hauteur d'une montagne en chacun de ses points P est donnée par la fonction
$$h(x,y) = 3000 - 2x^2 - y^2,$$
où (x,y) sont les coordonnées de la projection du point P sur le plan de base muni d'un repère orthonormé dont l'axe Ox désigne la direction est et l'axe Oy la direction nord.
1) Dire si l'on commence par monter ou par descendre lorsque l'on se déplace depuis le point $Q = (30,-2)$ dans la direction sud-ouest.
2) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle la plus raide ?
3) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle nulle ?

❹ Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \int_{-x^2}^{y^2} \mathrm{ch}\left(yt^2 + x\right) dt.$$
Etudier sa nature.

❻ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(x^2 \sin^2 t + y^2 \cos^2 t\right) dt.$$
1) Montrer que pour tout $x, y > 0$:
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\pi}{x+y}, \frac{\pi}{x+y}\right).$$
2) En déduire que pour tout $x, y > 0$:
$$f(x,y) = \pi \ln\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

❽ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$f(x,y) = -x^2 + 2xy + e^{x+y}\cos x^2.$
Trouver son polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(0,0)$.

❿ La profondeur d'un cratère d'un volcan en chacun de ses points P est donnée par la fonction
$$p(x,y) = -500 + x^4y^2 + \ln\left(1 + 4x^2 + 5y^2\right),$$
où (x,y) sont les coordonnées de la projection du point P sur le plan de base muni d'un repère orthonormé dont l'axe Ox désigne la direction est et l'axe Oy la direction nord.
1) Dire si l'on commence par monter ou par descendre lorsque l'on se déplace depuis le point $Q = (1,2)$ dans la direction nord-ouest.
2) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle la plus raide ?
3) Au point Q, dans quelle direction la pente est-elle nulle ?

<u>Exercice</u> 2.10.

❶ Soient $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y).$$

1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x, x) = (g(x, y), h(x, y)).$$

2) L'existence des fonctions f est-elle liée à la condition imposée à g et h ?

❷ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui satisfont pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y^2 - y^3 + 2x \operatorname{Arctg} x,$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 3xy^2 + \frac{2y}{1 + y^2}.$$

❸ Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. En effectuant le changement de variables $u = bx + ay$ et $v = bx - ay$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

❹ Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles
$x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = af(x, y)$.

❺ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles
$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.
Vérifier que les solutions sont homogènes de degré 0.

❻ En effectuant le changement de variables $u = x - y$ et $v = x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

❼ Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h(x)$
soit solution de l'équation aux dérivées partielles
$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

❽ Trouver toutes les fonctions $g, h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x, y) = g(xy) + h\left(\frac{y}{x}\right)$
soit solution de l'équation aux dérivées partielles
$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln \frac{x^2}{y^2}$.

❾ Soit $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v > 0\}$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout $(x, y) \in E$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x+y)}{x+y}\right) = \ln(1 + x + y)^4.$$

❿ Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 g(y),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2xy^2 \ln y.$$

Exercice 2.11.

❶ Trouver toutes les fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right) + h(x),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2}.$$

❷ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - 4x^3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

❸ Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^3 g(x),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)& \\ + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= y^3 \sin 5x.\end{aligned}$$

❹ Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{x}g(xy)$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)& \\ &= -xf(x,y) + x^2y^2.\end{aligned}$$

❺ Soit $\lambda > 0$. En effectuant le changement de variables $u = \lambda x + y$ et $v = -\lambda x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

❻ Soient a, b et c trois constantes vérifiant $a \neq 0$ et $b^2 - ac > 0$. En posant

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

et en effectuant le changement de variables $u = \alpha x + y$ et $v = \beta x + y$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

❼ En effectuant le changement de variables $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui sont solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

❽ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, homogène de degré α.
1) Montrer que pour tout $(x,y) \in E$:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha(\alpha - 1)f(x,y).$$

2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, homogènes de degré 0.
3) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, homogènes de degré 1.
❾ Trouver les deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient les conditions initiales $g(0) = h(0) = 1$, $g'(0) = h'(0) = 0$ et $g''(0) = 1$ et telles que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(x)h(y)$ est harmonique.
❿ Trouver deux fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient les conditions initiales

$$g(1) = h(0) = 0 \text{ et } g(e) = h(1) = 1$$

et telles que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(x)h(y)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Exercice 2.12.

❶ **(Laplacien en coordonnées polaires)**
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$g(r,\theta) = f(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta).$$
Vérifier que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:
$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta).$$

❷ **En utilisant l'exercice précédent, trouver les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $f_2 :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 de sorte que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par**
$$f(x,y) = f_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + f_2\left(\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}\right),$$
soit harmonique.

❸ **Montrer que l'équation**
$$x^2 + 2e^y + \sin xy - 2 = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 0$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❹ **Montrer que l'équation**
$$e^{xy} + y^2 - x - 2 = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❺ **Montrer que l'équation**
$$1 - y^2 + x^2 y e^y = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

❻ **Montrer que l'équation**
$$x^3 + y^3 - x^2 y - 1 = 0,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un minimum local en 0.

❼ **Montrer que l'équation**
$$x^2 - 2x - y - \cos\pi y^2 + \ln\frac{1+y^4}{2} + e^{x(y-1)} = 0,$$
définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(1) = 1$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 1.

❽ **Montrer que l'équation**
$$\cos\left(x^2 + y\right) + \sin(x+y) + e^{x^3 y} = 2,$$
définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$. Montrer que la fonction ϕ admet un maximum local en 0.

❾ **Montrer que l'équation**
$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$$
définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = \phi(x)$ telle que $\phi(1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = \phi(x)$ en 1.

❿ **Soinet A un ouvert, $(a,b) \in A$ avec $a \neq 0$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, homogène de degré α telle que**
$$f(a,b) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$
Donner explicitement la fonction implicite $y = \phi(x)$ que f définit au voisinage du point a et qui vérifie $\phi(a) = b$.

Exercice 2.13. **Déterminer les extrémums locaux des fonction suivantes :**

❶ $f(x,y) = e^{x^2+y^2-2x+2y}$.

❷ $f(x,y) = x^3 + y^3 - e^{x+y}$.

❸ $f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$.

❹ $f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$.
Le maximum local obtenu est-il global ?

❺ $f(x,y) = x^2 + x\sin y - \frac{1}{4}\cos y + 5$.

❻ $f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$.
Montrer que $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -3$.

❼ $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin y$.

❽ $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)}$.

❾ $f(x,y) = (x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

❿ $f(x,y) = ye^{-\left(x^2+y\right)}$.
Le maximum local obtenu est-il global ?

Exercice 2.14. **Déterminer les extrémums locaux des fonction suivantes :**

$\boxed{1}$ $f(x,y) = x + y^2 - \mathrm{sh}(x+y)$.

$\boxed{2}$ $f(x,y) = x + y - \mathrm{sh}(x+y)$.

$\boxed{3}$ $f(x,y) = \ln\left(1+x^2+y^2\right)^4 - (x-1)^2 - y^2$.
Le maximum local obtenu est-il global ?
Même question pour le minimum.

$\boxed{4}$ $f(x,y) = 16e^{xy} + 16x^2 + y^2$.

$\boxed{5}$ $f(x,y) = e^{x^2} + \cos(x+y) + \sin(x+y)$.

$\boxed{6}$ $f(x,y) = 2x^3 + (x-y)^2 - 6y$.

$\boxed{7}$ $f(x,y) = -xy - e^{-xy} + \cos x$.

$\boxed{8}$ $f(x,y) = x^2 + \frac{9}{5}xy + y^2 + \mathrm{Arctg}\, xy$.

$\boxed{9}$ $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$,
avec $x, y > 0$.

$\boxed{10}$ $f(x,y) = x^2y(4-x-y)$.

$\boxed{11}$ $f(x,y) = 1 + 6x^2 - 3\left(1-(x-y)^2\right)^8$.

Exercice 2.15.

❶ **Soit** $\lambda > 0$**. Etudier, en fonction de** λ**, la nature des points stationnaires de la fonction** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + \lambda y^2.$$

Pour $\lambda \geq \frac{1}{4}$**, montrer que**

$$f(0,0) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y).$$

❷ **Soit** $\alpha \in \mathbb{R}$**. Montrer que la fonction** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{1+\alpha^2x^2+y^2},$$

possède un minimum local en $(0,0)$**.**

Trouver les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par.

❸ $f(x,y) = (x+y) + \sin(x+y) + \cos(x+y)$.

❹ $f(x,y) = \left|2\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right|$.

❺ **Soient E un ouvert, $(a,b) \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 admettant un maximum local en (a,b). Montrer que pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:**

$$u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2uv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \leq 0.$$

❻ **Trouver les extrema de la fonction $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+3x^2+y^2}.$$

❼ **Trouver les extrema de la fonction $f : [-2,0] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

❽ **Trouver les extrema de la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y).$$

❾ **Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{\pi}{2}, |y| \leq \cos x\right\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2.$$

Exercice 2.16.

❶ **Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \frac{3\pi}{4}\right\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = \sin(x-y) + \cos(x+y).$$

❷ **Trouver les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \sin(x+y).$$

Trouver le minimum des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par.

❸ $f(x,y) = (1-x+y)^2 + (1+x+y)^2 + (2+2x+y)^2$.

❹ $f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y-2)^2$.

❺ $f(x,y) = |x| + |y| + |x+y-2|$.

❻ **Soient $A = (7,1), B = (x,-x), C = (y,y)$ et $D = (8,4)$. Minimiser la somme des distances de A à B, de B à C et de C à D.**

❼ **Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ 1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_\alpha(x) = f(x, \alpha x)$ admet un minimum local en 0.**

2) Peut-on en déduire que la fonction f admet un minimum local en $(0,0)$?

❽ Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 25\}$. Trouver le minimum de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$.

❾ Trouver les extrema de la fonction $f : \overline{B((0,0),1)} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}.$$

❿ Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x+y}.n$$

Exercice 2.17.

$\boxed{1}$ Soit $f : \overline{B((0,0),2)} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \lim_{t \to 0} (\cos tx + y \sin tx)^{\frac{1}{2}}$$

1) Montrer que $f(x,y) = e^{xy}$.

2) Trouver les extrema de la fonction f.

$\boxed{2}$ Trouver les extrema de la fonction $f : \overline{B((2,0),2)} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \left| 2\sqrt{x^2+y^2} - \left(x^2+y^2\right) \right|.$$

$\boxed{3}$ Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4x \leq 0\}$. Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln(1+x-y) + e^{-\frac{1}{1+x-y}}$$

$\boxed{4}$ Trouver les extrema de la fonction $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy(x-y)$$

sous la condition $x + y = 8$.

$\boxed{5}$ Trouver les extrema de la fonction $f : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y$$

sous la condition $\sin x \sin y = \frac{1}{2}$.

$\boxed{6}$ $f(x,y) = x+2y$. $\boxed{7}$ $f(x,y) = x^2-y^2+xy$. $\boxed{8}$ $f(x,y) = 4x^2+(x-y)^2-4xy+1$.

$\boxed{9}$ $f(x,y) = x(1+y)+\ln\sqrt{2+x^2+y^2}$. $\boxed{10}$ $f(x,y) = \text{Arctg}\,(x^6+y^6+x^2+y^2+1)$.

$\boxed{11}$ $f(x,y) = \ln\sqrt{2+x^4+y^4}$. $\boxed{12}$ $f(x,y) = \text{Arctg}\,xy$.

Exercice 2.18.

❶ **Soit** $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x^2 + 2y^2 + 2x - 1 \leq 0\}$.
Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ **définie par**
$$f(x, y) = -x + y + 2.$$

❷ **Soit** $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$ $9x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$.
Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ **définie par**
$$f(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

❸ **Soit** $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x^2 + 2y^2 \leq 4\}$.
Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ **définie par**
$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

❹ **Soit** $E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1\Big\}$.
Trouver les extrema de la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ **définie par**
$$f(x, y) = x + x^2 + y^2.$$

❺ **Trouver le minimum de la fonction** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **définie par**
$$f(x, y) = x^2 + 6y^2$$
sous la condition $x^2 + 3\sqrt{2}xy \geq 1$.

❻ **Trouver les extrema de la fonction** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **définie par**
$$f(x, y) = \int_x^y te^{-t^2} dt$$
sous la condition $e^{x^2} + e^{y^2} = 8$.

Chapitre 3

Intégrales impropres ou généralisées

Sommaire

3.1 Introduction

Nous avons vu au préalable plus exactement lorsqu'il s'agissait d'intégrales définies que la condition nécessaire et suffisante pour assurer la convergence de $\int_a^b f(x)dx$ est que la fonction $f(x)$ soit continue sur le segment fermé borné $[a, b]$. Dès que ce segment s'ouvre d'un côté ou de l'autre ou des deux côtés on aura alors affaire à une intégrale impropre ou généralisée.

3.2 Intégrale impropre sur un semi-ouvert à droite

Définition 3.1. *Soit la fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert à droite* $[a, b[$ *,* $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, on dit alors que l'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$ *est impropre en* b*.*

Théorème 3.1. *L'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est convergente si pour tout* $\lambda \in]a, b[$ *,* $\lim_{\lambda \longrightarrow b^-} \int_a^\lambda f(x)dx$ *existe et est finie.*

Exemple 3.1. *1) Etudier la nature de l'intégrale :* $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$ *avec* $p > 0$*.*
Cette intégrale est impropre en $+\infty$*. Soit* $\lambda > 0$*,*

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-px}dx &= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-px}}{p}\right]_0^\lambda \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} -\frac{e^{-p\lambda}}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$ *converge et* $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx = \frac{1}{p}$*.*
2) Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x - e}dx$*.*
Cette intégrale est impropre en 1*. Soit* $0 < \lambda < 1$*,*

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow 1^-} \int_0^\lambda \frac{e^x}{e^x - e}dx &= \lim_{\lambda \longrightarrow 1^-} \left[\ln\left|e^\lambda - e\right|\right]_0^\lambda \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Donc $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x - e}dx$ *diverge.*
3) Etudier la nature de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \cos x dx$*.*
Cette intégrale est impropre en $+\infty$*. Soit* $\lambda > 1$*,*

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_1^\lambda \cos x dx &= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} [\sin x]_1^\lambda \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \sin\lambda - \sin 1.\end{aligned}$$

Cette limite n'existe pas donc $\int_1^{+\infty} \cos x dx$ *diverge.*

3.3 Intégrale impropre sur un semi-ouvert à gauche

Définition 3.2. *Soit la fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert à droite* $]a, b]$ *,* $b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*, on dit alors que l'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$ *est impropre en* a*.*

Théorème 3.2. *L'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* a*) est convergente si pour tout* $\lambda \in \left]a, b\right[$, $\lim_{\lambda \longrightarrow a^+} \int_\lambda^b f(x)dx$ *existe et est finie.*

Exemple 3.2. *1) Etudier la nature de l'intégrale :* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1-x}dx$.
Cette intégrale est impropre en 1. *Soit* $1 < \lambda < 2$,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow 1^+} \int_\lambda^2 \frac{1}{1-x}dx &= -\lim_{\lambda \longrightarrow 1^+} \left[\ln|1-x|\right]_\lambda^2 \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1-x}dx$ *diverge.*
2) Etudier la nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$.
Cette intégrale est impropre en 0. *Soit* $0 < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \int_\lambda^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx &= 2 \lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \left[\sqrt{x}\right]_\lambda^1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_\lambda^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ *converge et* $\displaystyle\int_\lambda^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = 2$.

3.4 Intégrale impropre sur un ouvert

Définition 3.3. *Soit la fonction continue sur l'intervalle ouvert à droite et à gauche* $\left]a, b\right[$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *on dit alors que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *est impropre en* a *et* b.

Théorème 3.3. *L'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* a *et* b*) est convergente si pour tout* $c \in \left]a, b\right[$, *les intégrales impropres* $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ *sont convergentes.*

Exemple 3.3. *Etudier la nature de l'intégrale :* $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
Cette intégrale est impropre en -1 *et* 1.
Soient $I_1 = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *et* $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
1) Etudions la nature de I_1 *qui est impropre en* -1.
Soit $-1 < \lambda < 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow -1^+} \int_\lambda^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\lambda \longrightarrow -1^+} \left[\arcsin x\right]_\lambda^0 \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *converge et* $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$.
2) Etudions la nature de I_2 *qui est impropre en* 1.
Soit $0 < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \longrightarrow 1^-} \int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{\lambda \longrightarrow 1^-} [\arcsin x]_0^{\lambda} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *converge et* $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$.
Par conséquent I *converge et* $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

3.5 Propriétés des intégrales impropres

Proposition 3.1. *Soient* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *(intégrales impropres en* b*) convergentes et* λ *un réel non nul alors :*
1) l'intégrale impropre $\int_a^b (f(x)+g(x))dx$ *est convergente de plus on a :*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2) $\int_a^b \lambda f(x)dx$ *est convergente de plus on a :*

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Remarque 3.1.
1) La somme de deux intégrales impropres convergentes est une intégrale convergente.
2) La somme de deux intégrales impropres dont une est divergente est une intégrale divergente.

3.6 Méthodes d'intégration

3.6.1 Intégration par partie dans une intégrale impropre

L'intégration par partie ne s'effectue pas directement sur les intégrales impropres (impropres en b par exemple) $\int_a^b f(x)dx$ mais on peut toujours l'appliquer sur $\int_a^{\lambda} f(x)dx$ avec $a < \lambda < b$ puis passer à la limite $\lambda \to b^-$.

Exemple 3.4. *Etudier la nature de l'intégrale* $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^3} dx$.
Soit $\lambda > 1$, *posons :*

$$u = \frac{1}{x} \Longrightarrow u^/ = \frac{-1}{x^2}$$

et

$$v^/ = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} \Longrightarrow v = e^{\frac{-1}{x}}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^3} dx &= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left[\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} \right]_1^{\lambda} + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2} dx \\
&= \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{-1}{\lambda}}}{\lambda} - \frac{1}{e} + \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \left[e^{\frac{-1}{x}} \right]_1^{\lambda} \\
&= 1 - 2\frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Ainsi I *est convergente et de plus*

$$I = 1 - 2\frac{1}{e}.$$

3.6.2 Changement de variable dans une intégrale impropre

Soient $\int_a^b f(x)dx$ une intégrale impropre en b et

$$\begin{aligned} \Phi : [\alpha, \beta[&\rightarrow [a, b[\\ t &\longmapsto \Phi(t) = x \end{aligned} \quad \text{telle que } \Phi(\alpha) = a \text{ et } \Phi(\beta) = b.$$

Supposons que Φ est bijective et de classe C^1 sur $[\alpha, \beta[$. Alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\Phi^/(t)dt$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

Exemple 3.5. *Soit* $I = \int_1^{+\infty} \cos x^2 dx$.
Posons :

$$\begin{aligned} x^2 &= t \Longrightarrow x = \sqrt{t} = \Phi(t) \\ dx &= \frac{dt}{2\sqrt{t}}, \end{aligned}$$

et

$$\Phi(1) = 1, \lim_{t \longrightarrow +\infty} \Phi(t) = +\infty,$$

d'où

$$\int_1^{+\infty} \cos x^2 dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \cos t dt \text{ sont de même nature .}$$

3.7 Intégrales impropres de fonctions positives

Définition 3.4. *L'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est dite intégrale de fonction positive si pour tout* $x \in [a, b[\,, f(x) \geq 0$.
L'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* a*) est dite intégrale de fonction positive si pour tout* $x \in]a, b]\,, f(x) \geq 0$.
L'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* a *et* b*) est dite intégrale de fonction positive si pour tout* $x \in]a, b[\,, f(x) \geq 0$.

3.7.1 Intégrales de référence(intégrales de Riemann)

Proposition 3.2. *L'intégrale* $\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}dx, \alpha \in \mathbb{R}$ *est dite intégrale de Riemann.*

1) *Au voisinage de* ∞,
   les intégrales $\int_{-\infty}^b \frac{1}{x^\alpha}dx$ *et* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *avec* $b < 0, a > 0$ *convergent pour* $\alpha > 1$.
   les intégrales $\int_{-\infty}^b \frac{1}{x^\alpha}dx$ *et* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *avec* $b < 0, a > 0$ *divergent pour* $\alpha \leq 1$.
2) *Au voisinage de* 0,
   les intégrales $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}dx$ *et* $\int_b^0 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *avec* $b < 0, a > 0$ *convergent pour* $\alpha < 1$.
   les intégrales $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}dx$ *et* $\int_b^0 \frac{1}{x^\alpha}dx$ *avec* $b < 0, a > 0$ *divergent pour* $\alpha \geq 1$.
3) *Au voisinage d'une valeur finie non nulle,*
   les intégrales $\int_c^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ *et* $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ *avec* $a < c < b$ *convergent pour* $\alpha < 1$.
   les intégrales $\int_c^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ *et* $\int_a^c \frac{1}{(x-a)^\alpha}dx$ *avec* $a < c < b$ *divergent pour* $\alpha \geq 1$.

3.7.2 Critères de convergence d'une intégrale de fonction positive

Dorénavant, pour simplifier les choses, nous ne considérerons que des intégrales impropres de fonctions définies sur des intervalles de la forme $[a, b[$. Les résultats concernant les autres cas intéressants se déduiront par analogie.

Théorème 3.4. *Soit la fonction* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a, b[$*. Alors,*
l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est convergente* $\Longleftrightarrow$ *il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in [a, b[\,, \left|\int_a^x f(x)dx\right| \leq M$.

Théorème 3.5. *(Critère de comparaison).*
Soient les fonctions $f(x) \geq 0$ *et* $g(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a, b[$ *et telles que pour tout* $x \in [a, b[\,, f(x) \leq g(x)$*, alors*

1) *Si l'intégrale* $\int_a^b g(x)dx$ *(impropre en* b*) est convergente alors l'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est convergente .*
2) *Si l'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est divergente alors l'intégrale* $\int_a^b g(x)dx$ *(impropre en* b*) est divergente.*

Théorème 3.6. *(Critère d'équivalence).*
Soient les fonctions $f(x) \geq 0$ *et* $g(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a, b[$ *telles que* $f(x) \backsim g(x)$ *au voisinage de* b *alors les deux intégrales impropres* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *(impropres en* b*) sont de même nature.*

Proposition 3.3. *Soient les fonctions* $f(x) \geq 0$ *et* $g(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a, b[$ *telles que* $\lim\limits_{x \longrightarrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ *alors :*

1) *Si* k *est fini non nul, alors les deux intégrales impropres* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *(impropres en* b*) sont de même nature.*
2) *Si* $k = 0$ *et l'intégrale impropre* $\int_a^b g(x)dx$ *(impropre en* b*) est convergente* $\Longrightarrow$*l'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est convergente .*
3) *Si* $k = +\infty$ *et l'intégrale impropre* $\int_a^b g(x)dx$ *(impropre en* b*) est divergente* $\Longrightarrow$ *l'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est divergente.*

Corollaire 3.1. *(Règle du* x^α*)*
Soient la fonction $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [a, b[$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = k$*, alors :*

1) *Si* k *est fini non nul et* $\alpha > 1$*, l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est convergente.*
2) *Si* k *est fini non nul et* $\alpha \leq 1$*, l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est divergente.*
3) *Si* $k = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est convergente.*
4) *Si* $k = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *est divergente.*

3.8 Intégrales impropres de fonctions de signes quelconques

3.8.1 Convergence absolue

Définition 3.5. *On dit que l'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b*) est absolument convergente si l'intégrale impropre* $\int_a^b |f(x)|\, dx$ *(impropre en* b*) est convergente.*

Théorème 3.7. *Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.*

Remarque 3.2. *La réciproque du théorème précédent n'est pas toujours vraie. En effet, on peut trouver des intégrales impropres qui sont convergentes sans être absolument convergentes on les appelle semi-convergentes.*

Remarque 3.3. *Constatons que comme dans le cas des séries, le théorème précédent sera fortement sollicité pour aborder les intégrales de fonctions de signes quelconques dans le sens où en mettant une valeur absolue on se ramène à une intégrale de fonction positive et par conséquent nous pouvons faire usage des critères. Cependant, n'oublions surtout pas que ce théorème ne nous permet en aucun cas de conclure la divergence.*

3.8.2 Critère de convergence des intégrales impropres de fonctions de signes quelconques

Théorème 3.8. *(critère d'Abel).*
Soient les fonctions $f(x)$ *et* $g(x)$ *continues sur* $[a, b[$ *et telles que pour tout* $x \in [a, b[$,

1) $f(x) \geq 0$, f *décroissante sur* $[a, b[$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) = 0$.

2) *il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in [a, b[\,$, $\left| \int_a^x g(x)dx \right| \leq M$.

Alors, l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)g(x)dx$ *(impropre en* b*) est convergente.*

Remarque 3.4. *Soit l'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* $b \neq +\infty$ *respectivement impropre en* $a \neq -\infty$*) telle que* f *soit prolongeable par continuité à gauche de* b *(respectivement à droite de* a*) c'est à dire que* $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x)$ *(respectivement* $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x)$*) existe et est finie.*
Alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ *(impropre en* b *respectivement impropre en* a*) est convergente.*

Exemple 3.6. *Etudier la nature de l'intégrale impropre* $I = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x)^2} dx$ *(impropre en* 0*).*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{(1+x)^2} = 0.$$

Par conséquent I *est convergente.*

3.9 Exercices d'application

Exercice 3.1.

Soit f continue sur $]-\infty, +\infty[$. Donner la définition de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{dt}$ converge.

Solution

Par définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt = l' + l'' \in \mathrm{R}.$$

Exercice 3.2.

Soit f continue sur $]2, 5]$. Donner la définition de $\int_{2}^{5} f(t)$ dt diverge.

Solution

$$\int_{2}^{5} f(t)dt = \lim_{t \longrightarrow 2} \int_{t}^{5} f(x)dx = \pm\infty, \quad \text{tout la limite n'existe pas .}$$

Exercice 3.3.

Soit f continue sur $[0, +\infty[$. Donner la définition de $\int_{0}^{+\infty} f(t)$ dt diverge.

Solution

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \pm\infty, \quad \text{tout la limite n'existe pas.}$$

Exercice 3.4.

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge. Alors $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$

❶ vrai

❷ faux

Solution

❷ faux

Exercice 3.5.

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge. Alors f bornée au voisinage de $+\infty$

❶ vrai

❷ faux

Solution

❷ faux

Exercice 3.6.

❶ $\forall \alpha > 1, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.

❷ $\forall \alpha < 1, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.

❸ $\forall \alpha \in \mathrm{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

❹ $\forall \alpha \in \mathrm{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.

❺ rien de ce qui précède.

Solution

❸

$$\forall \alpha \in \mathrm{R}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ diverge.}$$

Car

$$\begin{array}{lll} \text{Si } \alpha > 1 & \text{alors} & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{diverge} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} = \text{diverge.} \\ \text{Si } \alpha < 1 & \text{alors} & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{diverge} = \text{diverge.} \\ \text{Si } \alpha = 1 & \text{alors} & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt = +\infty + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = +\infty = \text{diverge.} \end{array}$$

Exercice 3.7.

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $t^2 f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Alors

❶ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

❷ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

❸ On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Solution

❶

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \text{converge}$$

$t^2 f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ équivalente à :

$$f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} dt$ converge $\alpha = 2 > 1$. Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exercice 3.8.

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $t^2 f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Alors

❶ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

❷ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

❸ On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Solution

❸

$$\text{On ne peut rien dire sur la nature de } \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

$t^2 f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ équivalente à :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall t / t > B \Longrightarrow f(t) > \frac{A}{t^2}$$

D'après le critère de comparaison On ne peut rien conclure.

Exercice 3.9.

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty[$ quelconque telle que $tf(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Alors

❶ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

❷ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

❸ On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$

Solution

❷

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt \quad \text{diverge.}$$

$tf(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$.
équivalente à :

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall t / t > B \Longrightarrow f(t) > \frac{A}{t}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} dt$ diverge $\alpha = 1$. Alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Exercice 3.10.

Soit f continue et positive sur $[0, +\infty\,[$ quelconque telle que $tf(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Alors

❶ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

❷ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

❸ On ne peut rien dire sur la nature de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Solution

❸

$$\text{On ne peut rien dire sur la nature de } \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

$tf(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$
équivalente à :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall t/t > B \Longrightarrow f(t) < \frac{\varepsilon}{t}$$

D'après le critère de comparaison On ne peut rien conclure.

Exercice 3.11.

Soit $\alpha \in$ R. Alors $\int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}dt$ converge si

❶ $\alpha < 1$

❷ $\alpha > 1$

❸ $\alpha = 1$

❹ $\alpha < 2$

❺ rien de ce qui précède.

Solution

❶ rien de ce qui précède
$I = \int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}dt$ est une intégrale impropre car $\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}$ est continue sur]0,1] pour $\alpha > 0$.
Convergence : on utilise l'équivalence au voisinage de $x = 0$
$\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \sim_0 \frac{t^2}{t^\alpha}$ avec

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-2}},$$

converge si seulement si $\alpha - 2 < 1$ critère de Riemann. Alors $\alpha < 3$.

Exercice 3.12.

Soit $\alpha \in$ R. Alors $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ converge si

❶ $\alpha < 0$

❷ $\alpha > 0$

❸ $\alpha = 0$

❹ $\alpha < 1$

❺ rien de ce qui précède.

Solution

❶ $\alpha < 0$
Si $\alpha = 0$, $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt = +\infty$

Si $\alpha \neq 0$ alors

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t e^{\alpha x} dx = \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \right]_0^t = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \right).$$

Pour $\alpha < 0$, $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = \frac{-1}{\alpha}$ converge.
Pour $\alpha > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt = +\infty$ diverge.

Exercice 3.13.

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Alors $\int_1^{+\infty} t^\beta e^{-t} dt$ converge si

❶ $\forall \beta \in \mathbb{R}^*$

❷ $\beta > 1$

❸ $\forall \beta \in \mathbb{R}$

❹ $\beta < 1$

❺ rien de ce qui précède.

Solution

❸

$$\forall \beta \in \mathbb{R}$$

Car :

On peux écrire $t^\beta e^{-t} = t^\beta e^{-t/2} e^{-t/2}$. On sait que $\lim_{t \to +\infty} t^\beta e^{-t/2} = 0$, pour tout β, il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t > A \quad t^\beta e^{-t/2} \leq 1.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{-t/2}$ on obtient :

$$\forall t > A \quad t^\beta e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge car $\alpha = \frac{-1}{2} < 0$.

Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^\beta e^{-t} dt$ converge d'après le théorème de comparaison.

Exercice 3.14.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha}$ converge si

❶ $\alpha < 2$

❷ $\alpha > 2$

❸ $\alpha = 2$

❹ $\alpha > 1$

❺ rien de ce qui précède.

Solution

❹

$$\alpha > 1.$$

En effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$, alors

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

D'après l'intégrale de Riemann I est convergente au voisinage de $+\infty$ ssi $\alpha > 1$.

Exercice 3.15.

Pour quelles valeurs $\alpha \in R$ les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$I = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}; \quad J = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha};$$

Solution

$$I = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \quad \text{converge pour} \quad \alpha < 1;$$

En effectuant le changement de variable $x = t - a$, alors

$$I = \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \int_0^{b-a} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

D'après l'intégrale de Riemann I est convergente au voisinage de 0 ssi $\alpha < 1$

De même

$$J = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \quad \text{converge pour} \quad \alpha < 1.$$

En effectuant le changement de variable $x = b - t$, alors

$$J = \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \int_{b-a}^0 \frac{-dx}{x^\alpha} = \int_0^{b-a} \frac{dx}{x^\alpha}$$

D'après l'intégrale de Riemann J est convergente au voisinage de 0 ssi $\alpha < 1$.

Exercice 3.16.

Étudier la nature de l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt; \quad \alpha \in \mathrm{R}.$$

Solution

$f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

a) Convergence en 0

$\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ **est convergente puisque** $f(t)$ **est prolongeable par continuité.**

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 0$$

b) Convergence en $+\infty$

En intégrant par parties, On obtient :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

lorsque x **tend vers** $+\infty$, $\frac{-\cos(x)}{x}$ **tend vers 0 puisque c'est le produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0 . D'autre part**

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt,$$

existe puisque, de $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ **on tire la convergence absolue, donc la convergence** $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$.

Finalement I **converge.**

Exercice 3.17.

Calculer les intégrales impropres

$$❶ \int_0^1 \ln x dx; \quad ❷ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad ❸ \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx;$$
$$❹ \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}; \quad ❺ \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx; \quad ❻ \int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1};$$

Solution

1) $\int_0^1 \ln x dx$.

On intègre (une intégrale indéfinie) par parties en suite en passe par limite quand x **tend vers 0**

$$\int \ln t dt = t \ln(t) - \int dt = t \ln(t) - t + c,$$

donc

$$\int_0^1 \ln t dt = \lim_{x \longrightarrow 0} [t \ln(t) - t+]_x^1 = \lim_{x \longrightarrow 0} (-1 - x \ln(x) - x) = -1,$$

donc $\int_0^1 \ln x dx$ **converge.**

2) $int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \longrightarrow 1} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x \longrightarrow 1} [\arcsin(t)]_0^x$$

donc
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\longrightarrow 1}(\arcsin(x)-0) = \frac{\pi}{2}.$$

3) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

En effectuant un changement de variable $x-1=y$

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int_0^1 \frac{1+y}{\sqrt{y}}dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}dy + \int_0^1 \sqrt{y}dy = \left[2\sqrt{y}+\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

4) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

En effectuant un changement de variable $\ln(x)=y$ **donc**

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \lim_{y\longrightarrow 1}(\arcsin(y)-0) = \frac{\pi}{2}.$$

5) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ **En effectuant un changement de variable** $\sqrt{(x)}=y$ **donc**

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} 2ye^{-y}dy.$$

Par une intégration par parties, On obtient

$$\int_0^{+\infty} 2ye^{-y}dy = 2\lim_{y\to+\infty}\left[-te^{-t}-e^{-t}\right]_0^y = 2\lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y}-e^{-y}+1\right) = 2,$$

d'où $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ **converge**

6) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$.

En effectuant un changement de variable $e^x-1=y$ **donc**

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1} = \int_0^{e-1} \frac{dy}{y(y+1)}.$$

Par intégration on décompose en élément simple

$$\int_0^{e-1} \frac{dy}{y(y+1)} = \int_0^{e-1} \frac{dy}{y} + \int_0^{e-1} \frac{dy}{y+1} = \lim_{y\longrightarrow 0}\left[\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_y^{e-1} = +\infty.$$

Exercice 3.18.

Calculer les intégrales suivantes,après en avoir étudié la convergence :

$$❶ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}, ❷ \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx \quad , ❸ \int_1^{+\infty} \arctan\frac{1}{x}dx.$$

Solution

❶

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$f(t) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ continue sur $]-\infty, +\infty[$.
On divise l'intégrale

$$❶ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Convergence en $+\infty$
$f(t) = \frac{1}{t^2+2t+2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$, or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2}$ de même pour $-\infty$. On a
$f(t) = \frac{1}{t^2+2t+2} \sim -\infty\frac{1}{t^2}$, or $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{t^2}$ converge donc $\int_{-\infty}^{1} \frac{dt}{t^2+2t+2}$.
On calcule l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

En effectuant un changement de variable $y = x+1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1} = [\arctan(y)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

❷

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$$

$e^{-x}\cos x$ continue sur $[0, +\infty[$, on a $|e^{-x}\cos x| \leq e^{-x}$, or $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge absolument donc $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$ converge.
On calcule l'intégrale par parties.

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \cos x = \frac{1}{2}[\sin(x) - \cos(x)]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

❸

$$\int_{1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{x} dx$$

$\arctan \frac{1}{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
on a $\arctan \frac{1}{x} \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$ or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ diverge (intégrale de Riemann) $\alpha = 1$ d'où $\int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{x} dx$ diverge.

3.10 Exercices

3.10.1 Intégrales généralisées

Exercice 3.19. Calculer

$$❶ \int_{0+}^{1} t \ln t dt. \qquad ❷ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

❸ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+6t+10}$. ❹ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{3t-1}{t\,(4t^2+1)}dt$.

❺ $\displaystyle\int_{0}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. ❻ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$.

❼ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{t}{\sqrt{t-1}}dt$. ❽ $\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}$.

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$. ❿ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt[3]{(1+t^2)^2}}dt$.

Exercice 3.20. Calculer

❶ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$. ❷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$.

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{(t+2)\sqrt{3t-t^2}}$. ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t(1-t)}}$.

❺ $\displaystyle\int_{1+}^{2-} \frac{t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}dt$. ❻ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}$.

❼ $\displaystyle\int_{1}^{e-} \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$. ❽ $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1-} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$.

❾ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$. ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln t dt$.

Exercice 3.21. Calculer

❶ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$. ❷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^2e^{-t}dt$.

❸ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{cht}$. ❹ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{Arctgt}{1+t^2}dt$.

❺ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\text{Arctge}\, t}{t^2}dt$. ❻ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{4+tg^2t}$.

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$. ❽ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$.

❾ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{t^4+1}dt$. ❿ $\displaystyle\int_{0}^{t+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$.

Exercice 3.22. Calculer

❶ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^3}{t^4+1}dt$. ❷ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^4 t+\sin^4 t}$.

❸ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}-} \frac{dt}{\cos^4 t-\sin^4 t}$. ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$.

❺ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}, n \geq 2$. ❻ $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{2t^3+t^2+1}{t^4+1}dt}{\displaystyle\int_{0}^{z} \frac{3t^3+4t}{t^4+1}dt}$.

Exercice 3.23.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{3+}^{4} \frac{dt}{\sqrt{\ln(t-2)}}.$

❷ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \cos\frac{1}{t}dt.$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{th}(t-t^2)}{t\sin(t-1)}dt.$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t\ln t}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\sqrt{t}}{t\ln t}dt.$

❻ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{t\sqrt{\ln\frac{1}{t}}}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt.$

❽ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^2\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{Argth} t}}dt.$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{e^t-1}.$

Exercice 3.24.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt$

❷ $\displaystyle\int_{2+}^{3} \frac{\ln(t-1)}{t-2}dt.$

❸ $\displaystyle\int_{1+}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}.$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sqrt{t-t^5}}.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\sqrt{t-t^2}}dt$

❻ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \frac{dt}{1-e^{\cos t}}.$

❼ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}dt.$

❽ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t}dt.$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\operatorname{tg} t}{t}dt.$

Exercice 3.25.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt.$

❷ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\sin\frac{1}{t}dt.$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$

❹ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin\frac{1}{t}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\sin\frac{1}{t}dt.$

❻ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin e^{-t}dt.$

❽ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{-t}\ln t dt.$

❾ $\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2 t}.$

❿ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$

Exercice 3.26.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1+\ln t}{(1+\ln^2 t)\sqrt{t^2+1}}dt.$

❷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t+\sin t}dt.$

❸ $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin t}{t^2-1}dt.$

❹ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t+\sqrt{t^2+5}}.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt..$

❻ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t-1}}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{sht}}.$

❽ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin t^2 dt$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin\frac{1}{t^2}}{\ln 1+t)}dt.$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin(1-\operatorname{ch} t)}{t\operatorname{sh} t}dt.$

Exercice 3.27.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{t^2+8}{t^4-t^2}dt.$

❷ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{ch} t\sqrt{\text{lnt}}}dt.$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}dt.$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{e^t-1}}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t}dt.$

❻ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg} t^2\right)dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t^3}\ln(\operatorname{ch} t)dt.$

❽ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}^3 t}{t\ln(cht)}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\ln(1+t)}}dt.$

❿ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}.$

Exercice 3.28.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{\ln(1+t)\operatorname{sh} t}dt.$

❷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t\cos t^4 dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{te^{\sin t}}{\operatorname{Arctg} t+t^2\operatorname{ch}^2 t}dt.$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln^3 t}{\operatorname{ch}^2 t}dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(2+t^2)}}{e^t-1}\sin t dt$

❻ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}}.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-2t}\operatorname{sh} t}{\ln(1+\operatorname{th}\sqrt[3]{t})}dt.$

❽ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{t-e^{\cos t}+e}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\ln(1+\sqrt{t})}e^{-t\operatorname{ch}}dt.$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}e^{-\sqrt{t}}dt.$

Exercice 3.29.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{tht}e^{-t}dt$

❷ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln\sqrt{t}}{t^2-1}dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-t^2}}dt$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{1+t^2}}dt$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{1-\cos t^2}{t^4}dt$ ❻ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\operatorname{Arctg} t}}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{\ln(1+t)}e^{-\sqrt{t}}dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{\ln(1-t)}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\ln(2-t)}dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln^4 t}{(1-t)^2}dt.$

Exercice 3.30.

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\ln(\operatorname{sh} t)dt.$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^2 t}{t^2\sqrt{\ln(1+t)}}dt.$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{te^{-\operatorname{sh} t}}{\ln(1+\sqrt{t})}\sin\frac{1}{t}dt.$ $\boxed{4}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{\ln(1+t)\operatorname{Arctg}\sqrt{t}}dt.$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \cos t\ln(\operatorname{tg} t)dt.$ $\boxed{6}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t^2}{t\ln\sqrt{1+t}}e^{-\operatorname{sh} t}dt.$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t\ln t)}dt$ $\boxed{8}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{(1-\cos(\sin t))\sin t}{\sqrt{t^3}}dt.$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln t}{\sin(\pi\sqrt{t})}dt.$ $\boxed{10}$ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\ln(1-\sqrt{t})}{\ln(1-t)}dt$

$\boxed{11}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{\sqrt{\operatorname{sh} t}\ln(1+\sqrt{t})}dt$

Exercice 3.31.

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}.$ ❷ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$

❸ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t}dt.$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1} t^\alpha\ln t dt.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}dt.$ ❻ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{(t-1)^\alpha}}e^{-t}dt.$ ❽ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{\sin t}{t(-\ln t)^\alpha}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}dt.$

Exercice 3.32.

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{\sqrt[3]{1+t^\alpha}}dt$

❷ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{\sqrt[3]{1-t}}{\sqrt{t}(t-\alpha)}dt$

❸ $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^\alpha dt.$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$

❺ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right)^\alpha}$

❻ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^\alpha(2+\sin\sqrt{t})}dt$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t^\alpha\left(\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t\right)}dt$

❽ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \left(\ln\frac{1}{t}\right)^\alpha dt$

❾ $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln(\ln t))^\alpha}$

❿ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-t}}}{\sin^\alpha t}dt$

Exercice 3.33.

Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\operatorname{sh} t}}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{\sin t}}{\sqrt{t}+\operatorname{ch}^2 t}dt$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t^2}}{2+\sin t}dt.$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt.$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg}(t-1)}{(t^2-1)^\alpha}dt.$

$\boxed{6}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \sin\frac{1}{t^\alpha}dt.$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln\left(\sin t^\alpha\right)dt.$

$\boxed{8}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln(1+\operatorname{Arctg} t)}{\operatorname{sh}^\alpha t}dt.$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{(t-1)^\alpha}e^{-t}dt$

$\boxed{10}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{dt}{\ln^\alpha(1+t)}.$

$\boxed{11}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+t^\alpha\right)}{1+t-e^t}dt$

$\boxed{12}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^\alpha}dt.$

Exercice 3.34.

Discuter, en fonction deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{t^\alpha(1-t)^\beta}.$

❷ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\alpha e^{-t}}{1+\beta e^t}dt$

❸ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{t^{\beta-2}}{\ln^\alpha t}dt$

❹ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}dt$

❺ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\beta(t-1)^\alpha}dt$

❻ $\displaystyle\int_{-1+}^{1-} \frac{|t|^\alpha\cos t}{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^\beta}dt.$

❼ $\displaystyle\int_{-1+\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\alpha}{(1+t)^\beta}dt.$

❽ $\displaystyle\int_{a+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{t^{2a}\left(1+t^3\right)^\beta}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctg} t}{t^\alpha(1+\sqrt{t})^\beta}dt.$

❿ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{(1+\alpha)t}}{e^t+\beta e^{-t}}dt.$

Exercice 3.35.

Discuter, en fonction deux nombres réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

❶ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos\beta t dt.$ ❷ $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\beta}\sin t^{\alpha} dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \frac{dt}{\sin^{\alpha} t\sqrt{(1-t^2)^{\beta}}}$ ❹ $\displaystyle\int_{2+}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2-4)^{\alpha\beta}}.$

❺ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t^{\alpha}+\operatorname{th}^{\beta} t}dt.$ ❻ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}.$

❼ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} t^{\alpha}\ln\beta\frac{1}{t}dt.$ ❽ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{t^{\alpha}\ln^{\beta} t}{e^t}dt.$

❾ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} t}{e^{\beta t}(t-1)}dt.$ ❿ $\displaystyle\int_{0+}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{t}}.$

Exercice 3.36.

Discuter, en fonction de l'entier $n > 0$, la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{0+}^{1}\left(\frac{\sin t^n}{\ln t^n}\right)^n dt.$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{1+}^{2-}\frac{2-t}{(-t^2+3t-2)^n}dt$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{1+}^{+\infty}\frac{e^{-\sin t}\ln^n t}{(t-1)^n}dt.$ $\boxed{4}$ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty}\frac{(t^n-[t^n])^n}{\ln(e^{t^n}-1)}dt.$

$\boxed{5}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\int_{1+}^{x-}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(x-t)}}.$ $\boxed{6}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{x\to 0+} e^{\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-}\ln(x+tgt)dt}.$

$\boxed{7}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t}{\sin x}}}{1+t^2}dt.$ $\boxed{8}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^3\int_{0+}^{1}\frac{t\ln t}{t^2+x^2}dt.$

$\boxed{9}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{x^2} e^{-\frac{t^2}{x^2}}dt.$ $\boxed{10}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}dt.$

$\boxed{11}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t dt.$ $\boxed{12}$ **Calculer** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{0+}^{1-}\frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}dt.$

Exercice 3.37.

❶ Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty c}\frac{\sin t}{t}dt$. Est convergente. Est-elle absolument convergente ?

❷ Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\sin t^4 dt$. Est convergente. Est-elle absolument convergente ?

❸ Paradoxe du peintre

1) Calculer l'aire de

$$E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1, 0\leq y\leq\frac{1}{x}\right\}.$$

2) Calculer la surface latérale obtenue par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x \geq 1$.
3) Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe $\mathrm{O}x$ de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x \geq 1$.
❹ Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^4 \int_0^{+\infty} e^{-x^4 t} dt$$

❺ Soient $a < b$ deux nombres réels et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que son intégrale généralisée

$$\int_{a+}^{b} f(t)dt$$

converge. Montrer que la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{a+}^{x} f(t)dt & \text{si } x \in]a, b] \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue.
❻ Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\ln t}{t^2} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \ln t & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées

$$\int_{0+}^{1} f(t)dt \text{ et } \int_{1}^{+\infty} f(t)dt$$

divergent.
2) Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} f(t)dt$$

❼ Soient $f, g :]0, 1[\to \mathbb{R}$ les deux fonctions continues définies respectivement par

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}+x}^{\frac{\pi}{2}-x} \operatorname{tg} t dt$$

et

$$g(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}+2x}^{\frac{\pi}{2}-x} \operatorname{tg} t dt.$$

1) Montrer que les deux intégrales généralisées

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+}^{0} \operatorname{tg} t dt \text{ et } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} t dt$$

divergent.

2) Calculer

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x\to 0_+} g(x).$$

❽ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique telle que son intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

converge. Montrer que $f = 0$.

❾ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{s\to 0+} s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+s^2} dt = \pi f(x).$$

❿ Soit $\alpha > 0$.

1) Montrer que

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{\ln t}{\alpha^2+t^2} dt = \frac{\pi \ln \alpha}{2\alpha}$$

2) En déduire que

$$\int_{0+}^{\frac{\pi}{2}-} \ln(\alpha \operatorname{tg} t) dt = \frac{\pi \ln \alpha}{2}$$

<u>Exercice</u> 3.38.

En utilisant la fonction gamma Γ, calculer les intégrales suivantes :

❶ $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ ❷ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

❸ $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln \Gamma(t) dt$ ❹ $\displaystyle\int_{0+}^{1-} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{x-1} dt, x > 0$

❺ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sqrt{t-1}\, e^{-t} dt$

Chapitre 4

Les équations différentielles de premier ordre.

Sommaire

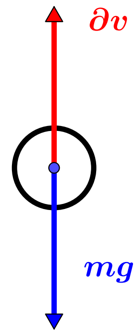
4.1 Généralités :

Exemple 4.1. *Si on note par* $v(t)$ *la vitesse d'un objet qui est on chute lime dans l'atmosphère par rapport on temps.*
La loi physique qui régit le mouvement des objets est la deuxième loi de Newton exprimé par l'équation :

$$F = ma,$$

où m *masse de l'objet et* a *son accélération et* F *est la farce exercée son l'objet.*
Sachant que $a = \frac{dv}{dt}$, *alors :*

$$F = m\frac{dv}{dt}.$$



Quand l'objet tombe, alors :

$$F = mg - \gamma v,$$

où $g = 9,8m/s^2$ *la gaité*
∂ *: Coefficient de la trainée.*
∂v *: la force de trainée (une force due à la résistance de l'air).*
Par conséquent : $\boxed{m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v}$.

Cette équation (de l'équation différentielle) donne le comportement d'un objet er charte libre dans l'atmosphère.
Par exemple : on suppose que $m = 10kg$ *et* $\gamma = 2kg/s$.
Alors :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}}$$

Exemple 4.2. *Si on rote par* $N(t)$ *la population dotale d'un pays à l'instant* t*, alors l'accroissement de cette population est régi par l'équation suivant :*

$$\frac{dN(t)}{dt} = \textit{naissances} - \textit{morts} + \textit{migration}.$$

Malotrus (1798) propose de décroie l'évolution d'une population en supposant que la migration est négligé et que l'accroissement est population el à l'effectif c-à-d :

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = rN(t),}$$

où $r = b - d$ *avec* $\begin{array}{l} b : \textit{ taux de natalité .} \\ d : \textit{ taux de mortalité .} \end{array}$

- *Si* $r = 0$, *alors la population reste constante.*
- *Si* $r > 0$, *alors la population augmente.*
- *Si* $r < 0$, *alors la population diminue.*

Définition 4.1. *On appelle équation différentielle, une équation avec une fonction inconnue* $y(x)$ *de la variable réelle* x *et une on plusieurs de ses dévirées* $y', y'', \ldots$ *par exemple.*

$$yy' + x = 1 \text{ on } (y')^2 + xy' + 4y = 0.$$

Ainsi, de façon générale, l'équation

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0 \text{ est une équation}$$

différentielle où F *est une fonction réelle de plusieurs variables.*

Définition 4.2. • *On appelle équation différentielle du premier ordre, la relation de la forme :*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{E_1}$$

où F est une fonction réelle de 3 variable.
• *On appelle équation différentielle du second ordre, la relation de la forme :*

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{E_2}$$

Par exemple :

$$y' + 5xy - e^x = 0 \quad \textit{premier ordre}$$

et

$$2y'' - 3y' + 5y = 0 \quad \textit{second ordre}$$

Définition 4.3. • *Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x),$$

où les a_i et g sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
• *Une équation différentielle linéaire est dite homogène (ou sans second nombre) si $g(x) = 0$ c-à-d :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0.$$

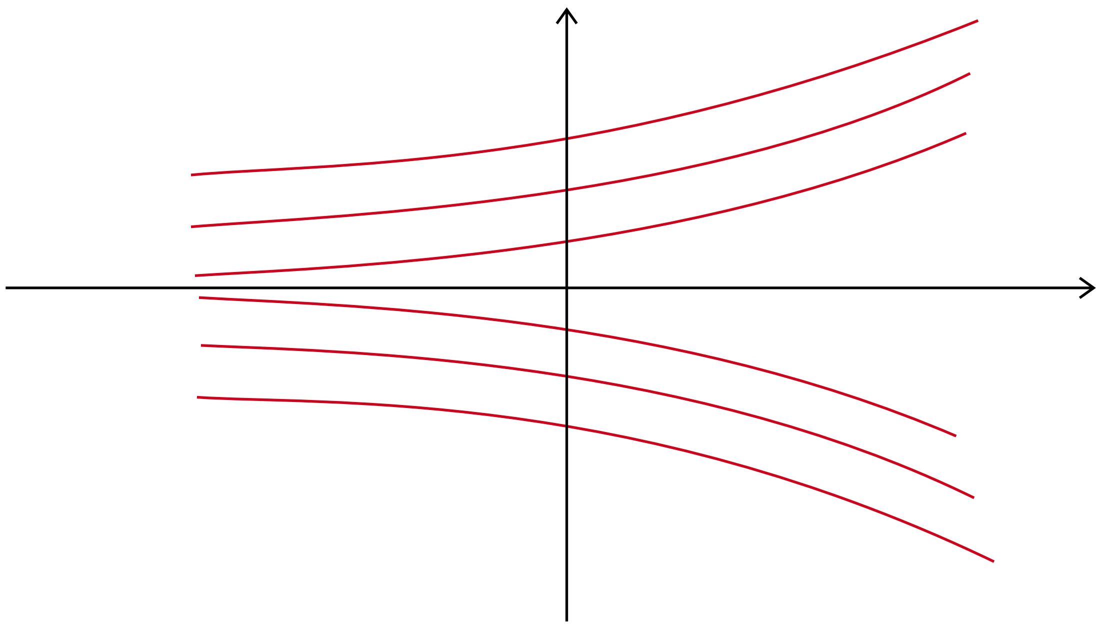
• *Si les fonctions a_i sont constantes, alors l'équation différentielle est dite " à coefficients constants " c-à-d :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x).$$

Définition 4.4. *Une solution de l'équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui une fonction dérivable et vérifie l'équation (E_1) ou deux fois dérivable et vérifie l'équation (E_2).*

<u>Exercice</u> 4.1.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y \qquad (y' = y).\\
\Rightarrow \frac{dy}{y} &= dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx\\
&\Rightarrow \ln|y| = x + c\\
&\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{x+c}\\
&\Rightarrow |y| = ke^x \qquad k : \textbf{ constante .}\\
&\Rightarrow y = c_0 e^x \qquad c_0 : \textbf{ constante .}
\end{aligned}$$



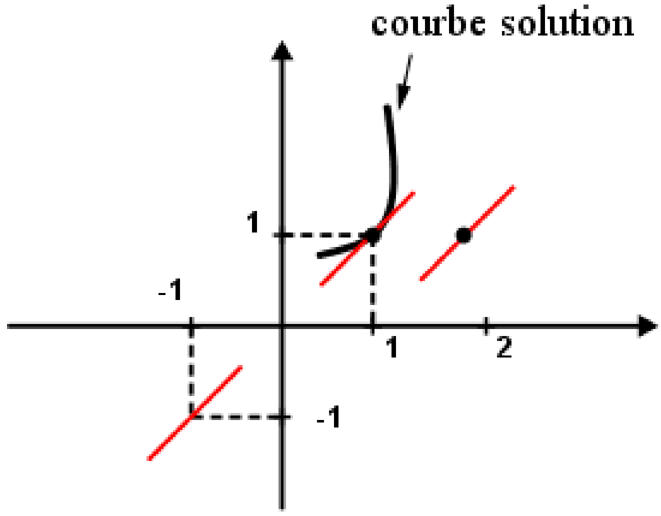
4.2 Equation différentielle du premier ordre

Considérons l'équation différentielle du premier ordre

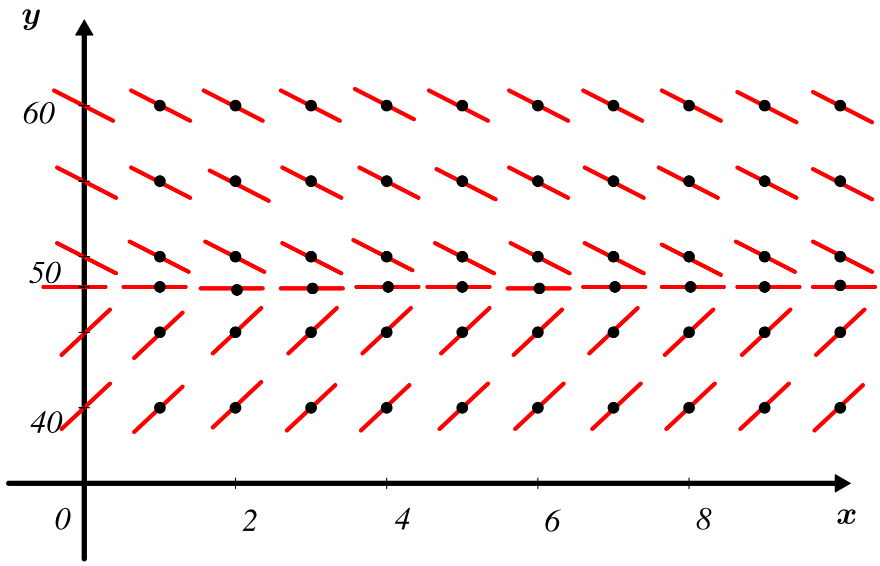
$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)). \quad \left(\begin{array}{c} \text{on encore} \\ y' = f'x, y) \end{array} \right).$$

Sans résoudre explicitement cette équation, on peut avoir une idée sur le comportement des solutions on traçant ce qu'on appelle **un champ de directs** c-à-d :
On évalue la fonction f en chacun des points d'une grille rectangulaire, la suite pour chacun de ces points, on trace un petit segment de droite ayant pour peut la valeur de la fonction f calculée en ce point.

Exemple 4.3.
❶ $y' = xy$ • *On pose* $f(x, y) = xy$
Alors par exemple $f(1, 1) = 1$, $f(-1, -1) = 1$ *et* $f(2, 1) = 2$



❷ $y' = 9,8 - \dfrac{y}{5}$ • *On pose* $f(y) = 9,8 - \dfrac{y}{5}$
Alors par exemple $y = 40$, $f(40) = 1,8$, $y = 50$, $f(50) = -0,2$, *on peut tracer le champ de direction suivant :*



Définition 4.5. *Soit* f *de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et* (x_0, y_0) *un point de* I.
On appelle problème de Cauchy en (x_0, y_0), *le problème suivant :*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

C-à-d chercher une solution de l'équation différentielle sous la condition supplémentaire $y(x_0) = y_0$.

Exemple 4.4.

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad \leftarrow \text{ problème le cauchy}$$

Théorème 4.1. *(Cauchy-Lipschitz)*
Soit l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ *avec* f *de classe* C^1 *par rapport à* y *alors pour un* (x_0, y_0)*, il existe une solution unique du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

4.2.1 Equations différentielle à variables séparables

Une équation différentielle est dite à variables séparables si elle est de la forme

$$g(y)y' = f(x), \tag{4.1}$$

où f et g sont des fonctions continues sur des intervalles I et J respectivement.
Si on note $y' = \dfrac{dy}{dx}$, on a une autre forme de (4.1)

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

En intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \int g(y)dy &= \int f(x)dx \\ \Rightarrow G(x) &= F(x) + c, \end{aligned}$$

où G est une primitive de g et F est une primitive de f.

Exemple 4.5.
❶ $y' = xy$. *Alors*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} &= xdx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= \int xdx \\ \Rightarrow \ln|y| &= \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ \Rightarrow |y| &= ke^{x^2/2}, \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

❷

$$\begin{aligned} x^2y' = e^y \Rightarrow e^{-y}dy = \frac{dx}{x^2} \\ \Rightarrow \int e^{-y}dy = \int \frac{dx}{x^2} \\ \Rightarrow + e^{-y} = +\frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln e^{-y} &= \ln\left(\frac{1}{x}+c\right) \\ \Rightarrow -y &= \ln\left(\frac{1}{x}+c\right) \\ \Rightarrow y &= \ln\left(\frac{x}{1+xc}\right), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.2.2 Equations différentielle linéaires du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation de la forme :

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{4.2}$$

où a et f sont deux fonctions continues.
L'équation (4.2) est dite aussi non homogène (on avec second montre). Pour la résolution de (4.2), on commence par l'équation différentielle homogène

a)

$$y' + a(x)y = 0. \tag{h}$$

Si $u \neq 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} &= -a(x)dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= -A(x) + c_1, \end{aligned}$$

où $c_1 \in \mathbb{R}$ et A est la primatie de a sur l'intervalle I. Ainsi :

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm e^{c_1} e^{-A(x)} \\ y(x) &= Ce^{-A(x)} \qquad \text{où } C = \pm e^{c_1}, \end{aligned}$$

qui est solution de (h).

b)

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{4.2}$$

Nous utilisons une méthode dite " méthode de la variation de la constante ", c-à-d chercher une solution générale de (4.2) sous la forme :

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)}$$

où $x \longmapsto C(x)$ est une nouvelle fonction inconnue de x.
Donc :

$$y'(x) = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)}.$$

Remplaçant y et y' dans (4.2), on obtient :

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} = f(x) \\ \Rightarrow & C'(x)e^{-A(x)} = f(x) \\ \Rightarrow & C'(x) = e^{A(x)}f(x) \\ \Rightarrow & C(x) = \int f(x)e^{A(x)}dx. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de (4.2) est donnée par :

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx\right)}$$

Exemple 4.6.

$$\boxed{y' - y = e^x} \tag{E}$$

● *Nous commençons par l'équation homogène*

$$\begin{aligned} y' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \\ \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \ln|y| = x + c_1, \ \ c_1 \in \mathbb{R}. \\ \Rightarrow & |y| = c_2e^x, \ \ c_2 \in \mathbb{R}, \ \ c_2 = e^{c_1}. \\ \Rightarrow & y = Ce^x, \ \ C \in \mathbb{R}, C = \pm c_2. \end{aligned}$$

● *Pour l'équation non homogène, on a la solution générale sous la forme :*

$$\begin{aligned} y(x) = C(x)e^x \\ \Rightarrow y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x. \\ (E) \Leftrightarrow C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^x \\ \Leftrightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x + k, \ \ k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{y(x) = (x+k)e^x, \ \ k \in \mathbb{R}.}$$

4.2.3 Equations différentielle de Bernoulli

Soient f, g deux fonctions continues sur I. Une équation de la forme

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

est dite une équation de Bernoulli.
Remarquons que si $\alpha = 0$ on $\alpha = 1$, alors on retrouve l'équation différentielle linéaire.
Pour résoudre l'équation de Bernoulli, on fait un changement de variable qui permet de la transforment en une équation linéaire.
On divise par $y^\alpha (y \neq 0)$, on obtient :

$$\frac{y'}{y^\alpha} + \frac{f(x)y}{y^\alpha} + g(x) = 0$$
$$\Rightarrow y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} + g(x) = 0.$$

On pose $z = y^{1-\alpha}$(changement de variable), alors on obtient $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$.
Ainsi, l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z + g(x) = 0,$$

et çà c'est une équation différentielle linéaire qu'on peut résoudre.

Exemple 4.7. *Résoudre $y' + xy + xy^A = 0 ...(E)$*
En posant $Z = y^{-3}$, on obtient :

$$z' = -3y'y^{-A}$$

Ainsi :

$$z' - 3xz = 3x.$$

On commence par trouver la solution de l'équation homogène $z' - 3xz = 0$.

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = 3xdx$$
$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int 3xdx$$
$$\Rightarrow \ln|z| = \frac{3x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Donc : $z = ke^{\frac{3x^2}{2}}$.
Maintenant, pour l'équation non homogène $z' - 3xz = 3x$, on a : $z = k(x)e^{\frac{3x^2}{2}}$.

$$z'(x) = k'(x)e^{\frac{3x^2}{2}} + 3xk(x)e^{\frac{3x^2}{2}}.$$

Ainsi :

$$k'(x)e^{\frac{3x^2}{2}} + 3xk(x)e^{\frac{3x^2}{2}} - 3k(x)e^{\frac{3x^2}{2}} = 3x$$
$$\Rightarrow \quad k'(x) = 3xe^{\frac{-3x^2}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad k(x) = -\int -3xe^{\frac{-3x^2}{2}}dx$$
$$k(x) = -e^{\frac{-3x^2}{2}} + c.$$

Ceci donne que

$$z(x) = \left(-e^{\frac{-3x^2}{2}} + c\right) e^{\frac{3x^2}{2}} = -1 + ce^{\frac{3x^2}{2}}.$$

puisque $z(x) = \dfrac{1}{y^3(x)} \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}}$, alors $y(x) = \left(\frac{1}{-1+ce^{\frac{3x^2}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

4.2.4 Equations de Riccati

Une équation différentielle de la forme

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2 \tag{R}$$

est dite équation de Riccati où f, g et h sont des fonction continues sur un intervalle I.
Pour la résolution, posant $y = y_1 + z$ avec y_1 solution particulière de (R), alors : $y' = y_1' + z'$ et on obtient :

$$\begin{aligned} y_1' + z' &= f(x) + g(x)(y_1 + z) + h(x)(y_1 + z)^2 \\ &= f(x) + g(x)y_1 + g(x)z + h(x)y_1^2 + h(x)z^2 + 2h(x)y_1 z. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$z' = (2hy_1 + g)z + hz^2$$

qui est une équation de Bernoulli.

Exemple 4.8. *Résoudre*

$$y' = 1 - x^3 + xy^2. \tag{*}$$

On remarque facilement que $y_1 = x$ est une solution particulière de (*). Donc, on cherche une solution générale de la forme $y = x + z$ où z est solution de

$$z' - zx^2z - xz^2 = 0$$

qui est une équation de Bernoulli.

$$\begin{aligned} \big(y' = 1 + z' \; et y' = 1 - x^3 + x(x+z)^2\big) &= 1 - x^3 + x(x^2 + z^2 + 2xz) \\ 1 + z' &= 1 - x^3 + x^3 + xz^2 + 2xz. \end{aligned}$$

On pose $h = \frac{1}{z} \Rightarrow h' = -\frac{z'}{z^2}$ et on remarque que h vérifie l'équation différentielle

$$h' + 2xh + x = 0.$$

Commençons par l'équation homogène $h' + 2xh = 0$.
La solution est $h(x) = ke^{-x^2}, \;\; k \in \mathbb{R}$.
Maintenant pour la solution de l'équation non homogène, on a : $h(x) = k(x)e^{x^2}$ qui implique que

$$k'(x) = -xe^{x^2} \Rightarrow k(x) = -\int xe^{x^2}.$$

Ainsi :

$$k(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + c \quad \textit{qui donne que}$$
$$h(x) = -\frac{1}{2} + ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$
$$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{-x^2}},$$

et ceci noms ramène à donner la solution générale de (*) sous la forme

$$y(x) = x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ce^{-x^2}}.$$

4.3 Equation différentielle du second ordre à coefficients constants

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
L'équation

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{E}$$

est dite équation différentielle de second ordre à coefficients constants avec second membre.

4.3.1 Equation homogène

L'équation (E) sans second membre est dite homogène.
Ainsi, soit :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{E_0}$$

Définition 4.6. *L'équation*

$$r^2 + ar + b = 0, \tag{c}$$

on $r \in \mathbb{R}$ est dite équation caractéristique de l'équation différentielle homogène (E_0).
Notons le discriminant de (E_0) par

$$\Delta = a^2 - 4b. \quad \textit{nous avons alors 3 cas .}$$

<u>Premier cas :</u> *Si $\Delta > 0$, alors l'équation (c) admet deux racines réelle distinctes r_1 et r_2.*
La solution générale de (E_0) est de la forme

$$y_0 = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \quad \textit{où } c_1 \textit{ et } c_2 \textit{ sont des constantes réelles.}$$

<u>Deuxième cas :</u> *Si $\Delta = 0$, alors l'équation (c) admet une racine double r et la solution de (E_0) est de la forme :*

$$y_0 = (c_1 + c_2x)e^{rx}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Troisième cas : *Si* $\Delta < 0$, *alors l'équation* (c) *admet deux racines complexe* $r_1 = \beta + iw$ *et* $r_2 = \beta - iw$ ($\beta, w \in \mathbb{R}$) *ainsi, la solution de l'équation* (E_0) *est de la forme :*

$$y_0 = (c_1 \cos(wx) + c_2 \sin(wx))e^{\beta x}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Exemple 4.9. ❶ $y'' + 2y' - 3y = 0 \qquad \ldots \qquad (1)$
L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \qquad (\Delta = 16).$$

Donc $r_1 = 1$ *et* $r_2 = -3$. *D'où la solution de* (1) *est :*

$$y_0 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

❷ $y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$
L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$ $\Delta = 0$ *et* $r = 2$
Ainsi, la solution de (2) *est de la forme*

$$y_0 = (c_1 + c_2 x)e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

❸ $y'' + 4y = 0 \qquad \ldots \qquad (3)$
L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r^2 = 4i^2 \Rightarrow r = 2i$ *ou* $r = -2i$.
Donc, la solution (3)

$$y_0 = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4.3.2 Equation non homogène

La solution générale de l'équation (E) s'écrit sous la forme

$$y = y_0 + y_1$$

où y_0 est la solution de l'équation homogène (E_0) et y_1 est la solution particulière de l'équation avec second membre.

a) Second membre comme un polynôme de degré n

$$y'' + ay' + by = P_n(x)$$

où P_n est un polynôme de degré n.
Premier cas : Si $b \neq 0$, alors on cherche y_1 sous la forme d'un polynôme de degré n.
Deuxième cas : Si $b = 0$, alors $y_1 = xQ_n(x)$ avec Q_n un polynôme de degré n.

Exemple 4.10. $y'' + 2y' - 3y = x^3 + 2x + 1 \qquad \ldots \qquad (*)$
On a : $y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
On cherche une solution particulière de la forme :

$$y_1 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

$$y_1' = 3a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2 \;\; \textit{et} \;\; y_1'' = 6a_0 x + 2a_1,$$

Nous remplaçant ces termes dans $(*)$*, nous avons :*

$$6a_0 x + 2a_1 + 6a_0 x^2 + 4a_1 x + 2a_2 - 3a_0 x^3 - 3a_1 x^2 - 3a_1 x - 3a_3 = x^3 + 2x + 1$$

par identification, on a :

$$\begin{cases} -3a_0 = 1 \\ 6a_0 - 3a_1 = 0 \\ 6a_0 + 4a_1 - 3a_2 = 2 \\ 2a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1/3 \\ a_1 = -2/3 \\ a_2 = -\frac{20}{9} \\ a_3 = -\frac{61}{27}. \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale de $(*)$ *est :*

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \left(-\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^2 - \frac{20}{9} x - \frac{61}{27} \right).$$

b) Second membre de la forme e^{nx} : $(n \in \mathbb{R})$

On cherche une solution y_1, pour cela, on distingue 3 cas suivant les valeurs de n.
❶ Si n n'est par une racine de l'équation caractéristique, alors $y_1 = ke^{nx}, \; k \in \mathbb{R}$.
❷ Si n est par une racine simple de l'équation caractéristique, alors $y_1 = kxe^{nx}, \; k \in \mathbb{R}$.
❸ Si n est par une racine double de l'équation caractéristique, alors $y_1 = kx^2 e^{nx}, \; k \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.11. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \qquad \ldots \qquad (**)$.
On a : $\;\; y_0 = (c_1 + c_2 x)e^{2x}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$
On cherche $y' = kx^2 e^{2x}$*. Ainsi,*

$$y_1' = 2kxe^{2x} + 2kx^2 e^{2x} \Rightarrow y'' = 2ke^{2x} + 4kxe^{2x} + 4kxe^{2x} + 4kx^2 e^{2x}.$$

Donc, $(**)$

$$\Rightarrow 2ke^{2x} + 4kxe^{2x} + 4kxe^{2x} + 4kx^2 e^{2x} - 8kxe^{2x} - 8kx^2 e^{2x} + 4kx^2 e^{2X} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2ke^{2x} = e^{2x} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la solution de $(**)$ *est de la forme :*

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Second membre de la forme $\sin(nx)$: $(n \in \mathbb{R})$ (on $\cos(nx)$)

Dans ce cas, il $y' = 2\cos$:

Premier cas : Si m n'est par une racine de l'équation caractéristique, alors

$$y_1(x) = k_1\cos(nx) + k_2\sin(nx), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Deuxième cas : Si n est une racine de l'équation caractéristique, alors :

$$y_1(x) = x(k_1\cos(nx) + k_2\sin(nx)).$$

Exemple 4.12.

$$y'' + 4y = \cos x.$$

On soit que $y_0 = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Remarquons que i *n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc :*

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1\cos x + k_2\sin x \\ \Rightarrow y_1' &= -k_1\sin x + k_2\cos x \Rightarrow y_1'' = -k_1\cos x - k_2\sin x. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &-k_1\cos x - k_1\sin x + 4k_1\cos x + 4k_2\sin x = \cos x \\ \Rightarrow &3k_1\cos x + 3k_2\sin x = \cos x \end{aligned}$$

par identification, on a :

$$\begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale est de la forme

$$y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{1}{3}\cos x.$$

d) Second membre de la forme $P_n x e^{nx}$(où P_n est un polynôme de degré n), $n \in \mathbb{R}$

Premier cas : Si n n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_1(x) = Q_n(x)e^{nx}$ où Q_n est un polynôme de degré n.

Deuxième cas : Si n est une racine de multiplicité la $(k = 1, 2)$ de l'équation caractéristique de la forme

$$y_1(x) = x^k Q_n(x)e^{nx}$$

où Q_n est une polynôme de degré n.

Exemple 4.13.

$$y'' - 2y' + y = (xt2)e^x \qquad \ldots \qquad (E)$$

L'équation sous second membre est

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad \ldots \qquad (E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) *est :*

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (r-1)^2 = 0 \qquad \ldots \qquad (c)$$

Ainsi :

$$y_0 = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Maintenant, puisque 1 *est une racine double de l'équation* (c)*, alors la solution particulière est :*

$$y_1 = x^2(ax+b)e^x.$$

$$\begin{aligned} y' &= 2x(ax+b)e^x + e^x + x^2(ae^x + (ax+b)e^x) \\ &= 2ax^2e^x + 2bxe^x + ax^2e^x + x^2(ax+b)e^x \\ &= 2ax^2e^x + 2bxe^x + ax^2e^x + ax^3e^x + bx^2e^x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_1'' &= 4axe^x + 2ax^2e^x + 2be^x + 2bxe^x + 2axe^x \\ &\quad + ax^2e^x + 3ax^2e^x + ax^3e^x + 2bxe^x + bx^2e^x \end{aligned}$$

En remplaçant dans (E), on obtient :

$$\begin{aligned} &4axe^x + 2ax^2e^x + 2be^x + 2bxe^x + 1axe^x + ax^2e^x + 3ax^2e^x \\ &+ ax^3e^x + 2bxe^x + bx^2e^x - 4ax^2e^x - 4bxe^x - 2ax^2e^x \\ &- 2ax^3e^x - 2bx^2e^x + ax^3e^x + bx^2e^x = xe^x + 2e^x \end{aligned}$$

ainsin par identification, on a :

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = 1 \end{cases}.$$

Ceci implique que

$$y_1 = x^2(\frac{1}{6}x + 1)e^x.$$

Ainsi, la solution générale de (E) *est donnée par :*

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + x^2(\frac{x}{6} + 1)e^x.$$

4.4 Exercices

Exercice 4.2.

❶ Pour $x \in]-1,1[$, résoudre
$y'(x)+y(x)=e^{2x}+e^{x}+3\sin x.$

❷ Pour $x \in R_+^*$, résoudre
$xy'(x)-(1+x)y(x)+e^{x}\left(1+x^2\right)=0.$

❸ Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, résoudre
$xy'(x)-2y(x)=x^5,$

❹ Pour $x \in |3,+\infty|$, résoudre
$(x-3)y'(x)-3y(x)=x+5.$

❺ Pour $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, résoudre
$y'(x)+2\operatorname{tg} x y(x)=\sin x.$

❻ Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre
$y'(x)+\operatorname{th} x y(x)=\operatorname{sh} x.$

❼ Pour $x \in]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, résoudre
$y'(x)+\operatorname{tg} x y(x)=\frac{1}{\cos x}.$

❽ Pour $x \in]0,\frac{\pi}{2}\{$, résoudre
$(x\cos x)y'(x)+(\cos x+x\sin x)y(x)=1.$

❾ Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre
$\left(1-x^2\right)y'(x)-2xy(x)=x^2.$

❿ Pour $x \in |\ 1,+\infty$, résoudre
$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}.$

Exercice 4.3.

❶ Pour $x \in]0,1[$, résoudre
$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=1+\sqrt{1-x^2}.$

❷ Pour $x \in]1,+\infty[$ résoudre
$y'(x)-\frac{1}{x}y(x)=\frac{1}{\ln^2 x}.$

❸ Pour $x \in]1,+\infty[$, résoudre
$y'(x)+\frac{1}{x\ln x}y(x)=1+\frac{1}{\ln x}.$

❹ Pour $x \in]0,1[$, résoudre
$x'(x)-y(x)=x.$

❺ Pour $x \in]0,1[$, résoudre
$x(1-x)y^{'}(x)+y(x)=x.$

❻ Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre
$y'(x)+y(x)=x^3.$

❼ Pour $x \in R_+^*$, résoudre
$xy'(x)-y(x)=x\ln x.$

❽ Pour $x \in]e^{-1},+\infty[$, résoudre
$(1+\ln x)y'(x)+\frac{1}{x}y(x)=2+\ln x.$

❾ Pour $x \in R^*$, résoudre
$xy'(x)-(x+1)y(x)=x^2\sqrt{1+e^{x}}.$

❿ Pour $x \in R^*$, résoudre
$y'(x)-\frac{2}{x}y(x)=\operatorname{Arctg} x+\ln x.$

Exercice 4.4.

❶ Pour $x \in |-1+\infty|$, résoudre
$y(x)+y'(x)=x(2y(x)-y'(x)).$

❷ Résoudre pour $y(1)=1$,
$y(x)y'(x)+\frac{1}{x}y^2(x)=\frac{1}{2x}.$

❸ Résoudre pour $y(1)=3$,
$xy(x)y'(x)=y^2(x)-x^2.$

❹ Résoudre pour $y(1)=1$,
$2y(x)y'(x)-\frac{1}{x}y^2(x)=\ln x.$

❺ Résoudre pour $y(0)=1$,
$2y(x)y'(x)=y^2(x)+2\operatorname{sh} x.$

❻ Résoudre pour $y(1)=2$,
$2xy(x)y'(x)-3y^2(x)+x^2=0.$

❼ Sont $\alpha>0$. Résoudre pour $y(1)=1$,
$xy'(x)=x^2+(1+\alpha)y^2(x).$

❽ Résoudre pour $y(0)=2$,
$1+y^2(x)-(x^2-1)y(x)y'(x)=0.$

❾ **Résoudre pour** $y(1) = 1$,
$y^2(x)y'(x) - \frac{1}{x}y^2(x) = x.$

❿ **Résoudre pour** $y(1) = 1$,
$y^2(x)y'(x) + \frac{1}{x}y^3(x) = \frac{1}{x^2}.$

Exercice 4.5.

❶ **Résoudre pour** $y(1) = 1$,
$xy^3(x)y'(x) - y^4(x) = x^4 \ln x.$

❷ **Résoudre pour** $y(0) = 1$,
$y(x)y'(x) + x\left(1 - 2\sqrt{x^2 + y^2(x)}\right) = 0.$

❸ **Résoudre pour** $y(1) = 1$,
$y'(x)\sqrt{x} - y(x) + (x - 2\sqrt{x})\sqrt{y(x)} = 0.$

❹ **Résoudre pour** $y(1) = 1$,
$y'(x) = \frac{4y(x)}{x} + x\sqrt{y(x)}.$

❺ **Résoudre pour** $y(0) = \frac{-1}{12}$ **et** $y'(0) = 0$, $(y'(x))^2 = y'(x) + x.$

❻ **Résoudre pour** $y(1) = 1$ **et** $y'(1) = 0$,
$x^2y''(x) - xy'(x) = x^3e^x.$

❼ **Résoudre pour** $y(1) = 1$ **et** $y'(1) = 1$, $xy''(x) - y'(x) = \ln x.$

❽ **Résoudre pour** $y(1) = 1$ **et** $y'(1) = 0$,
$(x^2 + 1)\,y''(x) - 2xy'(x) = (x^2 + 1)^2.$

❾ **Pour** $x \in \mathbb{R}_+^*$, **résoudre**
$xy''(x) - y'(x) = 2x^3 \operatorname{Arctg} x.$

❿ **Pour** $x \in \mathbb{R}_+^*$, **résoudre**
$xy''(x) - y'(x) = 1 + \frac{\ln\sqrt{x}}{x}.$

Exercice 4.6.

Résoudre

❶ $y''(x) - 4y(x) = 4e^{-2x}.$

❷ $y''(x) + y(x) = \sin x.$

❸ $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2 - \sin x.$

❹ $y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = e^{5x} + \cos x$

❺ $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = e^{4x} + \cos x.$

❻ $y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = xe^x + \cos x.$

❼ $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 2\operatorname{ch} x + 4\operatorname{sh} x.$

❽ $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x.$

❾ $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x^2e^x + \sin x + xe^{2x}\cos x.$

❿ $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = x^2 + x^3 + e^{2x}\sin x.$

Exercice 4.7.

❶ **Pour** $x \in]0, \pi[$**, résoudre** $y''(x) + y(x) = -\frac{1}{\sin x}$.

❷ **Pour** $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$**, résoudre** $y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{\cos x}$.

❸ **Pour** $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$**, résoudre** $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \frac{e^x}{\cos^2 x}$.

❹ **Résoudre** $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x + \sin^2 x$.

❺ **Résoudre**

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \left(2 + 17x + x^2\right) e^{6x}.$$

❻ **Soit** $\omega > 0$**. Résoudre** $y''(x) + \omega^2 y'(x) = 0$.

❼ **Soit** $\omega > 0$**. Résoudre** $y''(x) + \omega^2 y(x) = \cos \omega x$.

❽ **Soit** $\alpha \in \mathbb{R}$**. Résoudre**

$$y''(x) + \alpha y'(x) + (\alpha - 1)y(x) = \sin(\alpha - 2)x.$$

❾ **Résoudre** $y''(x) + 9y(x) = \cos 3x + \sin 3x$.

❿ **Résoudre** $y''(x) + y'(x) = 3\cos x$.

Exercice 4.8.

❶ **Résoudre** $x^2 y''(x) + xy'(x) = \ln x$.

❷ **Pour** $x \in \mathbb{R}_*^+$**, résoudre** $y''(x) - \frac{1}{x} y'(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

❸ **Pour** $z \in \mathbb{R}_+^*$**, résoudre** $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 4$.

❹ **Résoudre** $y''(x) + \dfrac{1}{x} y'(x) - \dfrac{1}{x^2} y(x) = \ln x$.

❺ **Soit** $\alpha \in \mathbb{R}$ **Résoudre** $y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = e^x + e^{-2x}$.

❻ **Soit** $a \in \mathbb{R}$**. Résoudre** $y''(x) + 2(1 + \alpha)y'(x) + y(x) = x + x^2 + x^3$.

❼ **Soient** $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$**. Résoudre** $y''(x) + \alpha^2 y(x) = 3\sin \omega x$.

❽ **Soient** $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ **Résoudre** $y''(x) + 2y'(x) + \alpha y(x) = \cos \omega x$.

❾ **Pour** $x \in \mathbb{R}^*$**, Résoudre** $xy''(x) - y'(x) + (1 - x)y(x) = 0$.

❿ **Résoudre** $\left(1 + x^3\right) y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 6\left(1 + x^2\right)^2$.

Exercice 4.9.

❶ **Pour** $x \in \mathbb{R}_+^*$**, Résoudre** $xy''(x) + (1 + x)y'(x) + y(x) = \left(\frac{3-x}{x^2}\right) e^x$.

❷ **Pour** $x \in R_{\hat{H}}$**, résoudre** $x^2 y''(x) - 3xy'(x) - 5y(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

❸ **Pour** $x \in R_+^*$**, résoudre** $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + \left(2 - x^2\right) y(x) = x + 1$.

❹ **Pour a** ER_i^***, résoudre** $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1 + x^2$.

❺ **Résoudre** $x^2 y''(x) - 6y(x) = x^3 \ln x$.

❻ **Résoudre** $\left(1 + x^2\right) y''(x) - xy'(x) = 1 + x^2$.

❼ **Résoudre** $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^2\ln^2 x$.

❽ **Résoudre** $y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

❾ **Pour** $x \in]1, +\infty[$ **résoudre** $(1-x)y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2 - 2x + 2$.

❿ **Résoudre** $x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = \ln x$.

Exercice 4.10.

❶ **Résoudre** $x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = (x-1)^3$ **sachant que l'équation homogène assolée posséder doux solutions qui sont de la forme** $y(x) = x^k$ **avec** $k \in \mathbb{N}$.

❷ **Résoudre** $x^2y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = (x-1)^3$ **sachant que** $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ **est une solution de l'équation homogène assolée.**

❸ **Soient** I **un intervalle contention** 0 **et** $p.q : f \to \mathbb{R}$ **deux fonction continues Montrer que l'équation différentielle.**
$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ **n'admet par simultanément** x **et** x^2 **pour solution.**

❹ **Soit** $\omega > 0$. **Trouver toutes les fonctions** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ **de sorte que la fonction** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ **définie par** $g(x) = e^{\omega x}f(x)$ **soit solution de l'équation différentielle :**
$y''(x) + \omega y'(x) - \frac{y(x)}{f(x)} = 0$.

❺ **Soit** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **la fonction définie par :** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

1) Vérifier que f **est solution de l'équation différentielle**

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x.$$

2) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

❻ **Un corps de masse** m **tombe verticalement d'une certaine altitude. Sa vitesse initiale est nulle. De plus, on suppose que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de sa vitesse.**

1) Établir l'équation du mouvement et la résoudre.

2) Déterminer la vitesse limite que peut atteindre ce corps.

❼ **Trouver la fonction** $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **qui ne s'annule pas sauf pour** $x = 1$ **et qui vérifie :** $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = \frac{f^2(x)}{x}$.

❽ **Soient** $\alpha, \beta > 0$. **Résoudre pour** $f(0) = 1$ **et** $g(0) = 0$.
$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = \alpha g(x) \\ g'(x) + g(x) = \beta f(x) \end{cases}.$$

Exercice 4.11.

Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

❶ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et
$$y'(x) = xy^4(x).$$

❷ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et
$$y'(x) + y(x) = y^3(x).$$

❸ $x_0 = 0, y_0 = -\frac{1}{2}$ et
$$y(x)y'(x) - y^2(x) = x^2y^3(x).$$

❹ $x_0 = 1, y_0 = 1$ et
$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = -y^2(x)\ln x.$$

❺ $x_0 = 1, y_0 = 1$ et
$$2xy'(x) + y(x) + 3x^2y^2(x) = 0.$$

❻ $\alpha > 0, x_0 = 0, y_0 = \frac{\alpha}{2}$ et
$$y'(x) - 2\alpha y(x) = -2y^2(x).$$

❼ $\alpha, \beta > 0, x_0 = 0, y_0 = \frac{\alpha}{2\beta}$ et
$$y'(x) = \alpha y(x) - \beta y^2(x).$$

❽ $x_0 = 1, y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{3}{x}y(x) + \frac{1}{1+x^2}y^2(x) = 0.$$

❾ $x_0 = 1, y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = \frac{\sin x}{x^2}y^2(x).$$

❿ $x_0 = 1, y_0 = 1$ et
$$y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = y^3(x).$$

Exercice 4.12.

Résoudre les équations de Bernoulli suivantes :

$\boxed{1}$ $x_0 = 0, y_0 = \frac{1}{\sqrt{e-1}}$ et
$$y'(x) - (x)\cos x = y^3(x)\cos x.$$

$\boxed{2}$ $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = \frac{1}{\sqrt{e-1}}$ et
$$y'(x) + y(x)\sin x = -y^3(x)\sin x.$$

$\boxed{3}$ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et
$$y'(x) + xy(x) = xy^4(x).$$

$\boxed{4}$ $x_0 = 1, y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{\ln x}{x^2}y^2(x).$$

$\boxed{5}$ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et
$$y'(x) - y(x) = \frac{\cos 2x}{e^{2x}}y^3(x).$$

$\boxed{6}$ $x_0 = 1, y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = x^4y^4(x).$$

$\boxed{7}$ $x0 = 1, y_0 = 2$ et
$$xy^3(x)y'(x) - y^4(x) = y^{12}(x).$$

$\boxed{8}$ $x_0 = 1, y_0 = \sqrt{2}$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \sqrt{1+x^3}y^3(x).$$

$\boxed{9}$ $x_0 = 0, y_0 = 2$ et
$$(1+x^2)\,y'(x) = 2xy(x)\left(y^4(x) - 1\right).$$

$\boxed{10}$ $x_0 = 0, y_0 = 2$ et
$$y'(x) - \frac{1}{1+x}y(x) = \frac{1}{1+x^2}y^2(x).$$

$\boxed{11}$ $x_0 = 0, y_0 = 2$ et
$$y'(x) - 4y(x) = -2y^3(x).$$

$\boxed{12}$ $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{27}$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = -\sqrt[3]{x^2y(x)}.$$

$\boxed{13}$ $x_0 = 1, y_0 = 1$ et
$$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = -\sqrt[3]{y^2(x)}.$$

Exercice 4.13.

Résoudre les équations de Riccati suivantes :

❶ $x_0 = 1, y_0 = 2$ et
$$y'(x) = y^2(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{3}{x^2}.$$

❷ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et
$$y'(x) = y^2(x) - 2e^{-x}y(x) + e^{-9x} - e^{-x}.$$

❸ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et
$$y'(x) = y^2(x) - 2e^x y(x) + e^{2x} + e^x.$$

❹ $x_0 = 0, y_0 = 3$ et
$$y'(x) = y^2(x) - y(x) - 2.$$

❺ $x_0 = 0, y_1 = 0$ et
$$y'(x) = x^2y^2(x) + x^2.$$

❻ $x_0 = 1, y_0 = 0$ et
$$x^2\left(y'(x) + y^2(x)\right) = 2.$$

❼ $x_0 = 0, y_0 = 2$ et
$$xy'(x) - y(x) + y^3(x) = y(x) - 1.$$

Exercice 4.14.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et $y(x)\cos y(x) = x$.

❷ $x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{2}$ et $y'(x) = \sin y(x)$.

❸ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et $y'(x) = \dfrac{x}{1+y(x)}$.

❹ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et $y'(x) = \dfrac{x}{1-y(x)}$.

❺ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et $y'(x) + xy^2(x) = -x$.

❻ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et $y'(x) + x^2y^2(x) = -x^2$.

❼ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et $(1+x^2)y'(x) = xe^{y(x)}$.

❽ $x_0 = 0, y_0 = \sqrt{e-1}$ et $y(x)y'(x) + xy^2(x) + x = 0$.

❾ $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = -1$ et $x^2y'(x) - y^2(x) = 1$.

❿ $x_0 = 0, y_y = 2$ et $y^2(x)y'(x) = x^2$.

Exercice 4.15.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $y'(x) = xy^4(x)$.

❷ $x_0 = 0, y_y = 1$ et $y'(x) = y(x) - 2y^2(x)$.

❸ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $y'(x) = xy^3(x)$.

❹ $x_0 = 1, y_0 = \sqrt{3}$ et $y(x)y'(x) + 2x\sqrt{4-y^2(x)} = 0$.

❺ $x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y'(x)\,\mathrm{tg}\, y(x) + e^x\cos^2 y(x) = 0$.

❻ $x_0 = 0, y_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y'(x)\,\mathrm{tg}\, y(x) + x^3\cos^2 y(x) = 0$.

❼ $x_0 = 4, y_0 = 2$ et $(x-3)^2y'(x) = x\sqrt{y(x)-1}$.

❽ $x_0 = 0, y_0 = 2$ et $y'(x) = y(x) - \frac{1}{y(x)}$.

❾ $x_0 = 0, y_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{y'(x)}{\sqrt{1-y^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

❿ $x_0 = 1, y_0 = \sqrt{e-1}$ et $xy(x)y'(x) = 1 + x^2 + y^2(x) + x^2y^2(x)$.

Exercice 4.16.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $x_0 = 1, y_0 = 1$ et $y(x)y'(x) - (x+\sin x)e^{-y^2(x)} = 0$.

❷ $x_0 = 1, y_0 = 1$ et $xy^6(x) - x^2y^2(x)y'(x) = 0$.

❸ $x_0 = 0, y_0 = 0$ et $x(1+2y(x)+y^2(x)) - (1+x^2)(1+y(x))y'(x) = 0$.

❹ $x_0 = 1, y_0 = 2$ et $y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \frac{y(x)}{\ln y(x) - \ln x}$.

❺ $x_0 = 1, y_0 = \sqrt{2}$ et $x^4 + y^4(x) - 2x^3y(x)y'(x) = 0$.

❻ $x_0 = \pi_1, y_0 = \pi$ et $y'(x) + \sin\left(\frac{x+y(x)}{2}\right) = \sin\left(\frac{x-y(x)}{2}\right)$.

❼ $x_0, y_0 = 0$ et $y'(x) = \cos\left(\frac{y(x)}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{y(x)}{3} - x\right)$.

❽ $x_0 = 0, y_0 = 1, y'(0) = 1$ et $2y'(x)y''(x) = (y'(x))^2\left(1 + (y'(x))^2\right)$.

❾ $x_0 = 0, y_0 = -\sqrt{e^4 - 1}$ et $y(x)y'(x) - (x^2 + e^x)\left(1 + y^2(x)\right) = 0$.

❿ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $y(x)y'(x) = -x + \sqrt{x^2 + y^2(x)}$.

Exercice 4.17.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $y'(0) = y(0) = 0$ et $y''(x) = 1 + (y'(x))^2$.

❷ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $y'(x) = \sqrt{y(x) + \sin x} - \cos x$.

❸ $x_0 = 0, y_0 = \frac{1}{2}$ et $(1 + x)y'(x) = y(x)(1 - y(x))$.

❹ $x_0 = 0, y_0 = 1$ et $x^2(1 - 3y(x)) - y'(x) = 0$.

❺ Trouver la fonction $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifie $y(x) = \frac{\pi}{2} + \int_1^x \frac{\sin y(t)}{t} dt$.

Exercice 4.18.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $x_0 = 1, y_0 = 0$ et $y'(x) = 2 + \dfrac{y(x)}{x}$.

❷ $x_0 = 1, y_0 = 0$ et $xy'(x) = xe^{-\frac{y(x)}{x}} + y(x)$.

❸ $x_0 = 1, y_0 = 0$ et $x^2y'(x) = x^2 + xy(x) - y^2(x)$.

❹ $x_0 = 1, y0 = \frac{\pi}{4}$ et $xy'(x) = y(x) + x\cos^2\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❺ $x_0 = 1, y0 = \frac{\pi}{2}$ et $xy'(x) = y(x) - 2x^3\sin\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❻ $x_0 = 1, y_0 = \frac{\pi}{6}$ et $xy'(x) = y(x) + x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❼ $x_0 = 1, y_0 = \frac{\pi}{6}$ et $xy'(x) = y(x) - x^2\mathrm{tg}\left(\frac{y(x)}{x}\right)$.

❽ $x_0 = 1, y_0 = 1$ et $y'(x) = \frac{y(x)}{x} - 2\sqrt{\frac{y(x)}{x}}$.

❾ $x_0 = 1, y_0 = 0$ et $xy'(x) = y(x) + \sqrt{x^2 + y^2(x)}$.

❿ $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}$ et $y(x) + (x - y(x))y'(x) = 0$.

Exercice 4.19.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

❶ $y(1) = 0, y'(1) = \frac{1}{2}$ et $x^3y''(x) - x^2y'(x) = -2x^3(y'(x))^2$.

❷ $x_0 = 1, y_0 = 2$ et $xy'(x) = y(x)\left(1 + \ln\left(\frac{y(x)}{x}\right)\right)$.

❸ $x_0 = 1, u_0 = 0$ et $x^2 + y^2 + x^2y' = 0$.

❹ $x_0 = 2, y_0 = -3$ et $y'(x) = -\frac{2x + y(x) + 1}{x + y(x) + 2}$.

❺ **Soient I un intervalle ouvert, $p.q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle.**

$y''(x) + p(x)y'x + q(x)y(x) = 0.$

1) Montrer que pour tout $x \in I$:

$y_1^2(x) + y_2^2(x) \neq 0.$

2) Montrer que s'il existe deux éléments $a < b$ de I pour lesquels $y_1(a) = y_1(b) = 0$, il existe au moins un élément c de $]a, b[$ pour lequel $y_2(c) = 0$.

3) En déduire que les zéros de la fonction y_1 sont isolés.

❻ **Soit $q : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que**

$$\int_1^{+\infty} q(t)dt = +\infty.$$

Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y''(x) + q(x)y(x) = 0$. s'annule une infinité de fois.

Chapitre 5

Intégrales multiples

Sommaire

5.1 Intégrale double sur un rectangle fermé

Soient $a < b$ et $c < d$ quatre nombres réels et $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, les deux fonctions $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ et $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)dx \quad \text{et} \quad h(x) = \int_c^d f(x, y)dy,$$

sont continues. De plus,

$$\int_c^d g(y)dy = \int_a^b h(x)dx.$$

Définition 5.1. *Par définition, le nombre réel*

$$\int_c^d g(y)dy = \int_a^b h(x)dx,$$

est appelé ***l'intégrale double*** *de la fonction f sur le rectangle fermé $D = [a, b] \times [c, d]$ et est noté $I_D(f)$.*

Par convention, on écrira

$$\begin{aligned}
I_D(f) &= \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \\
&= \int_a^b h(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \\
&= \iint_D f(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

Propriétés

Soient $f, g : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors,

1) Linéarité. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy.$$

2)
$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

3) Si $f \geq 0$:

a) $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

b) $\iint_D f(x,y)dxdy = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$

4) Si $f \geq g$:

a) $\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy.$

b) $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D g(x,y)dxdy \Longleftrightarrow f = g.$

5)
$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = (b-a)(d-c).$$

6) Si $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ et $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$,

$$m\,\text{Aire}(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M\,\text{Aire}(D).$$

Proposition 5.1. *(**Théorème de la moyenne**) Soit*

$$f : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R},$$

une fonction continue. Alors, il existe au moins un élément (x_0, y_0) de D pour lequel on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)\,\text{Aire}(D).$$

5.2 Intégrale double sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$

Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ est appelé un rectangle fermé s'il peut s'écrire sous la forme

$$D = [a, b] \times [c, d]$$

où a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$.

Nous dirons que $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de **rectangles fermés quasi disjoints** si pour tout couple d'entiers $p \neq q$:

$$\overset{\circ}{D}_p \cap \overset{\circ}{D}_q = \emptyset.$$

Proposition 5.2. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné non vide. Alors, il existe au moins une famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés quasi disjoints telle que*

$$D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k.$$

De plus, si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |I_{D_k}(f)| < +\infty.$$

Proposition 5.3. *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\widehat{D}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$* deux *familles de rectangles fermés quasi disjoints telles que*

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k = D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \widehat{D}_k,$$

et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{\widehat{D}_k}(f).$$

Définition 5.2. *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de rectangles fermés quasi disjoints dont la réunion est D et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors, par définition, le nombre réel*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f)$$

*est appelé **l'intégrale double** de la fonction f sur D et est noté*

$$\iint_D f(x, y)dxdy \quad \text{ou encore } I_D(f).$$

Ainsi,

$$I_D(f) = \iint_D f(x, y)dxdy = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(f).$$

5.2.1 Propriétés

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Alors,
1) Linéarité. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy.$$

2) $$\left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

3) Si $f \geq 0$:
a) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.
b) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.
4) Si $f \geq g$:
a) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy \geq \iint_D g(x,y)dxdy$.
b) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D g(x,y)dxdy \Longleftrightarrow f = g$.
5) Si $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ et $M = \sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$,

$$m \operatorname{Aire}(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \operatorname{Aire}(D).$$

6) Pour toute famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de rectangles fermés quasi disjoints dont la réunion est D, on a

$$\operatorname{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{D_k}(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{Aire}(D_k).$$

7) Si $f < g$, le volume V de

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, f(x,y) < z < g(x,y)\right\},$$

est donné par $V = \iint_D (g(x,y) - f(x,y))dxdy$.
8) Si $D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{R}^2$ sont deux ouverts bornés non vides. Alors,

$$\iint_{D_1} |f(x,y)|dxdy \leq \iint_{D_2} |f(x,y)|dxdy.$$

9) Soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles ouverts non vides et disjoints de $\mathbb{R}^2$ dont la réunion est D. Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\iint_{D_k} f(x,y)dxdy \right).$$

10) Par convention, si la fonction f est continue sur le compact $\bar{D}$, on pose

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Toutes les propriétés données ci-dessus pour $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ restent valables pour $\displaystyle\iint_{\bar{D}} f(x,y)dxdy$.

5.2.2 Calcul des intégrales doubles

Proposition 5.4. *Soient $a < b$ deux nombres réels et $\Phi, \Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in]a, b[$: $\Phi(x) < \Psi(x)$. Posons,*

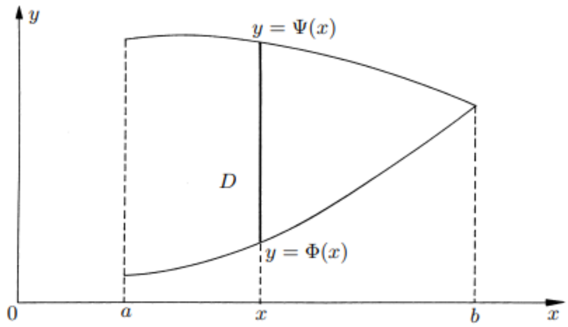
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \Phi(x) < y < \Psi(x)\right\}.$$

Alors, pour toute fonction continue

$$f : \bar{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \Phi(x) \leq y \leq \Psi(x)\right\} \to \mathbb{R},$$

on a

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y)dy\right) dx = \int_a^b dx \int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y)dy.$$



Remarques :

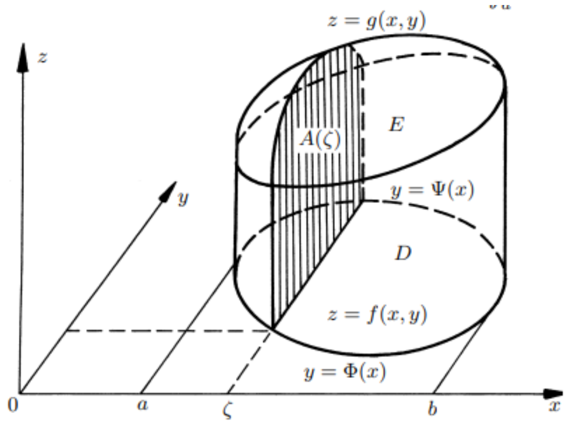
1) Supposons que $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que sur $D : f < g$ et posons pour $a < \zeta < b$:

$$A(\zeta) = \int_{\Phi(\zeta)}^{\Psi(\zeta)} (g(\zeta, y) - f(\zeta, y))dy.$$

Alors, $A(\zeta)$ est la surface plane obtenue en coupant le corps

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, f(x, y) < z < g(x, y)\right\},$$

par le plan d'équation $x = \zeta$. Le volume V de E est $V = \displaystyle\int_a^b A(\zeta)d\zeta$.



2) $\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{\Phi(x)}^{\Psi(x)} dy = \int_a^b (\Psi(x) - \Phi(x))dx.$

3) Dans le cas particulier, où $\Phi(x) = c$ et $\Psi(x) = d$, on a bien

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Proposition 5.5. *Soient $c < d$ deux nombres réels et $\Phi, \Psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $y \in]c,d[$: $\Phi(y) < \Psi(y)$. Posons*

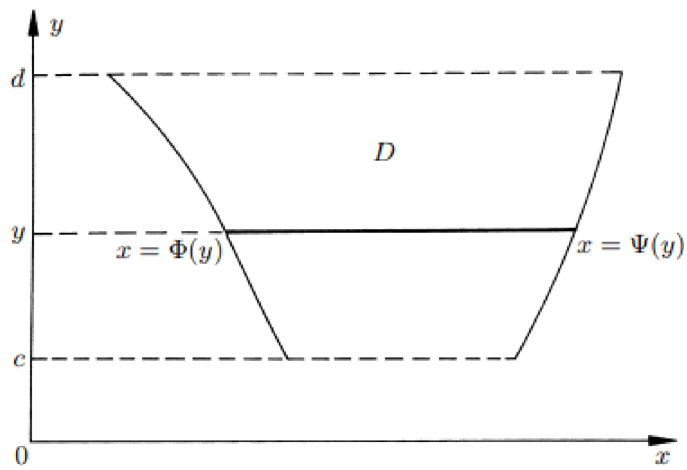
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(y) < x < \Psi(y), c < y < d\}.$$

Alors, pour toute fonction continue

$$f : \overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(y) \leq x \leq \Psi(y), c \leq y \leq d\} \to \mathbb{R}.$$

on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx.$$



Changement de variables

Proposition 5.6. *Soient $E, D \subset \mathbb{R}^2$ deux ouverts bornés et $(\varphi, \psi) : E \to D$ une bijection de classe C^1. Alors, pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a*

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \iint_E f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) \right| dudv \\ &= \iint_E f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} \right| (u,v)dudv.\end{aligned}$$

Cas particuliers : Pour les ***coordonnées polaires***

$$\begin{cases} x = \varphi(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \\ y = \psi(\rho,\theta) = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad \text{on a} \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \rho.$$

5.3 Intégrale double sur $\mathbb{R}^2$

Une famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles ouverts et bornés de $\mathbb{R}^2$ est appelée un **recouvrement régulier** de $\mathbb{R}^2$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\forall k \in \mathbb{N} : D_k \subset D_{k+1}$.
2) $\forall r > 0, \exists k_r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r, |y| \leq r\right\} \subset D_{k_r}.$$

Proposition 5.7. *Soient $f : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$ une fonction continue et $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(\widehat{D}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ deux recouvrements réguliers de $\mathbb{R}^2$. Alors, on a l'alternative suivante : ou bien les deux suites (d_k) et $\left(\widehat{d_k}\right)$ définies respectivement par*

$$d_k = \iint_{D_k} f(x,y)dxdy \quad \text{et} \quad \widehat{d}_k = \iint_{\widehat{D}_k} f(x,y)dxdy,$$

convergent vers la même limite ou bien $\lim\limits_{k\to+\infty} d_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \widehat{d}_k = +\infty$.

Définition 5.3. *Soient $f : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$ une fonction continue et $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement régulier de $\mathbb{R}^2$. Si la suite*

$$\left(d_k = \iint_{D_k} f(x,y)dxdy\right),$$

*converge, sa limite est appelée **l'intégrale double** de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ et on écrit*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)dxdy.$$

Pour exprimer que l'intégrale double ci-dessus converge, on utilise la notation

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy < +\infty.$$

Dans le cas contraire, on écrit $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = +\infty$.

Proposition 5.8. *(**Critère de comparaison**) Soient $f,g : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$ deux fonctions continues telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$.*
Alors,

1) $$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy < +\infty \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy < +\infty.$$

2) $$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = +\infty \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy = +\infty.$$

Proposition 5.9. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|dxdy < +\infty.$$

Alors, la suite

$$\left(d_k = \iint_{D_k} f(x,y)dxdy\right),$$

converge et sa limite est indépendante du recouvrement régulier $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *choisi.*

Définition 5.4. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|dxdy < +\infty.$$

Alors, la limite de la suite

$$\left(d_k = \iint_{D_k} f(x,y)dxdy\right),$$

où $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est un recouvrement régulier de* $\mathbb{R}^2$ *est appelée l'intégrale double de la fonction* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *et on écrit*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \lim_{k\to+\infty} d_k = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f(x,y)dxdy.$$

Proposition 5.10. *Linéarité. Soient* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues telles que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|dxdy < +\infty \quad \text{et} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)|dxdy < +\infty.$$

Alors, pour tout couple α *et* β *de* $\mathbb{R}$*, on a*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha f + \beta g)(x,y)dxdy = \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy + \beta \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy.$$

Proposition 5.11. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|dxdy < +\infty,$$

et supposons qu'à chaque $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$*, on puisse associer une fonction continue* $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

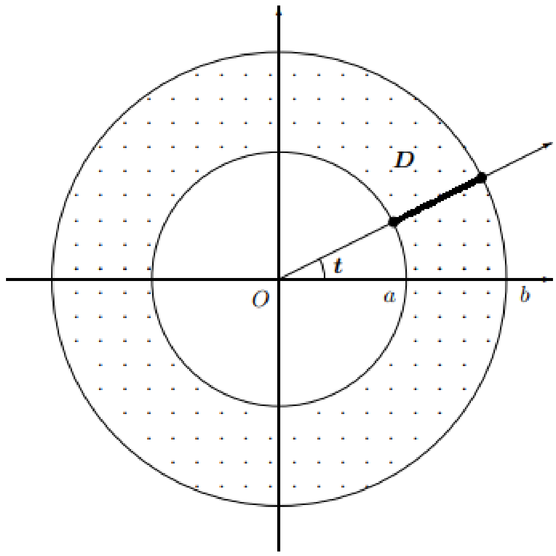
1) $\forall |y| \leq \alpha$ *et* $x \in \mathbb{R}$: $|f(x,y)| \leq g_\alpha(x)$*;*
2) *l'intégrale généralisée* $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(x)dx$ *converge.*

Alors,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\right) dy.$$

Exemple 5.1. *Calculer* $I = \iint_D f(x,y)dxdy$
où D *est la couronne limitée par les cercles de centre* O *et de rayons respectifs* a *et* $b(0 < a < b)$ *et*

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$



Le domaine D *est obtenu lorsque les coordonnées polaires* (r, t) *parcourent le rectangle*

$$\Delta = [a, b] \times [-\pi, \pi].$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{1}{r^2}.$$

Donc

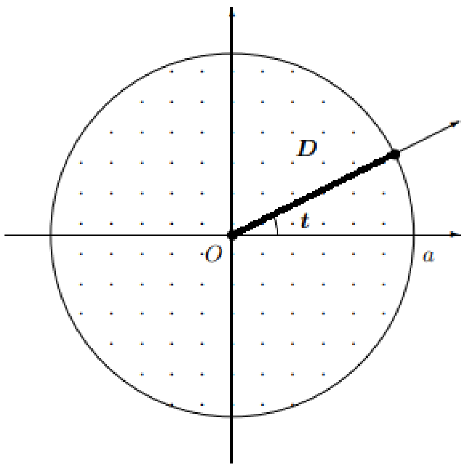
$$I = \iint_{\Delta} f(r\cos t, r\sin t) r dr dt = \iint_{\Delta} \frac{dr dt}{r}.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \iint_{\Delta} \frac{dr dt}{r} = \left(\int_a^b \frac{dr}{r}\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} dt\right) = 2\pi \ln \frac{b}{a}.$$

Exemple 5.2. *Calculer* $I = \displaystyle\iint_D f(x, y) dx dy$
où D *est le disque de centre* O *et de rayon* a *et*

$$f(x, y) = (x + y)^2.$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r, t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [0, a] \times [-\pi, \pi].$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = (r\cos t + r\sin t)^2 = r^2(1 + \sin 2t).$$

Donc

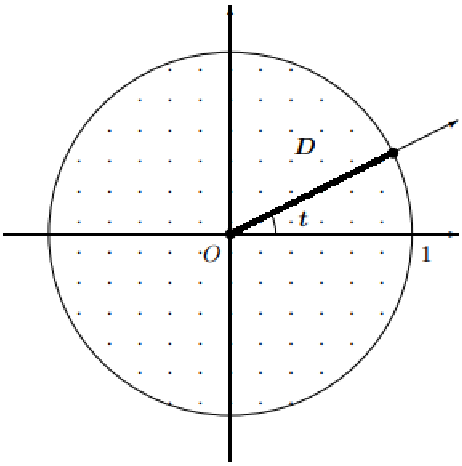
$$I = \iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t) r dr dt = \iint_\Delta r^3(1 + \sin 2t) dr dt.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^a r^3 dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \sin 2t)dt\right) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \left[t - \frac{\cos 2t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Exemple 5.3. *Calculer* $I = \iint_D f(x, y) dx dy$
où D est le disque de centre O et de rayon 1 et

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r, t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [0, 1] \times [-\pi, \pi].$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{(r\cos t + r\sin t)^2}{(1 + r^2)^2} = \frac{r^2(1 + \sin 2t)}{(1 + r^2)^2}.$$

Donc

$$I = \iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t) r dr dt = \iint_\Delta \frac{r^3(1 + \sin 2t)}{(1 + r^2)^2} dr dt.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} (1+\sin 2t) dt\right).$$

En effectuant le changement de variable $u = r^2$, *on a* $du = 2rdr$ *donc*

$$\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr = \int_0^1 \frac{u}{2(1+u)^2} du = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right) du,$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2} dr = \frac{1}{2}\left[\ln(1+u) + \frac{1}{1+u}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Par ailleurs

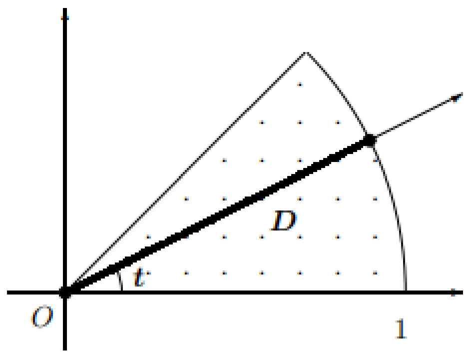
$$\int_{-\pi}^{\pi} (1+\sin 2t) dt = \left[t - \frac{\cos 2t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi,$$

d'où

$$I = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Exemple 5.4. *Calculer* $I = \iint_D f(x,y) dxdy$ *où* D *est l'ensemble des points du disque de centre* O *et de rayon 1 , tels que* $0 \le y \le x$

$$f(x,y) = 2x - y.$$



Le domaine D *est obtenu lorsque les coordonnées polaires* (r,t) *parcourent le rectangle*

$$\Delta = [0,1] \times [0, \pi/4].$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = 2r\cos t - r\sin t.$$

Donc

$$I = \iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t) r dr dt = \iint_\Delta r^2(2\cos t - \sin t) dr dt.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\iint_D f(x,y) dxdy = \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{\pi/4} (2\cos t - \sin t) dt\right) = \frac{1}{3}[2\sin t + \cos t]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}.$$

5.4 Exercice

Exercice 5.1.

❶ Soit $D = [0,1] \times [0,2]$. Calculer
$$\iint_D y\frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x}dxdy.$$

❷ Soit $D = [0,2] \times [0,1]$. Calculer
$$\iint_D \left(x^3 + 3x^2y + y^3\right) dxdy.$$

❸ Soit $D = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x\sin y}{1+x^2}dxdy.$$

❹ Soit $D = [0,\pi] \times [0,1]$. Calculer
$$\iint_D x\sin xydxdy.$$

❺ Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy.$$

❻ Soit D l'intérieur du triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\pi,0)$ et $C = (\pi,\pi)$. Calculer
$$\iint_D x\cos(x+y)dxdy.$$

❼ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < \pi\}$. Calculer
$$\iint_D y^2e^{xy}dxdy.$$

❽ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, y > 1, x + y < 3\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}.$$

❾ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Calculer
$$\iint_D 6^x2^ydxdy.$$

❿ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 4x, 1 < xy < 2\}$ Calcule
$$\iint_D x^2y^2dxdy.$$

Exercice 5.2.

❶ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x, xy < 4, x^2 + y^2 > 4\}$. Calculer
$$\iint_D x^2ydxdy.$$

❷ Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < \sqrt{2}, 0 < xy < 1, x^2 + y^2 > 2\right\}$. Calculer
$$\iint_D xy^2dxdy.$$

❸ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x, x + y - 2 < 0\}$. Calculer
$$\iint_D |(x-y)(x+y-2)|dxdy.$$

❹ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y, y > x^2\}$. Calculer
$$\iint_D x\sin ydxdy.$$

❺ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$. Calculer
$$\iint_D \left(x^3 + y^3\right) dxdy.$$

❻ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 4 < xy < 8, 4x - y - 4 < 0\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}.$$

❼ Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1, x>\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Calculer
$$\iint_D (x-y)\,dxdy.$$

❽ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(\ln x - 1)+1<y<\ln x\}$. Calculer
$$\iint_D x\,dxdy.$$

❾ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

❿ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1<(x-2)^2+y^2<4, y>0\}$. Calculer
$$\iint_D \cos\left(x^2+y^2-4x+4\right)dxdy.$$

Exercice 5.3.

❶ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<4, y>1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dxdy.$$

❷ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<36, x>3\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy.$$

❸ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1, x+y>1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

❹ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x<0, x>1\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}.$$

❺ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x<0\}$. Calculer
$$\iint_D xy\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

❻ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4, 0<y<x\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{y^2\cos(x^2+y^2)}{x^2}\,dxdy.$$

❼ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2+9y^2<144, 0<y<x\}$. Calculer
$$\iint_D x\,dxdy.$$

❽ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2+4y^2<36, x>0, y>0\}$. Calculer
$$\iint_D x^2y^4\,dxdy.$$

❾ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4(x-1)^2+9(y-1)^2<36, y>1$
$x-y>0\}$. Calculer
$$\iint_D xy\,dxdy.$$

❿ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9(x-2)^2+25(y+1)^2<225, y<x-3, y>-x+1\}$. Calculer
$$\iint_D (x-2)(y+1)^2\,dxdy.$$

Exercice 5.4.

❶ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 3\sqrt{x^2+y^2} - 3x, x+y > 0\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

❸ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+y^2-2y < 2, 0 < y-1 < x\}$. Calculer
$$\iint_D x(y-1)^2 dxdy.$$

❺ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, 0 < y < x\}$. Calculer
$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} dxdy$$

❼ Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \sqrt{2}, 0 < y < \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}+x^2+y^2\right)^3}}.$$

❾ 1) Vérifier que pour tout $r > 0$:
$$\iint_{B(0,r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy \leq 4\left(\int_0^r e^{-t^2} dt\right)^2 \leq \iint_{B(0,2r)} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy.$$
2) En déduire que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

❷ Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 2\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\right\}$. Calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt[4]{\left(x^2+y^2\right)^3}}.$$

❹ Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{1}{2x} < y < \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right\}$. Calculer
$$\iint_D \left(x^2+4y^2\right) dxdy.$$

❻ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1, 0 < y < x\}$. Calculer
$$\iint_D \left(x^2+\frac{y^2}{9}\right) \sin\left(2 \operatorname{Arctg} \frac{y}{3x}\right) dxdy.$$

❽ Soient $r > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-rx < 0\}$. Calculer
$$\iint_D \sqrt{r^2-x^2-y^2} dxdy.$$

❿ Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x+y < 1, x > 0, y > 0\right\}$.
En effectuant le changement de variables
$$x = \tfrac{u+v}{2} \text{ et } y = \tfrac{u-v}{2}.$$
calculer
$$\iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} dxdy.$$

Exercice 5.5.

❶ Soit $D =]0,1[\times]0,1[$. En effectuant le changement de variables
$$x = u^2 \text{ et } y = \tfrac{v}{u},$$
calculer
$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)\left(1+xy^2\right)}.$$

❷ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x, x < y^2 < 2x\}$. En effectuant le changement de variables
$$u = \tfrac{x}{y} \text{ et } v = \tfrac{y^2}{x},$$
calculer
$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy.$$

❸ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x^2 + xy + y^2 < 1, y > 0\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x + \tfrac{y}{2} \text{ et } v = \tfrac{\sqrt{3}}{2}y,$$

calculer

$$\iint_D e^{x^2+xy+y^2}dxdy.$$

❹ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x - 1 < y^2 < x, 0 < y < 2 - x\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = \tfrac{y}{2-x} \text{ et } v = y^2 - x,$$

calculer

$$\iint_D \frac{y^2\,(2 + 2y^2 - x)}{(2-x)^4}dxdy.$$

❺ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $0 < \sqrt{2}y < x, 1 < x^2 - y^2 < 4\Big\}$. En effectuant le changement de variables

$$u = x^2 - y^2 \text{ et } v = \tfrac{y}{x},$$

calculer

$$\iint_D \frac{y}{x^3}\sin\pi\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)dxdy.$$

❻ En effectuant le changement de variables

$$x = \mu \text{ et } y = \mu\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

calculer

$$\lim_{t\to0+}\int_t^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy\right)dx.$$

❼ Calculer, $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\left(1+y^6\right)dy.$

❽ Calculer, $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 xye^{y^3}dy.$

❾ Calculer,

$$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{\left(4-y^2\right)^3}dy.$$

❿ Calculer,

$$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dx.$$

Exercice 5.6.

❶ Calculer,

$$\int_0^{\sqrt{\sqrt{2}}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dx.$$

❷ Calculer,

$$\int_0^{\sqrt{2}} dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-x^2}dx.$$

❸ Calculer, $\alpha > 0$.

$$\int_0^{2\alpha} dx\int_0^{\sqrt{2\alpha x-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dy$$

❹ Calculer,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy.$$

Calculer l'aire de

❺ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $y^2 - 6x < 0, x - y < 12, x^2 + y^2 > 16\}$.

❻ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ $x < 0, y^2 < x^4(x+4)\}$.

❼ Soit $r > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la cardioïde $\rho(\theta) = 2r(1+\cos\theta)$.

❽ Soit $a > 0$. Calculer l'aire du domaine D délimité par la lemniscate $\rho|\theta| = a\sqrt{|\cos 2\theta|}$.

❾ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ **et** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ **une fonction continue.**

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{2f(x) + 5f(y)}{f(x) + f(y)} dxdy$

❿ Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ **un ouvert borné et** $f, g : D \to \mathbb{R}$ **deux fonctions continues et bornées. Montrer que**

$$\left(\iint_D fg(x,y)dxdy\right)^2 = \iint_D f^2(x,y)dxdy \iint_D g^2(x,y)dxdy$$

si et seulement si f **et** g **sont linéairement dépendantes.**

<u>Exercice</u> 5.7.

❶ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} dxdy.$$

❷ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

❸ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^4)(1 + y^4)}.$$

❹ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1 + y^2} dxdy.$$

❺ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2)\, dxdy.$$

❻ Calculer les intégrales suivantes :
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1 + y^2}{(1 + y^4)\left(1 + (1 + y^2)^2 x^2\right)} dxdy.$$

❼ Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ **un ouvert borné et** $f, g : D \to \mathbb{R}$ **deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout couple de nombres réels** $p, q > 1$ **vérifiant** $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$**, on a**

$$\iint_D |fg|(x,y)dxdy \le \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)dxdy} \times \sqrt[q]{\iint_D |g|^q(x,y)dxdy}$$

Cette relation est appelée l'inégalité de Hölder. Lorsque $p = q = 2$**, il est d'usage de l'appeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

❽ Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ **un ouvert borné et** $f, g : D \to \mathbb{R}$ **deux fonctions continues et bornées. Montrer que pour tout** $p \in [1, +\infty[$**:**

$$\sqrt[p]{\iint_D |f + g|^p(x,y)dxdy} \le \sqrt[p]{\iint_D |f|^p(x,y)dxdy} + \sqrt[p]{\iint_D |g|^p(x,y)dxdy}.$$

Cette relation est appelée l'inégalité de Minkowski.

❾ **Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer que**

$$\iint_D f(x-y)dxdy = 2\int_0^2 (2-t)f(t)dt$$

❿ **Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par**

$$F(x,y) = \int_0^x dr \int_0^y f(r,s)ds.$$

Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y)$. Calculer

Bibliographie

[1] Kada Allab, *Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle* - O.P.U., 2002.

[2] Jean-Pierre Marco, Philippe Thieullen, Jacques-Arthur Weil, *Mathématiques L2 : Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés*, Pearson, 2007.

[3] Florence Monna, Gilbert Monna, *Suites et séries de fonctions : Exercices corrigés avec rappels de cours*, Cépaduès, 2013.

[4] Nikolaï Piskounov. *Calcul différentiel et intégral*, Tome 1 et 2. Editions Mir, MOSCOU 1980 ou Ed. Ellipses 1993.

[5] Dominique Prochasson, *Analyse 2eme année. Exercices corrigés*, Dunod, 2000.

[6] Jacques Douchet, *Analyse Recueil d'exercices et aide-mémoire vol.1*